This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

LSoc3061.25.3

Bound

JAN 9 1909

Harvard College Library

FROM

Astronomical Observatory

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

VAN 28 DECEMBER 1907
-:- TOT 24 APRIL 1908 -:-

DEEL XVI
(2DE GEDEELTE)

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
:═══: JUNI 1908 :═══:

411/C 5
aek

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

VAN 28 DECEMBER 1907
-:- TOT 24 APRIL 1908 -:-

DEEL XVI
(2DE GEDEELTE)

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
:═══: JUNI 1908 :═══:

1358-44

LSoc 3061.25.3

INHOUD.

					Blz
Verslag	Vergadering	28	December	1907	433
„	„	25	Januari	1908	507
„	„	29	Februari	„	565
„	„	28	Maart	„	691
„	„	24	April	„	823

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 28 December 1907.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 434.

Verslag van de onderzoekingen van Dr. PH. VAN HARREVELD verricht gedurende zijn verblijf aan het Departement van Landbouw te Buitenzorg, p. 434.

W. VAN BEMMELEN: „Aardstroomregistratie te Batavia tot onderzoek van het verband tusschen aardstroom en aardmagnetische kracht", p. 435. (Met één plaat).

J. A. BARRAU: „Het analogon der *Cf* van KUMMER in de ruimte van zeven afmetingen". (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE), p. 457. (Met één plaat).

J. SCHMUTZER: „Over de termen Schalie, Lei en Schist". (Aangeboden door de Heeren C. E. A. WICHMANN en G. A. F. MOLENGRAAFF), p. 463.

P. H. SCHOUTE: „Over de doorsnee van het maatpolytoop M_n der ruimte R_n met een centrale ruimte R_{n-1} loodrecht op een diagonaal", p. 467. (Met één plaat).

Mrs. A. BOOLE STOTT en Prof. P. H. SCHOUTE: „Over vijf paren uit een zelfde bron afgeleide vierdimensionale cellen" (Eerste gedeelte), p. 482.

P. ZEEMAN: „Waarneming van de magnetische splitsing der spectraallijnen met de methode van FABRY en PEROT", p. 486. (Met één plaat).

A. F. JAEGER: „Over de vraag naar de mengbaarheid en de vormanalogie bij aromatische Nitro- en Nitroso-verbindingen". (Aangeboden door de Heeren A. P. N. FRANCHIMONT en A. F. HOLLEMAN), p. 491.

H. KAMERLINGH ONNES: „Isothermen van één-atomige gassen en hun binaire mengsels. I. Isothermen van helium tusschen + 100° C. en — 217° C.", p. 495.

H. KAMERLINGH ONNES: „Over het meten van zeer lage temperaturen. XIX. Afleiding van den spanningscoëfficient van helium voor den internationalen heliumthermometer en herleiding van de aflezingen op den heliumthermometer tot de absolute schaal", p. 501.

Aanbieding van eene verhandeling van Mej. CLARA POLAK, getiteld: „Die Anatomie des Genus Colobus", p. 504.

Verslag van den Heer MOLENGRAAFF over de herdenking van het 100-jarig bestaan der Geological Society te Londen, p 504.

Aanbieding van een boekgeschenk, p. 505.

Erratum, p. 505.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

beschreven bijzondere wijze van droppeling zeer algemeen voorkomt in de familie der Urticaceae.

Van de kleinere onderwerpen, die mij bezig hielden, vermeld ik hier het aërenchym van Neptunia oleracea en de haustorien van Cassytha filiformis. Goebel (Pflanzenbiologische Schilderungen, II^{ter} Teil, p. 259) houdt het aërenchym van Neptunia en andere planten voor een luchtreservoir ten dienste der ademhaling, niet voor een drijforgaan. Deze opvatting is stellig in vele gevallen juist. Bij Neptunia oleracea constateerde ik echter, dat de luchtkussens dienden om de stengels van deze waterplant op een bepaald niveau drijvende te houden. Materiaal werd verzameld om de ontwikkeling van dit aërenchym en van dat van Jussiaea repens opnieuw na te gaan.

Cassytha filiformis vertoont eenige eigenschappen, die twijfel kunnen wekken aangaande zijn parasietische leefwijze: de groene kleur, het leven op schier alle planten binnen zijn bereik, en het indringen der haustorien in de eigen stengels der planten. Het bleek mij evenwel, dat de haustorien een verbinding tot stand brengen tusschen eigen xyleem en het xyleem van de voedsterplant, zoodat in elk geval aan hemiparasitisme gedacht moet worden. Aan ingezameld materiaal zal dit nader onderzocht worden.

Een groot deel van den mij ten dienste staanden tijd heb ik besteed aan het bijeenbrengen van een collectie demonstratiemateriaal voor het onderwijs aan Nederlandsche Universiteiten. De plantentuin met zijn wetenschappelijken staf, en de excursies in de omgeving van Buitenzorg, Priok, Tjibodas en Garoet boden daartoe een onvergelijkelijke gelegenheid, die mij tevens op de beste wijze in kennis bracht met de bijzonderheden der tropenflora.

Groningen 12 December 1907.

DR. PH. VAN HARREVELD.

Geophysica. — De Heer VAN DER STOK doet eene mededeeling namens den Heer W. VAN BEMMELEN te Batavia: *„Aardstroomregistratie te Batavia tot onderzoek van het verband tusschen aardstroom en aardmagnetische kracht."*

Ondanks de groote vorderingen, die gemaakt zijn in onze kennis omtrent de verschijnselen van het aardmagnetisme, is in de verklaring dier verschijnselen nog niet de gewenschte vooruitgang te bespeuren.

Dat de onderscheidene variaties, waaraan de magneetnaald onderhevig is, het gevolg zijn van de veranderingen van electrische stroo-

Semarang, Soerabaja en Makasser), ook grootere registratiesnelheden (60 en 240 mm. per uur) werden aangewend.

Naast het voortzetten van de verschillende aardstroomregistraties gedurende korter of langer tijd ter verkrijging van statistische uitkomsten, werd door mij ook geëxperimenteerd. Wanneer de registratie een nieuw verband tusschen aardstroom- en magnetische-variatie aantoonde, dan werden andere aardstroomregistraties georganiseerd om dat verband nader te onderzoeken. Wanneer zich vragen omtrent den invloed van draad of grondplaat voordeden, dan werd getracht die door het experiment te beantwoorden.

De instrumenteele inrichting was zóó getroffen, dat op een 20 cm. breede strook naast de variaties van twee aardstroomleidingen die der overeenstemmende magnetische componenten werden opgeteekend. Overeenstemmend beteekent hier: de component loodrecht op de richting der aardstroomleiding.

De gevoeligheid werd dermate gekozen, dat de overeenstemmende variaties van aardstroom en magnetische kracht niet te veel in grootte verschilden. Hierdoor waren groote gevoeligheden der magnetische variatie instrumenten (tot 0.1 γ per mm.) noodig; daar evenwel alleen de relatieve stand gedurende een nacht in beschouwing kwam, was het gemakkelijk die variatieinstrumenten met eenvoudige middelen in te richten.

Het is mijn voornemen over een en ander in een meer uitvoerige publicatie te gelegener tijd verslag te geven.

De dagelijksche variatie.

De bezwaren bij het onderzoek van de dagelijksche variatie ontmoet waren zeer groot. Het belangrijkste gedeelte dier variatie toch speelt zich omstreeks den middag af, maar gedurende de daguren wordt het electrische veld van Batavia door het bedrijf van de electrische tram gestoord en bovendien was mij slechts gedurende de nachturen het gebruik der lijnen toegestaan.

Dat het toch nog gelukt is tot bruikbare uitkomsten te komen, is te danken aan den Directeur der Intercommunale Telefoon-Maatschappij, den Heer S. W. Baints, die welwillender wijze uurlijksche aflezingen van de grootte van den aardstroom ten kantore der Maatschappij te Batavia heeft laten verrichten. De uren waren 8^u45^m a. m.; 9^u45^m etc. tot 4^u45^m p.m.; gebruikt werd een gewone wijzergalvanometer.

Uit deze aflezingen heb ik die gekozen, welke op magnetisch zeer rustige dagen vielen en bovendien blijken gaven niet door storingen op de lijn of andere onregelmatigheden te hebben geleden. Voor die

[illegible] dagen [illegible] de [illegible] gedurende de nachturen [illegible] p.m. – [illegible] a.m. [illegible]

[illegible] de verhouding der schaalwaarden [illegible]

[illegible] een magnetischen [illegible] [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]		[illegible]	[illegible]		[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	[illegible]	[illegible]	4	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	8	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	[illegible]	[illegible]	12	[illegible]	[illegible]

Uit de kromme lijnen, die, volgens de bovengegeven cijfers, de dagelijksche schommeling van aardstroom en magnetische component aangeven, blijkt:

dat die schommeling voor beide overeenstemmend is;

dat de richting van den aardstroom zoodanig is, dat hij geacht zou kunnen worden de variaties der magnetische component te veroorzaken;

verder: *dat de magnetische component vertraagd is ten opzichte van den aardstroom*, en ten slotte;

dat de verhouding der amplituden van overeenstemmende schommelingen met den duur dier schommeling afneemt, zoodat die van den aardstroom bij korter duur betrekkelijk grooter zijn.

Het hoofdmaximum 's middags wordt door den aardstroom ongeveer anderhalf uur, het nachtelijk hoofdmaximum twee uur eerder bereikt.

De secundaire schommeling in de avonduren is bij den aardstroom veel sterker.

Het is aangewezen hier de harmonische analyse toe te passen, en daarbij de formule

$$A = A_n \sin n\,(t + c_n)$$

te gebruiken.

De uitkomsten der harmonische analyse bevestigen dus ten volle wat de bloote aanschouwing ons leerde.

Vooral de toeneming van den aardstroom bij het korter worden van den duur der overeenstemmende aardmagnetische variatie is zeer scherp uitgedrukt.

Deze afhankelijkheid laat zich door de volgende formule vrij nauwkeurig uitdrukken;

Stel de amplitude der magnetische component $= M$; den duur, in dagen uitgedrukt, $= T$ en de amplitude van den aardstroom $= A$ dan is:

$$A = 0.8 \sqrt[4]{\frac{1}{TM}}.$$

De waarden in den kolom „calc" (Tabel p. 440) zijn met behulp van deze formule berekend.

Toch mag niet veel waarde aan die overeenstemming gehecht worden, daar de hoogere termen van de harmonische analyse, wegens de onnauwkeurigheid der gebruikte uurwaarden, zeer onbetrouwbaar zijn.

Het phaseverschil neemt tot den 5^{den} term regelmatig toe, om daarna weer terug te zakken tot de waarde, die het bij den 3^{den} term bereikt; maar ook de phaseverschillen voor de hoogere termen gevonden verdienen weinig vertrouwen.

	AMPLITUDE					PHASE.			
	Aardstroom Volt. p. K.M. $\times 10^{-5}$	Magn. Comp. C.G.S. $\times 10^{-5}$	Aardstroom / Magn. Comp. Observ.	Aardstroom / Magn. Comp. Calc.	Δ C—O		Aardstroom	Magn. Comp.	Aardstroom / Magn. Comp.
A_1	75	18.6	4.0	3.9	—0.1	C_1	209°	286°	13°
A_2	44	7.6	5.7	5.9	0.2	C_2	73	53	20
A_3	28	3.0	9.4	8.0	—1.4	C_3	122	98	24
A_4	9	0.9	10.0	10.8	0.8	C_4	53	15	38
A_5	7	0.5	13.1	13.6	0.5	C_5	103	56	47
A_6	6	0.4	15.7	15.9	0.2	C_6	57	34	23

Het is mij gelukt een bevestiging van een gedeelte dezer resultaten met behulp van den kabel Batavia—Billiton te verkrijgen. De vier maanden Maart—Juni 1906 gaven voor het nachtelijk verloop bruikbare uitkomsten.

De variatie van de overeenkomstige magnetische component veranderde (zooals te verwachten was) vrij sterk van karakter gedurende die maanden.

De aardstroom volgde nu inderdaad deze verandering, terwijl de maxima en minima die der magnetische component bleven voorgaan. Uit het gemiddelde voor de 4 maanden spreekt dit laatste duidelijk.

	7	8	9	10	11	Middernacht	1	2	3	4	5
Aardstroom Volt. p. KM. $\times 10^{-5}$	0	−27	−25	**−29**	−17	12	20	**28**	26	0	−14
Magnet. comp. 10^{-5} C. G. S.	0	−2.1	−3.7	−5.3	**−5.5**	−4.9	−4.1	**−3.3**	−3.4	−4.5	−5.4

Bij den aardstroom komt het maximum één uur, het minimum ongeveer een half uur eerder. Beschouwen wij dit minimum als bij de voorafgaande schommeling van $3^{u}\,30^{m}$ duur te behooren, dan is het phaseverschil 26°.

De verhouding der amplitude is 26.0, terwijl ik uit een Zondagsche opteekening, toen de kabel mij van 0^{u} — 4^{u} p.m. ter beschikking stond, ruwweg voor de groote schommeling 16.0 afleidde.

Wij ontmoeten dus ook hier afneming van de verhouding tusschen aardstroom- en overeenstemmende magnetische component bij toeneming van den duur der schommeling, maar daarnaast een veel sterkeren aardstroom dan voor de lijn Cheribon—Batavia.

Jaarlijksche ongelijkheid in de dagelijksche schommeling.

Te Batavia is de amplitude der dagelijksche schommeling van de magnetische kracht aan een enkel- en dubbel-jaarlijksche ongelijkheid onderhevig, waarbij de maxima in Maart en September, de minima in Januari en Juni bereikt worden. De beide maxima en de beide minima zijn gelijk van grootte.

Uit de voortgezette metingen op het kantoor der Intercommunale Telefoonmaatschappij kon ik afleiden, dat de aardstroomvariaties de zelfde jaarlijksche ongelijkheid vertoonen.

Deze metingreeks vertoont twee onderbrekingen.

Ten eerste waren in Januari '06 de lijnen doorloopend gestoord, en ten tweede schijnen in Augustus '06 fouten in de waarneming binnen geslopen te zijn, waardoor herhaaldelijk onwaarschijnlijk groote waarden werden afgelezen. Nadat hierop door mij gewezen was, werden in December daaropvolgend de aflezingen weer bruikbaar.

Uit iedere maand heb ik die dagen uitgekozen, welke ten eerste magnetisch rustig waren en voor welke, ten tweede, zooveel mogelijk volledige en bruikbare aardstroomaflezingen beschikbaar waren.

Van de gemiddelde uurwaarden voor iedere maand werd vervolgens het verschil van de grootste en kleinste waarde genomen. Het maximum viel gewoonlijk op de $8^{3}/_{4}$ a. m. of $9^{3}/_{4}$ a. m. waarneming, het minimum op die van $3^{3}/_{4}$ p. m. of $4^{3}/_{4}$ p. m.

4.1905 aek

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

VAN 28 DECEMBER 1907
-:- TOT 24 APRIL 1908 -:-

DEEL XVI
(2DE GEDEELTE)

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
:═══════: JUNI 1908 :═══════:

Cheribon.

Kortdurende variaties	Gemidd. van de 6 termen der dag. variatie
22°	27°

Billiton

Kortdurende variaties	Nachtelijke variatie
28°	26° (?)

Amplitude-verhouding

Het scherp aangeven van het oogenblik van maximum of minimum van een schommeling is spoediger onmogelijk wegens de interferentie van kleinere gesuperponeerde variaties, dan het meten van de amplitude.

Ik heb daarom een veel grooter aantal — 346 — gevallen ter uitmeting kunnen uitkiezen; de uitkomsten volgen hier:

Batavia—Cheribon.
Amplitude Aardstroom in Volt p. Km.
Amplitude Magnetische component in C.G.S.

Halve schommelduur	Magnetische Component in 10^{-5} C. G. S.							
	0.23	0.37—0.40	0.50—0.79	0.90—1.50	1.7—1.8	2.8—3.2	5.5—7.6	15.1—18.6
0.3 m.	23 3	22.1	22.4					
0.5	24.3	23.8	21.4	22.8				
0.8		23.6	22.3	19.4				
1.2		22.4	21.1		22.5			
3.7			19.2	21.1		19.1		
7.6			18 3		16.9	17.8	15.6	
15.2				14.8		14.3	14.0	
29.0						15.9		
36.3							12.1	
39.6								10.8
120 —		15.7						
144.—			13.1					
180.—				10.0				
240.—						9.4		
360.—							5.7	
720.—								4.0

Volgens deze tabel schijnt de toeneming van de amplitude bij afneming van den schommelduur een maximumwaarde bij 0.5 min. te bereiken en bovendien de amplitudeverhouding afhankelijk van de amplitude zelve te zijn, en wel zoodanig dat ze bij gelijken duur met het afnemen der amplitude toeneemt.

Een volkomen bevestiging dezer uitkomsten werd uit 312 gevallen voor de Anjer-lijn gevonden.

Batavia-Anjer.

Amplitude Aardstroom in Volt p. K.m.
Amplitude Magnetische Component in C. G. S.

Halve schommelduur	Magnetische Component in 10^{-5} C. G. S.				
	0.19—3.0	0.53—0.68	1.36—1.83	2.30—3.89	5.20—5.48
0.4 min.	96	95	97		
0.6	97	104	95		
0.9	86	90	89		
1.8	92	84			
2.3			64		
5.3		86	74		
6.3				68	
7.7	83				
9.2			68		
9.7					60
10.8		68			
12.3			73		
13.6		58			
19.9				75	
22.0					63

Ook hier wordt bij korten duur een maximum gevonden en wel bij 0.6 min.

Naast deze overeenstemming vinden we de onverwachte uitkomst, *dat de Batavia-Anjer stroom ongeveer vier maal sterker is dan de Batavia-Cheribon stroom.*

Die verhouding is constant bij verschillenden duur der schommeling, zooals de rangschikking volgens groepen van gemiddeld gelijken duur opleverde.

Halve schommelduur	Batavia-Anjer / Batavia-Cheribon
0.33 min.	4.28
0.54	3.94
0.66	4.36
0.76	4.21
0.96	4.21
1.67	3.79
5.6	4.25
7.6	3.84
15.1	5.21
Gemidd.	4.23

Wanneer we de waarden voor de verhouding van de amplituden van magnetische kracht en aardstroom van schommelingen van korter duur willen vergelijken met die der zes termen van de dagelijksche variatie, dan geschiedt dit het best door alle waarden in een diagram met abscis $\sqrt{M}$ en ordinaat $\sqrt{1/T}$ in te schrijven. Wanneer nu de boven voor de 6 termen der dagelijksche variatie gevonden formule $A = 0.8 \sqrt[4]{\frac{1}{TM}}$ zal blijven gelden, dan zullen de waarden, die op den zelfden straal, uit den oorsprong getrokken, liggen, dezelfde moeten zijn.

Het blijkt dat dit alleen voor het midden gedeelte van het diagram het geval is nl. voor den straal waarbij $0.8 \sqrt[4]{\frac{1}{TM}} = 150$ is.

De verhouding $\sqrt{1/T}$ en $\sqrt{M}$ is daarvoor $= 2$.

Is de amplitude der magnetische component relatief grooter. dan worden de stralen met gelijke waarden langzamerhand naar de abscis-as toegebogen, en is $\frac{1}{T}$ relatief grooter, dan worden ze naar de ordinaatas toegebogen.

Bij groote $\frac{1}{T}$ d. i. bij schommelduur van ongeveer één minuut, wenden zij zich zelfs weer naar de ordinaatas terug en schijnt een maximum te ontstaan.

Het zou wel mogelijk zijn om dit lijnenstelsel in een formule te dwingen, maar we mogen niet verwachten, dat die formule aan de

werkelijke formule zal beantwoorden, daar die wegens den aard van het verschijnsel zonder twijfel zeer samengesteld moet zijn.

Wat evenwel m.i. duidelijk uit het diagram blijkt, is, dat de amplitudeverhoudingen voor de korter durende schommelingen geleidelijk overgaan in die van de langer durende (de zes termen van den dagelijkschen gang) en dat dus tusschen deze twee verschijnselen evenzoo een geleidelijke overgang bestaat.

De uitkomsten voor den aardstroom Buitenzorg-Batavia en Billiton-Batavia zijn weer onzeker wegens het gebrek aan overeenstemming met de magnetische component. Ik vond :

Buitenzorg-Batavia.

Halve schommelduur	Amplitude Magn. Comp.	Amplit. aardstr. in V. p. Km. / Amplit. magn. Comp. in C. G. S.	Aantal gevallen
1.1 min.	0.38 J.	75	20
3.7	0.96	79	20
7.6	1.20	71	28
			68
		Billiton—Batavia.	
0.7	0.39	63	14
1.3	0.29	74	14
3.5	0.49	66	14
7.0	0.50	58	23
22.4	1.44	41	5
			70

Wanneer inderdaad deze getallen vertrouwen verdienen, dan is dus de verhouding van de amplitude van den aardstroom ten opzichte van de magnetische component ook hier met toeneming van den duur afnemende.

De aanvankelijke toeneming bij zeer kleinen duur vindt men ook in bovenstaande getallen terug, zelfs in veel sterkere mate dan bij den Anjer- en Cheribon-stroom.

De getallen voor Buitenzorg zijn wat kleiner en voor Billiton nog wat kleiner dan voor Anjer, maar nog altijd veel grooter dan voor den Cheribon-stroom.

Over de lijn naar Poerwakarta heb ik maar gedurende twee nachten kunnen beschikken.

Ik heb toen den Poerwakarta-stroom gelijktijdig met den Cheribon-stroom laten registreeren en volkomen overeenstemming tusschen beide gevonden voor schommelingen van 0.8 tot 15.5 minuten duur.

Eerst gedurende de laatste maanden van de registratie-periode heb ik het onderzoek tot de lijnen naar Semarang en Soerabaja uitgebreid, en tot mijn verrassing vrij groote afwijking van de verhoudingen, die op de lijnen Cheribon en Anjer plaats vinden, aangetroffen.

Semarang—Anjer.

Halve schommelduur	Amplitude Anjerstroom 10^{-6} V. p Km.	Amplitude Anjer / Amplitude Semarang	Aantal gevallen
0.33 min.	38	1.70	20
0.69	74	2.06	20
1.04	61	2.16	20
1.71	57	2.32	20
7.43	160	3.96	20
20.81	290	4.61	16
			116

Soerabaja—Anjer.

0.37	43	2.17	20
0.93	92	2.87	20
2.65	110	3.27	20
11.85	326	4.71	20
34.28	739	7.16	7
			87

De invloed van den duur op de amplitude van den aardstroom is dus voor den Semarang- en Soerabaja-stroom hier veel grooter dan bij den Anjer-stroom.

Merkwaardig is het dat ook hier die vergrooting van den invloed met den duur ongeveer volgens t^{-1}/T plaats vindt.

Ten opzichte van de eerste waarde bij $t = 0.33$ min., respect. 0.37 min. duur toch wordt:

	$\sqrt[4]{\frac{t_n}{t_0}}$	$\sqrt[4]{\frac{A_x}{A_0}}$		$\sqrt[4]{\frac{t_n}{t_0}}$	$\sqrt[4]{\frac{A_x}{A_0}}$
Semarang	1.20	1.21	Soerabaja	1.26	1.32
	1.33	1.27		1.64	1.51
	1.51	1.36		2.38	2.17
	2.18	2.33		3.10	3.30
	2.82	2.71			

Directe vergelijking van den Batavia-Semarang stroom met de magnetische component gaf: (18—21 Juni '07):

Halve schommeldnur	Amplit. van de Magnet. Comp. in 10×10^{-5} C.G.S.	Amplit. Aardstroom in Volt p. K.M. / Amplit. Aardstroom in C.G.S.	Aantal gevallen
0.6 min.	1.3	43	14
1.0	0.9	35	15
1.4	0.9	31	13
5.0	0.7	18	10
11.5	2.2	13	9

De twee laatste waarden passen zeer wel in het schema der waarden voor den Cheribon-stroom gevonden, maar de drie eerste vertoonen een veel snellere toeneming bij korter duur der schommeling.

Die eigenaardige toeneming valt bij de beschouwing der geregistreerde lijnen onmiddellijk zeer sterk op. Om na te gaan of die vergrooting van den invloed van den duur met het toenemen van den afstand van de twee stations, tusschen welke de aardstroom gemeten wordt, samen hing, heb ik eenige nachten directe verbinding met Makassar verzocht en verkregen. Het isolatieverlies op de lijn was evenwel zoo groot, dat de feitelijke afstand geen verlenging van belang meer had verkregen.

Over de betrouwbaarheid der uitkomsten.

Er is bij aardstroomwaarnemingen altijd een zekere twijfel overgebleven of de verkregen uitkomsten wel een beeld geven van den werkelijk voorkomenden aardstroom.

Volgens SCHUSTER (Terr. Magn. III, p. 130) is de maat van den stroom inderdaad te meten door het inschakelen in de leiding van

een element van bekende electromotorische kracht. Ik heb dan ook steeds van dit eenvoudige middel gebruik gemaakt en verbond daaraan vaak, door inschakeling van een weerstand van 100 of 1000 Ohm een, zij 't ook ruwe, meting van den totalen weerstand van de geheele leiding.

De uitkomsten waren meestal zeer wel onderling overeenstemmend; alleen bij langere lijnen was soms sterk isolatieverlies aan te toonen.

Voor den aardstroom heeft dit isolatieverlies weinig gevolg; indien toch twee punten, op afstand L van elkander gelegen, met potentialen P en $P + L_p$ door een draad verbonden zijn, zal langs dien draad de potentiaal evenredig met den afstand van P tot $P + L_p$ veranderen en in een punt tusschenin, b.v. op $1/a$ van den afstand $P + \frac{L_p}{a}$ zijn. Maar daar zal de potentiaal der aarde ook $P + \frac{L_p}{a}$ zijn als die aardpotentiaal eveneens evenredig met den afstand verandert (wat we willen vooronderstellen, dat ze in eerste benadering inderdaad doet.) Er zal dus geen potentiaalverschil tusschen lijn en contactpunt met den grond zijn en ook geen stroomverlies. [1])

Er is evenwel stroomverlies, wanneer ik een element inschakel en dus een potentiaalverval langs den draad verwek, dat geenszins gelijk met de aardpotentiaal verloopt.

Hierdoor laat zich verklaren, dat het beeld van den aardstroom zoo regelmatig met de magnetische component op en neer ging, terwijl toch een somwijlen zeer groot isolatieverlies op de lijn plaats greep, zoodat de schaalwaardebepaling door middel van inschakeling van een element abnorme waarden opleverde.

Wanneer evenwel juist over dat al of niet regelmatig toenemen van de aardpotentiaal met den afstand een onderzoek moet ingesteld worden, dan is dit isolatie-verlies storend. Daarom gaf de registratie met de doorgaande verbinding Batavia—Makassar geen uitsluitsel over die vraag.

Invloed van het materiaal der lijn.

Over de mogelijkheid van een invloed van het materiaal van den geleidingsdraad op amplitude en phase van den aardstroom kon ik een vrij scherp experiment nemen, door gelijktijdig te registreeren de stroomen, die tusschen Cheribon—Batavia resp. door den roodkoperen telefoon- en den ijzeren telegraafdraad liepen.

[1]) Wanneer wij ons denken, dat de aardstroom een b.v. om de aarde heen loopenden gesloten stroomkring vormt, en onze draadleiding daarmee in drie punten contact heeft, n.l. de twee eindstations en het contact punt, dan is er een stroomverdeeling volgens WHEATSTONE en is het contact de brug van WHEATSTONE.

De weerstand van de eerste geleiding was meestal ongeveer 10 maal kleiner, dan van de andere.

Te Batavia stonden beide geleidingen op de zelfde aardplaat, te Cheribon hingen de beide aardplaten in den zelfden waterput; bovendien loopen de lijnen grootendeels op de zelfde telegraafpalen.

Er werd nu een zoo goed als volkomen overeenstemming gevonden, zoodat alle invloed van het materiaal (vooral ten opzichte van magnetische inductie) als niet bestaande mag aangenomen worden.

Invloed van den polarisatiestroom.

Meer bevreesd was ik voor een storenden invloed van de polarisatie der aardplaten, waarop van verschillende zijden herhaaldelijk is gewezen. Deze polarisatie toch zou misschien het phaseverschil en de verandering der amplitudeverhouding kunnen verklaren.

Stel toch dat de aardstroom samen met de magnetische component toeneemt, dan groeit ook de tegenwerkende polarisatiestroom. Indien nu de toeneming van aardstroom en magnetische component in een afneming overgaat, zal de polarisatiestroom aanvankelijk blijven toenemen en dientengevolge zal de waargenomen stroom (i. e. aardstroom minus polarisatiestroom) eerder zijn omkeerpunt bereiken dan de magnetische component. Indien de schommeling in duur toeneemt zal de polarisatiestroom ook toenemen, eerst sneller dan langzamer, en derhalve zal de waargenomen stroom steeds verliezen ten opzichte van de magnetische component en de amplitudeverhouding — evenals werkelijk is gevonden — eerst sneller, daarna langzamer afnemen.

Hoewel de te verwachten invloed der polarisatie derhalve in karakter moest overeenstemmen met het gevondene, was toch niet aan te nemen, dat hij de oorzaak van die verschijnselen kon zijn, daar bij de waarnemingen ten kantore der Telefoonmaatschappij verricht, de aardverbinding ieder uur slechts voor enkele oogenblikken werd gemaakt en dus van langdurig aangroeien der polarisatie geen sprake was.

Om den invloed van de polarisatie te leeren kennen heb ik het volgende experiment genomen. Ten eerste heb ik den polarisatiestroom direct gemeten. Daartoe begroef ik een tweede aardplaat op enkele meters van de oude en maakte een nieuwe verbinding: oude aardplaat-galvanometer-nieuwe aardplaat.

De oude aardplaat liet ik nu door inschakeling van een element in de lijn (Cheribon—Batavia) sterk polariseeren. Na het opheffen der verbinding met Cheribon sloot ik onmiddelijk de nieuwe ver-

binding, waarbij dus de depolarisatiestroom door den tweeden galvanometer ging.

Inderdaad vond ik de polarisatie met haar karakteristieke eigenschappen, maar haar sterkte was niet meer dan enkele procenten van den hoofdstroom en dus inderdaad te klein om als oorzaak van phaseverschil en verandering amplitudeverhouding te dienen.

Na dit onderzoek heb ik een stel niet-polariseerende aardplaten (geamalgameerde zinkplaten gedoopt in een oplossing van $ZnSO_4$, in poreuse potten) [1]) op het Observatoriumerf geplaatst en mij naar Cheribon begeven om daar een gelijksoortig stel te plaatsen. De herhaling van de boven beschreven proef toonde inderdaad het uitblijven van polarisatie aan.

Hierna heb ik den eenen van de twee telefoondraden tusschen Batavia en Cheribon met de oude polariseerende, den anderen met de nieuwe niet-polariseerende aardplaten verbonden en de twee aardstroomen op dezelfde strook, gelijktijdig, met dezelfde gevoeligheid, en een registreersnelheid van 24 cm. per uur samen met de magnetische component zich laten opteekenen. Scherper kon het experiment moeilijk genomen worden.

De uitkomst was voor het phaseverschil, zooals ik verwachtte, een zeer geringe invloed in den boven aangeduiden zin; voor de amplitude verhouding vond ik voor één nacht ook een zeer kleinen invloed in de verwachte richting, maar gedurende twee andere nachten een iets grooteren invloed in tegengestelden zin. Ik meen die laatste invloeden aan de onvermijdelijke onnauwkeurigheid in de schaalwaardebepaling (door het inschakelen van een element van bekende electromotorische kracht) te moeten toeschrijven.

In elk geval was voldoende bewezen, dat de polarisatiestroom niet de oorzaak der gevonden verschijnselen was, en kan ik derhalve die verschijnselen als werkelijk aannemen.

Verband tusschen Aardstroom en Magnetische kracht.

Indien wij het verband tusschen de variatie van aardstroom en magnetische component nader willen onderzoeken, is het noodig de variaties der laatste op zichzelf te beschouwen.

Als regel geldt nu te Batavia, dat de twee horizontale componenten gelijktijdig veranderen, d. w. z. dat doorgaans tusschen de omkeerpunten van X en Y slechts een gering tijdsverschil bestaat, en dat daarentegen Z meestal een phaseverschil van 90° met X en Y heeft. Ad. Schmidt (Met. Zeitschrift 1899) heeft er op gewezen, dat de

[1]) C. A. Brander. Inaugural Dissertation, Helsingfors, 1888.

variaties der magnetische component zouden kunnen verklaard worden door het overtrekken van electrische stroomwervels.

Die verklaring volgende, zou men voor Batavia moeten besluiten tot het overtrekken van wervels, wier centrum ver van Batavia blijft, zoodat alleen de buitenste flauw gebogen stroomstukken voorbijgaan.

Als eerste benadering mag men dus aannemen, dat de extraterrestrische stroom te Batavia nagenoeg rechtlijnig is en, bij zijn wisselingen in sterkte, geringe schommelingen in richting uitvoert.

De gemiddelde richting moet $WSW - ENE$ zijn, want bijna zonder uitzondering is een versterking der N-component met een verzwakking der E-component gepaard, en is $\Delta X > \Delta Y$.

Die strooming vindt men inderdaad terug in het diagram der equipotentiaallijnen van de dagelijksche variatie volgens SCHUSTER-VON BEZOLD, [1]) welke equipotentiaallijnen bij eerste benadering de stroomlijnen volgen.

Ook voor de verklaring van het door mij gevonden verschijnsel der *aardmagnetische nastoring* was het voor de hand liggend om een, de aarde omcirkelende strooming aan te nemen, en ook deze strooming moest een dergelijke richting hebben als de boven vermelde, maar de hoek met den equator was te Batavia veel geringer, dan nu is gevonden.

Iedere veranderlijke extra-terrestrische strooming zal een intra-terrestrische induceeren en de aan de oppervlakte waargenomen magnetische variatie is de som van beider invloed. LAMB (zie de boven aangehaalde verhandeling van SCHUSTER over de dagelijksche variatie) bewijst dat de potentiaalverhouding van het primaire en secundaire veld complex is en dat derhalve verschil van phase bestaat. De horizontale component door de extraterrestrische strooming veroorzaakt loopt vóór bij die door de geinduceerde stroomen verwekt; derhalve zal de resulteerende component bij de extraterrestrische strooming achterloopen.

Door SCHUSTER is evenwel voor de verticale kracht geen phaseverschil gevonden, en door LAMB is er op gewezen, dat dit het gevolg kan zijn van toenemende electrische geleidbaarheid der aardlagen naar de diepte toe. De uitkomsten van de nieuwe seismologische waarnemingen wijzen op een ijzeren aardkern en derhalve op een zeer groote toeneming.

Waarschijnlijk mogen wij dus aannemen dat het phaseverschil zeer gering is; in elk geval is dat phaseverschil voor kortdurende variaties gering.

---

[1]) Sitz. Ber. der Berliner Akademie für 1895.

De waargenomen magnetische kracht bestaat uit een primair en een secundair gedeelte, die voor de horizontale component gelijk van teeken zijn.

De verhouding c' van het secundaire tot het primaire gedeelte stijgt met de frequentie der stroomschommeling.

Noemen we dus de magnetische kracht X, dan is

$$X = \text{primair} + \text{secundair}$$

$$X = \text{primair}\,(1 + c')$$

dus het primaire gedeelte of $X_0 = \frac{X}{1 + c'}$.

De extraterrestrische strooming, die wij $S = s \sin 2\pi \frac{t}{T}$ kunnen stellen, zal in de bovenste aardlagen een stroom S' induceeren:

$$S' = \varrho f(ST) \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

De inductie zal afhangen van den afstand, en deze laatste mogelijk van sterkte en schommelduur der strooming; bovendien van de geleidbaarheid ϱ der bovenste aardlagen.

De primaire magnetische kracht zal bij eerste benadering (daar de afstand ongeveer dezelfde is) op dezelfde wijze van de extraterrestrische strooming afhangen. Dus:

$$X_0 = f(sT) \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

en

$$X = (1 + c') f(sT) \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Daar het bestaan van een verticalen leidingstroom is bewezen, moeten we ook aannemen, dat een gedeelte van den extraterrestrischen stroom door de aarde wordt gesloten en dus een stroom gelijk gericht met den inductiestroom optreedt.

Reeds de eigenschappen der geleidbaarheid van den dampkring wijzen op een afhankelijkheid van grootte en duur van den extraterrestrischen stroom ook van de geleidbaarheid van de bovenste aardlagen.

Die strooming is dus te stellen op:

$$\varrho\psi(sT) \sin \pi \frac{t}{T}.$$

Hiermeê vinden wij dus voor de totale strooming:

$$A = \varrho \left[\frac{2\pi}{T} f(sT) \cos 2\pi \frac{t}{T} + \psi(sT) \sin 2\pi \frac{t}{T} \right]$$

of wel

$$A = \varrho \left[\psi^2 (sT) + \frac{4\pi^2}{T^2} f^2 (sT) \right]^{1/2} \sin \frac{2\pi}{T} \left(k + \frac{T}{2\pi} Bg\, tg \frac{f(sT)}{\psi(sT)} \frac{2\pi}{T} \right)$$

terwijl we boven vonden:

$$X = (1 + c') f(sT) \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Voor het phaseverschil vonden wij een constant gedeelte van T of wel:

$$\frac{T}{2\pi} Bg\, tg \frac{f(sT)}{\psi(sT)} \frac{2\pi}{T} = \frac{T}{K}$$

Voor hoeken van $\pm 23°$, als we voor Cheribon bij korter duur der schommeling vonden, mogen we hier bij benadering schrijven:

$$\frac{f(sT)}{\psi(sT)} = \frac{T}{K}$$

De amplitudeverhouding wordt dan:

$$\frac{A}{X} = \frac{\varrho}{1 + c'} \frac{\psi(sT)}{f(sT)} \left[1 + \frac{4\pi^2}{K^2} \right]^{1/2}$$

$$\frac{A}{X} = \frac{\varrho}{1 + c'} \frac{1}{T} \frac{1}{\sqrt{K^2 + 4\pi^2}} = C \frac{\varrho}{1 + c'} \frac{1}{T}$$

Voor $1 + c'$ vinden we volgens LAMB-SCHUSTER voor dat gedeelte van de potentiaal, dat volgens een bolfunctie van den 2^{den} graad te ontwikkelen is, (voor dat gedeelte, dat volgens bolfuncties van hooger graad is te ontwikkelen, is de toeneming sneller).

$\sigma = \frac{constante}{T}$	$1 + c'$
10	1.172
20	1.278
30	1.337
40	1.374
50	1.399
100	1.466
900	1.605
6400	1.643

Dus bij hoogere frequentie (voor halven schommelduur $= 1$ minuut is $\sigma = 7200$) is $\frac{1}{1 + c'}$ nagenoeg constant.

We krijgen dus $\frac{A}{X}$ evenredig met $\frac{1}{T}$.

De waarnemingen evenwel geven voor Cheribon en Anjer even-

redigheid met $\sqrt[8]{\frac{1}{T}}$ (bij nog kleinere T zelfs omkeer) en voor Semarang en Soerabaja evenredigheid met $\sqrt[4]{\frac{1}{T}}$.

AD. SCHMIDT (Met. Zeitsch. 1902 pg. 94) werpt de onderstelling op, dat de stroom in den draad alleen door inductie zou kunnen ontstaan, daarbij den draad door de aarde gesloten denkende.

Dan wordt, het geval zeer eenvoudig gesteld, door toepassing van den regel van AMPÈRE:

$$A_{E-W} = -\gamma \frac{dX}{dt} + \sigma \frac{d^2Z}{d\varphi\, dt}.$$

Dat maakt dus ten opzichte van het bovenstaande het onderscheid, dat de variatie Z in het spel komt.

De Z verandert evenwel in equatoriale streken weinig en kan onmogelijk de theorie met de waarnemingen in overeenstemming brengen.

De langzame toeneming van den aardstroom bij toeneming der frequentie wijst *niet* op inductie, maar eerder op direct verband met den primairen stroom.

De grootheid $\frac{1}{1+c}$ heeft inderdaad, vergeleken met $\frac{1}{T}$, zulk een langzaam verloop. Maar vanwaar dan het phase-verschil?

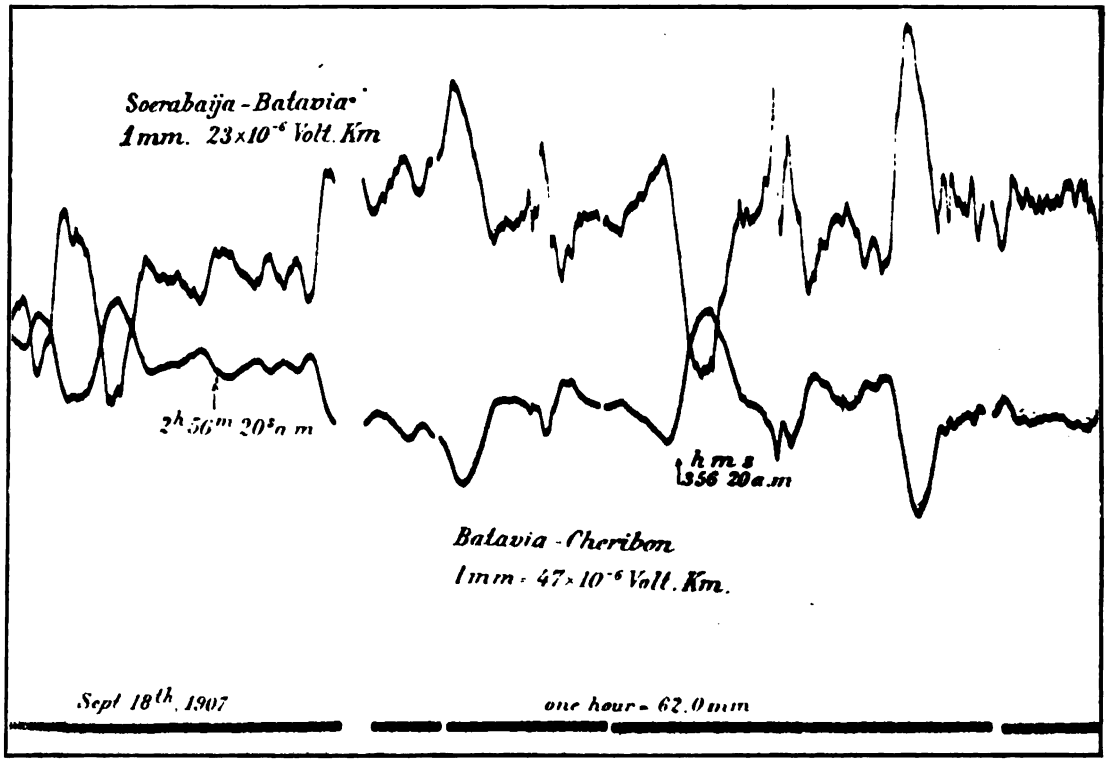
Dat phaseverschil is volgens SCHUSTER-LAMB juist afnemend voor snellere trillingen, terwijl het bij den aardstroom constant blijkt te zijn.

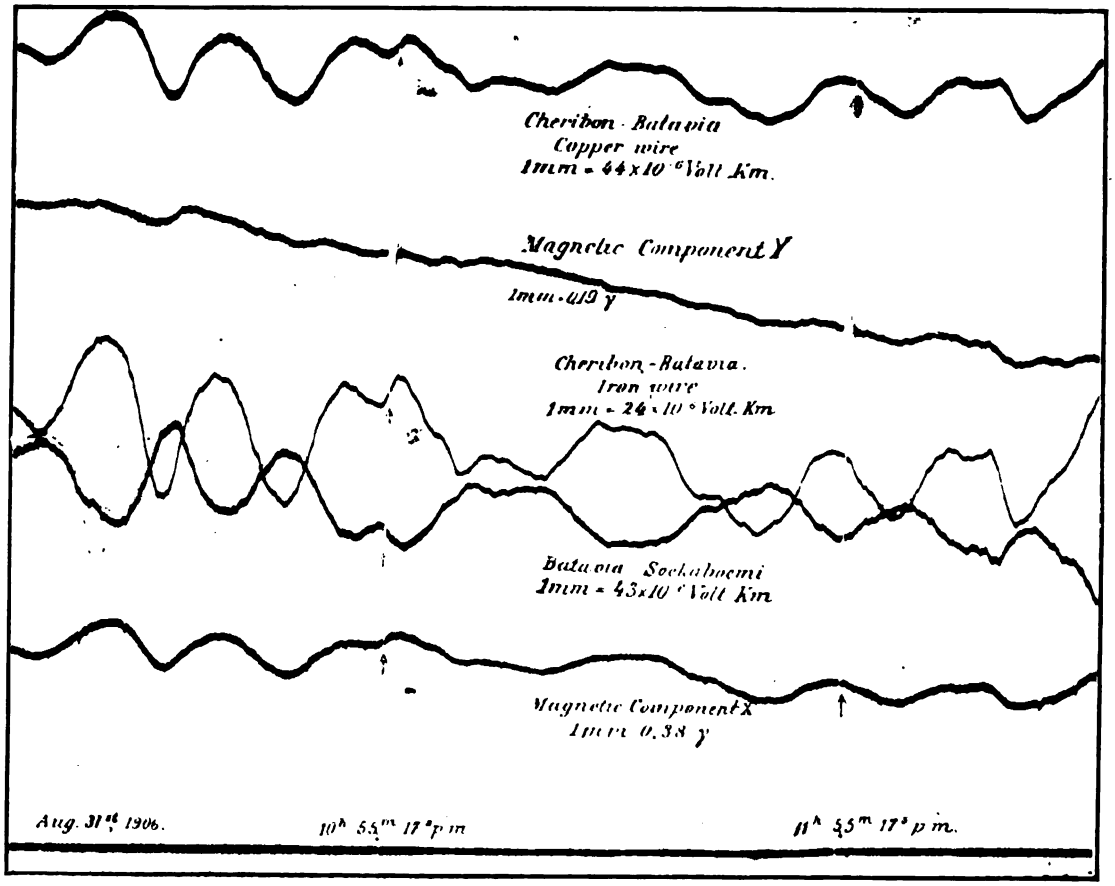
De verschillen in de sterkte en het phaseverschil van den aardstroom voor de lijnen naar Anjer, Cheribon, Billiton en Buitenzorg kunnen nog door verschil in geleidbaarheid van den bodem tusschen die plaatsen en Batavia verklaard worden.

Zoo ligt tusschen Anjer en Batavia de vulkaan Karang en is daarom die geleidbaarheid vermoedelijk grooter, dan tusschen Batavia en Cheribon en kan het feit, dat de aardstroom vier maal sterker is, daaraan worden toegeschreven.

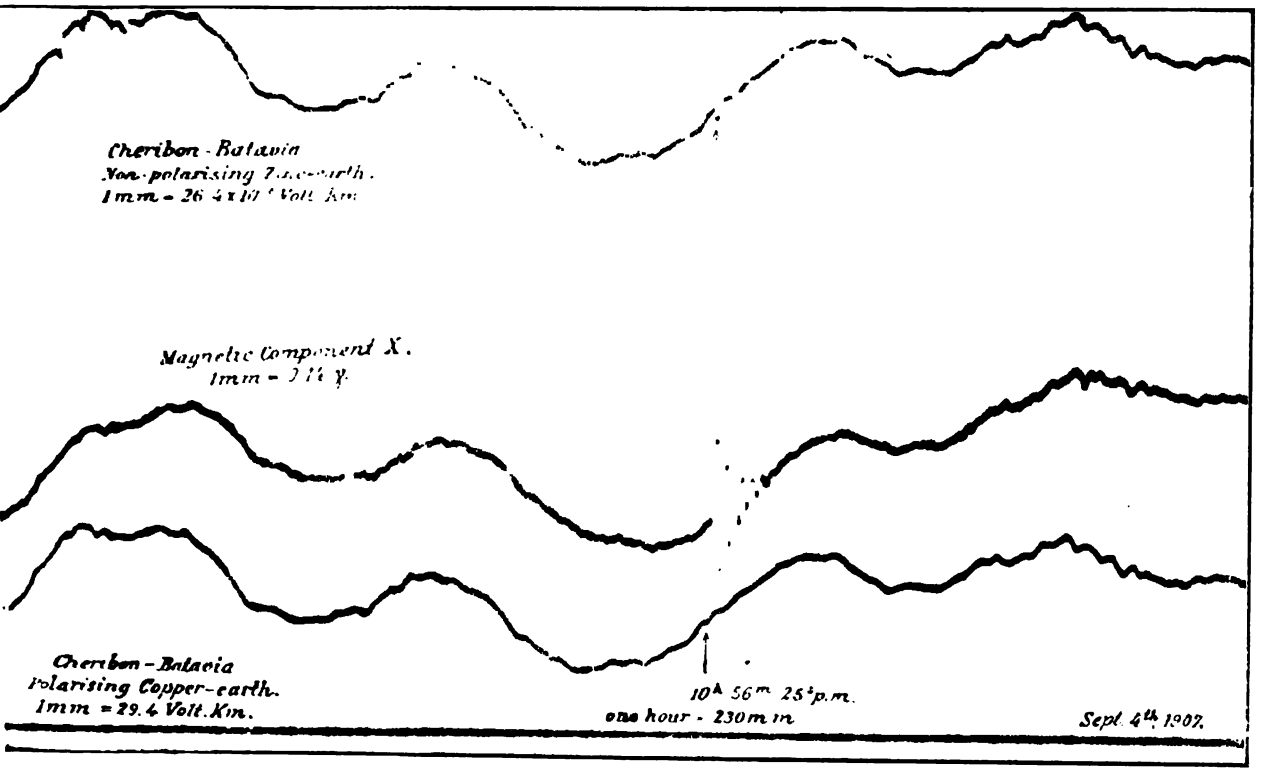
De groote sterkte van den aardstroom voor Buitenzorg—Batavia is misschien gedeeltelijk aan de zelfde oorzaak, en bovendien aan het hoogteverschil (280 M.) toe te schrijven; die tusschen Billiton en Batavia aan het goed geleidende zeewater.

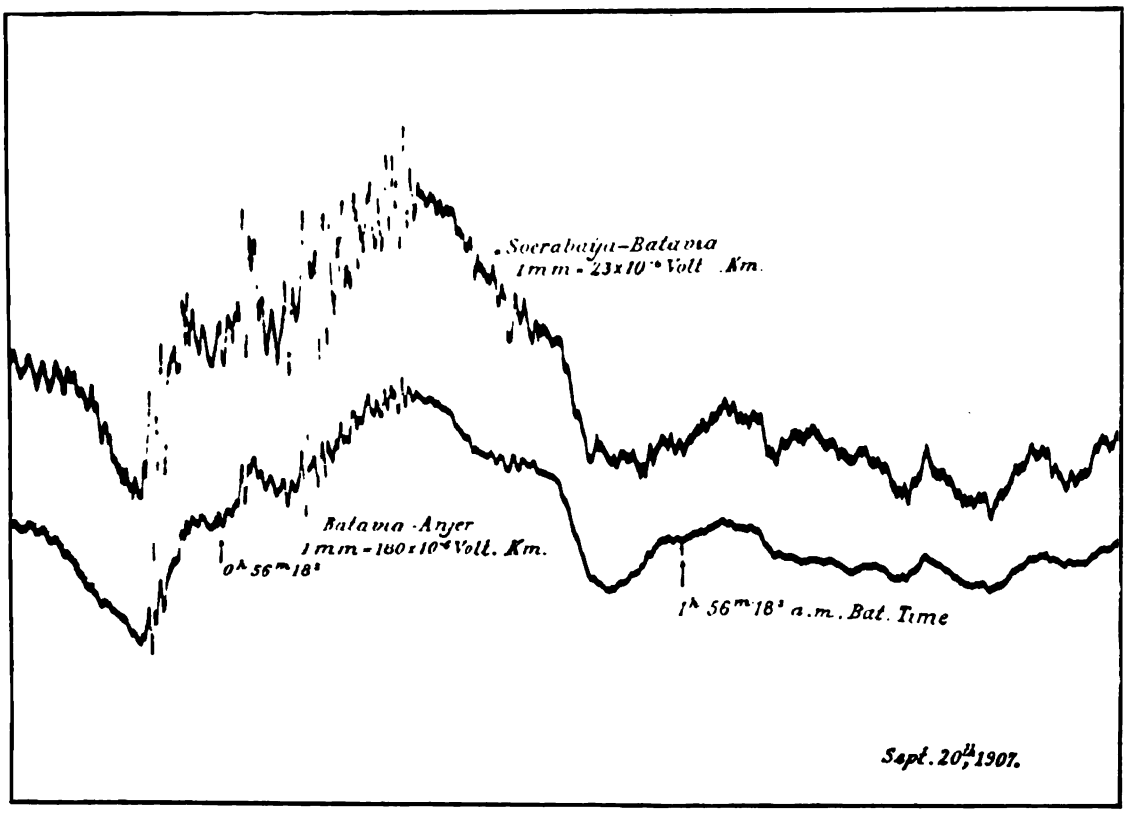
Voor de lijn Semarang—Batavia en Soerabaja—Batavia vinden wij evenwel voor de amplitudeverhouding een principieel onderscheid bij kortdurende oscillaties. Elke poging tot verklaring van het verband tusschen aardstroom en magnetische variatie zal ijdel zijn zoolang dit niet bevestigd en verklaard is.


Soerabaija - Batavia
1mm. 23×10⁻⁶ Volt. Km
2h 56m 20s p m
h m s
3 56 20 a.m
Batavia - Cheribon
1mm = 47×10⁻⁶ Volt. Km.
Sept 18th. 1907
one hour = 62.0 mm


Cheribon - Batavia
Copper wire
1mm = 44×10⁻⁶ Volt Km.
Magnetic Component Y
1mm = 419 γ
Cheribon - Batavia.
Iron wire
1mm = 24×10⁻⁶ Volt. Km.
Batavia Sockabumi
1mm = 43×10⁻⁶ Volt Km
Magnetic Component X
1mm = 0.38 γ
Aug. 31st 1906.
10h 55m 17s p m
11h 55m 17s p m.

chen aardstroom en aardmagnetische kracht."





Dit uit het isolatieverlies te verklaren is onmogelijk, daar het verschil zich dan voor de lijnen Anjer-Batavia (106 K. M.) en Cheribon-Batavia (200 K. M.) in mindere mate zou moeten vertoonen, wat niet het geval is.

Ook door onderlinge inductie der twee lijnen, die gedeeltelijk langs de zelfde telegraafpalen loopen, kan dit niet verklaard worden, daar die invloed juist omgekeerd zou werken.

Er is een omstandigheid, waardoor de lijnen naar Anjer en Cheribon sterk met die naar Semarang en Soerabaja verschillen: dat is de grootste diepte beneden het aardoppervlak, die de koorde tusschen die plaatsen en Batavia bereikt.

Die is voor	Batavia—Anjer	1	K. M.
	Batavia—Cheribon	3	,,
	Batavia—Semarang	14	,,
	Batavia—Soerabaja	37	,,

Wanneer dus de kortdurende variaties een stroom hoofdzakelijk in grootere diepte veroorzaken, waar de geleidbaarheid zeer veel anders dan aan de oppervlakte is, dan zou er een principieel onderscheid kunnen optreden. Het tegenovergestelde is echter eerder te verwachten.

Om dat principieele onderscheid nader te bevestigen, zal het noodig zijn te Semarang den stroom tusschen Cheribon-Semarang en Soerabaja-Semarang te registreeren.

Wordt daarvoor weder hetzelfde als voor Batavia-Cheribon en Batavia-Anjer gevonden, dan moet inderdaad de grootere toeneming der amplitude bij korten duur voor de lijnen Batavia-Semarang en Batavia-Soerabaja aan den grooteren afstand worden toegeschreven.

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan van den Heer J. A. BARRAU: *„Het analogon der Cf. van* KUMMER *in de ruimte van zeven afmetingen"*.

(Mede aangeboden door den Heer P. H. SCHOUTE).

§ 1. In eene vorige mededeeling werd eene methode aangegeven tot het ontwerpen der *Cff.* in ruimten van $(2^{\rho}-1)$ afmetingen, welke als analoga der *Cf.* van KUMMER kunnen worden beschouwd [1]).

[1]) Door eene aanhaling in HUDSON *Kummer's Quartic Surface* (p. 187) werd ik erop opmerkzaam gemaakt, dat deze *Cff.* langs geheel anderen weg reeds zijn verkregen door W. WIRTINGER *(Göttinger Nachrichten*, 1889 p. 474; *Monatshefte für Mathematik und Physik* I, p. 113; *Mathem. Annalen* 40, p. 74). In deze verhandelingen worden ook de varieteiten beschouwd, voor welke de elementen van zulk eene *Cf.* singulier zijn, op gelijke wijze als die der *Cf.* (16_6) voor het KUMMER'sche oppervlak.

In het volgende wordt de K^{VII} nader onderzocht, voornamelijk met het oog op de uit haar door weglating van bepaalde elementen verkrijgbare *Cff*. Hiertoe is het noodig voor haar een ander diagram op te stellen dan dat van 8 simplexen, hetwelk alleen de door weglating der elementen van 1, 2, 3, 4, 5, 6 simplexen ontstaande *Cff*. (56_{28}); (48_{28}); (40_{15}); (32_{16}); (24_{13}) en (16_{10}), alle (behalve de eerste) in verschillende typen, alsmede van *Cff*. (24_9) en (32_{12}), uitsluitend uit vullingen (8_3) opgebouwd, duidelijk vertoont.

§ 2. Indien men in de *Cf*. van KUMMER een punt en een daarmede niet incident vlak afzondert, wordt het overschietende 15-tal elementen elker soort verdeeld in een 6-tal, dat incideert met een der afgezonderde elementen, en een 9-tal. Elk der beide 6-tallen vormt met de 15 elementen der andere soort eene vrije *Cf*. $(6_5, 15_3)$ hetgeen niet anders zeggen wil dan dat elke der 15 verbindingsrechten der *Cf*-punten in één vlak nog een *Cf*-vlak draagt, en reciprook.

De twee 9-tallen elementen echter van beide soorten te samen vormen ééne *Cf*. (9_4), waarvan de samenhang identisch is met die der *Cf* (9_4) III der classificatie van MARTINETTI [2]).

Deze indeeling kan op $16 \times 10 = 160$ wijzen geschieden.

Evenzoo kan men uit de K^{VII} op $64 \times 36 = 2304$ wijzen een punt en eene daarmede niet incidente R_6 afzonderen, waardoor de 63 overige elementen elker soort verdeeld worden in een 28-tal, incident met het afgezonderde element der andere soort, en een overschietend 35-tal. De beide 28-tallen vormen te samen een schema (28_{12}); elk 28-tal met het 35-tal van andere soort een schema $(28_{15}, 35_{12})$: samenvoeging van (28_{12}) en $(28_{15}, 35_{12})$ levert een schema $(28_{27}, 63_{12})$; de beide 35-tallen te zamen vormen een schema (35_{16}).

Deze indeeling, uitgevoerd voor de beide elementen *A*1, is voorgesteld in de plaat, waar aan de elementen dezelfde notaties zijn toegekend als in het simplexen-diagram, waarvan ze eene vervorming is. Er behoeft slechts te worden verklaard, hoe de door de zwaardere lijnen aangewezen regelmatige samenstelling verkregen wordt.

§ 3. Beschouwen wij eerst het schema $(28_{27}, 63_{12})$ van punten (kolommen) en R_6 (rijen). Daar elk 12-tal punten op eene rij in twee verschillende *Cf*-R_6 ligt, ligt het in eene R_5, we kunnen dus de *Cf*. opvatten als te bestaan uit 28 punten en 63 R_5 in R_6; elke der 64 *Cf*-R_6 der K^{VII} bevat zulk eene *Cf*. (en reciprook).

Op eene wijze analoog aan die van § 6 der eerste mededeeling vindt men voor de volledige notatie van zulk eene *Cf*:

[2]) Atti della R. Accademia Peloritana XV.

	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
	28	**378**	**2016**	**5040**	**1008**	**63**
incid. met:						
R_0	—	2	3	4	6	12
R_1	27	—	3	6	15	66
R_2	216	16	—	4	20	160
R_3	720	80	10	—	15	240
R_4	216	40	10	3	—	32
R_5	27	11	5	3	2	—

Door projecteeren en snijden komen hieruit bijv. in R_3 eene *Cf.* $(378_{16}, 2016_3)$; eene $(2016_{10}, 5040_4)$ en eene $(5040_8, 1008_{15})$ van punten en rechten, in R_3 eene $(378_{80}, 5040_6)$ en eene $(2016_{10}, 1008_{20})$ van punten en vlakken.

Ofschoon nu het aantal *Cf*-punten $28 = 4 \times 7$ is, gelukt het niet uit de *Cf*-elementen vier simplexen S_6 te vormen: na afzondering van zulk een simplex (die op meerdere wijzen geschieden kan), kan men uit de overige (eveneens op meerdere wijzen) nog ten hoogste een schema S_5, vervolgens een S_4, S_3, S_2 en S_1 vormen, waarna van de (28_{12}) nog een element van elke soort, onderling niet-incident, over is, die we tot een „S_0" vereenigen. In de figuur zijn $S_3 + S_2 + S_1 + S_0$ tot een schema (10_6) te samen genomen, dat we door T aanduiden.

De rangschikking der 35 overige elementen volgt nu door regelmatig uitschrijven der combinaties 3 aan 3 van de zeven voor het S_6 gekozen punten; het blijkt, dat het totale diagram langs de hoofddiagonaal slechts schema's S of T bevat, terwijl daarbuiten een paar nieuwe vullingen optreden, waaronder wij een schema (10_4), complementair met T, opmerken.

Het is door samenvoeging dezer gedeeltelijke schema's, dat men een groot aantal in de totaalfiguur begrepen *Cff.*, verkrijgen kan, wij beperken ons tot de *gedwongen Cff.*, dat zijn zulke, waarvan elk element meer incidenties vertoont dan voldoende zijn om het te bepalen, en waarvan dus het bestaan uit meetkundig oogpunt merkwaardig is.

Van de *Cf.* $(28_{27}, 63_{12})$ in R_6 vormen blijkbaar de 28 punten met 28 R_5 eene duale *Cf.* (28_{12}), dezelfde punten met de 35 andere R_5 eene *Cf.* $(28_{15}, 35_{12})$.

Door weglating uit de (28_{12}) van een S_6 blijft eene (21_{10}) over;

door weglaten van S_6 en S_5 eene (15_8), welker schema *anallagmatisch* is: elk tweetal harer $Cf.$-R_8 heeft 4 $Cf.$-punten gemeen. Hetzelfde 15-tal punten vormt met 15 andere R_8 (namelijk $H1$ tot en met $B1$ uit het 35-tal) eene $Cf.$ (15_7), waarvan het schema het complementaire is van de anallagmatische (15_8).

Uit de $Cf.$ (35_{16}) ontstaat door weglating van S_4 eene $Cf.$ (30_{14}); van T eene $Cf.$ (25_{12}), van S_4 en T eene $Cf.$ (20_{10}); van twee verschillende T eene $Cf.$ (15_8), identisch met de reeds genoemde, hare punten liggen in eene R_6, de (35_{16}) heeft in elke der 28 andere $Cf.$-R_6 zulk eene (15_8).

Neemt men bij de $Cf.$ (30_{14}) een schema T uit de (28_{12}), dan ontstaat eene $Cf.$ (40_{18}).

De $Cf.$ (35_{18}) kan ook worden verkregen uit het simplexen-diagram der K^{VII}, het simplex A vervalt dan geheel, van elk der zeven andere verdwijnen drie elementen van elke soort. Het diagram (35_{16}) bestaat dan uit zeven schema's S_4 in de hoofddiagonaal, onderling verbonden door vullingen (5_2), welke alle degenereeren in (3_2) en (2_2). Door van deze S_4 er 1, 2, 3, 4 weg te laten, ontstaan $Cff.$ (30_{14}), (25_{12}), (20_{10}) en (15_8). De (30_{14}) is identisch met de reeds genoemde, de (15_8) echter is van ander type; niet anallagmatisch, hare punten liggen ook niet in éene R_6.

§ 5. In elke der door snijding van twee $Cf.$-R_6 gevormde R_8 der K^{VII} liggen 12 $Cf.$-punten, van welke 32 zestallen nog aan eene derde $Cf.$-R_6 gemeen zijn; zulk een zestal ligt dus in eene R_4, de 12 punten vormen met de 32 R_4 eene $Cf.$ $(12_{16}, 32_6)$.

Aan het diagram van zulk eene $Cf.$ kan men den volgenden vorm geven: (zie tabel p. 461).

Neemt men bijv. de Cf-R_8, gevormd door de snijding der Cf-R_6: $A1$ en $A2$, dan worden de 12 punten resp.:

$A3 = P1$	$B4 = Q1$
$A4 = P2$	$B3 = Q2$
$A5 = P3$	$C6 = Q3$
$A6 = P4$	$C5 = Q4$
$A7 = P5$	$H8 = Q5$
$A8 = P6$	$H7 = Q6$

De geheele $Cf.$ bestaat nu blijkbaar uit twee simplexen S_6: P en Q in Möbius-ligging, die samen het gedeelte (12_6) vormen, terwijl bovendien nog elk drietal hoekpunten van het eene simplex met de drie niet toegevoegde van het andere in éene R_4 liggen, m. a. w. elk zijvlak van het eene het niet toegevoegde van het andere snijdt.

Dit verband is voor het eerst in R_5 mogelijk, het analogon in R_8

P												Q
	2	3	4	5	6	1						
1		3	4	5	6		2					
1	2		4	5	6			3				
1	2	3		5	6				4			
1	2	3	4		6					5		
1	2	3	4	5							6	
1							2	3	4	5	6	
	2					1		3	4	5	6	
		3				1	2		4	5	6	
			4			1	2	3		5	6	
				5		1	2	3	4		6	
					6	1	2	3	4	5		
1	2	3							4	5	6	
1	2		4					3		5	6	
1	2			5				3	4		6	
1	2				6			3	4	5		
1		3	4				2			5	6	
1		3		5			2		4		6	
1		3			6		2		4	5		
1			4	5			2	3			6	
1			4		6		2	3		5		
1				5	6		2	3	4			
	2	3	4			1				5	6	
	2	3		5		1			4		6	
	2	3			6	1			4	5		
	2		4	5		1		3			6	
	2		4		6	1		3		5		
	2			5	6	1		3	4			
		3	4	5		1	2				6	
		3	4		6	1	2			5		
		3		5	6	1	2		4			
			4	5	6	1	2	3				

zou zijn: twee viervlakken in Möbius-ligging, waarbij elke ribbe van het eene de niet toegevoegde van het andere snijdt, van deze *Cf.* $(8_7, 14_4)$ laat zich wel het diagram ontwerpen, de uitvoering is echter evident onmogelijk.

Voor de volledige notatie der Cf $(12_{16}, 32_6)$ wordt gevonden:

	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4
	12	**60**	**160**	**240**	**32**
incid. met					
R_0	—	2	3	4	6
R_1	10	—	3	6	15
R_2	40	8	—	4	20
R_3	80	24	6	—	15
R_4	16	8	4	2	—

Door projecteeren en snijden ontstaan hieruit bijv. in R_2 eene *Cf.* $(60_8, 160_3)$ en eene *Cf.* $(160_6, 240_4)$ van punten en rechten; in R_3 eene *Cf.* $(60_{24}, 240_6)$ en eene *Cf.* $(160_4, 32_{20})$ van punten en vlakken.

§ 6. De punten van R_5 kunnen eenduidig worden toegevoegd aan de lineaire complexen der gewone ruimte van drie afmetingen, de R_4 worden dan tot lineaire systemen van ∞^4 dezer complexen, de *Cf.* $(12_{16}, 32_6)$ kan aldus in onze ruimte worden afgebeeld.

Het is echter mogelijk de 12 complexen gelijktijdig speciaal te nemen en ze als rechten op te vatten, de 32 R_4 worden dan tot lineaire complexen, welke elk een zestal der rechten bevatten, de *Cf.* $(12_{16}, 32_6)$ is dan verwezenlijkt in rechten en lineaire complexen onzer ruimte.

Men kan gemakkelijk lijn-coördinaten voor zulk een twaalftal rechten opgeven door van de punt-coördinaten der 12 punten een tweetal, bijv. X_7 en X_8, weg te laten en de zes overige aan de fundamentaal-betrekking:

$$X_1 X_6 + X_2 X_5 + X_3 X_4 = 0$$

te laten voldoen.

Zoo verkrijgt men bijv. de rechten:

$P1 = (c, -d, -a, 0, -g, h)$ $\quad$ $Q1 = (d, c, 0, -a, -h, -g)$

$P2 = (d, c, 0, -a, h, g)$ $\quad$ $Q2 = (c, -d, -a, 0, g, -h)$

$P3 = (0, -f, g, -h, -a, 0)$ $\quad$ $Q3 = (f, 0, h, g, 0, -a)$

$P4 = (f, 0, -h, -g, 0, -a)$ $\quad$ $Q4 = (0, -f, -g, h, -a, 0)$

$P5 = (g, -h, 0, f, c, -d)$ $\quad$ $Q4 = (h, g, -f, 0, d, c)$

$P6 = (h, g, f, 0, -d, -c)$ $\quad$ $Q6 = (g, -h, 0, -f, -c, d)$,

H
4
C
7
D
2
G
J
F
J
E
2
B
7

mits nog voldaan wordt aan :

$$ch + dg = af - gh = 0.$$

De bij dit eenvoudigheidshalve gekozen voorbeeld optredende bijzonderheid, dat de rechten onderling enkele incidenties vertoonen, gaat verloren door de coördinaten in R_5 eerst aan eene lineaire transformatie te onderwerpen.

Op dezelfde wijze kan men trouwens voor alle in ruimten van lager dimensietal aangeduide *Cff.* eene analytische bepaling formuleeren door de coördinaten hunner elementen uit die van de elementen der K^{VII} af te leiden.

Aardkunde. — De Heer WICHMANN biedt eene mededeeling aan van den Heer J. SCHMUTZER : *„Over de termen Schalie, Lei en Schist"*.

(Mede aangeboden door den Heer G. A. F. MOLENGRAAFF).

De indische mijningenieurs, van wie bijna uitsluitend de in het nederlandsch gestelde gesteentebeschrijvingen afkomstig zijn, hebben onder invloed der duitsche vakliteratuur de termen *schiefer* en *lei* in het algemeen met weinig onderscheid naast elkander gebruikt. Het ontbreken eener vaste geologische terminologie in onze taal is daaraan schuld ; een gemis, dat in den laatsten tijd ook door de Ned. Mijnbouwkundige Vereeniging, blijkens haar pogen om eene zoodanige onder toezicht van Prof. G. A. F. MOLENGRAAFF te scheppen, werd gevoeld. Dit opstel bedoelt eene bijdrage te leveren tot de oplossing van het reeds zoolang hangende vraagstuk, welke termen het meest geschikt zouden zijn om in het nederlandsch die gesteenten aan te duiden, welke in het duitsch als *Schiefer* in den ruimsten zin worden samengevat.

Het uitgangspunt vormt de overweging, dat het in 't belang der overzichtelijkheid is, verschillende begrippen ook door verschillende woorden weer te geven en bij eene keuze van termen — zoolang men te kiezen heeft — alles te vermijden wat aanleiding zou kunnen geven tot dubbelzinnigheid.

Aan de scherpe afbakening, welke in de natuur bestaat tusschen de relatief zwak gemetamorphoseerde, uitsluitend sedimentaire echte leien en de fijner of grover kristallijne, min of meer duidelijk gelaagde metamorphe gesteenten van deels sedimentairen, deels echter ook eruptieven oorsprong, wordt veel afbreuk gedaan door de toepassing van den term *lei* ook op deze laatste, zij het ook met de toevoeging „kristallijn".

Dit verklaart voor een deel hoe het woord *schiefer* in de nederlandsche terminologie zich eene, hoewel weinig vast omschreven, plaats kon veroveren; er was behoefte aan een woord met een anderen begripsinhoud. Met het woord *schiefer* [1]) deed men echter een ongelukkige keuze, daar dit, door eene plaats in te nemen naast het woord *lei*, in onze terminologie noodzakelijk een beperkter inhoud moest verkrijgen dan het in de taal, waaraan het werd ontleend, in verschillende combinaties bezit [2]). Daarvan is een scheeve toestand het gevolg geworden die niet te verbeteren is door het in onbruik geraakte *scheversteen* [3]) weer ingang te doen vinden, hetgeen wel eens beproefd is in den korteren vorm *schever* [4]). Juist om het gevaar voor begripsverwarring, dat er in de analogie met het duitsche stamverwante woord schuilt, lijkt dit woord minder geschikt. Het overeenkomstige engelsche *shiver*, dat zich in de mijnwerken gehandhaafd heeft in de beteekenis van „flake of stone, shale, slaty débris", [5]), komt als wetenschappelijke vakterm niet voor [6]) en zou als zoodanig naast *shale* en *slate* ook geen plaats kunnen vinden.

De oplossing van het vraagstuk wordt aanmerkelijk vereenvoudigd door de omstandigheid, dat het eng. *shale* met het in 't noordnederlandsch niet gebruikelijke *schalie* etymologisch identiek is. Terwijl het eng. *shale* als bijvorm van *scale* en *shell* rechtstreeks herleid kan worden tot het oud-engelsch *scale*, *schale*, [7]) is dit *schalie* gevormd uit het oud-fransch *escaille* (fr. *écaille*, ital. *scaglia*) dat echter op zijn beurt weer aan het germaansch is ontleend [8]). Waar nu deze beide woorden, zoowel in afstamming als in beteekenis ten nauwste samenhangen, kan het niet aan ernstige bedenking onderhevig zijn,

---

[1]) Reeds in de meeste nederlandsche woordenboeken binnengeslopen.

[2]) Zooals bekend, worden ook met het deensch-noorsch *skifer*, zweedsch *skiffer* het totaal der dungelaagde, plaatvormig al of niet volgens het afzettingsvlak splijtende, zoo ook de „schisteuze" gesteenten aangeduid.

[3]) Plantijn, cf. E. Verwijs en J. Verdam, Middelned. Woordb., IV, 336—337; VII, 224; J. u. W. Grimm, Deutsch Wörtb. IX, 1. sq. Bij Kiliaen komt *scheversteen* voor in de beteekenis van 1°. *schalie*, 2°. *sicamb.*, d. i. ongeveer kleefsch voor lat. *silex* (meded. v. Prof J. W. Muller).

[4]) Zie verder Kluge, Etym. Wörtb. d. deutsch. Spr. 337; Grimm, l. c., E. Müller, Etym. Wörtb. d. engl. Spr. II, 378.

[5]) Wright, Eng. Dial. Dict. V, 392.

[6]) Cf. Arch. Geikie, Text Boot of Geology, Jas. Geikie, Struct. a. Field Geology; Teall, British Petrography.

[7]) Müller, II. 365.

[8]) vgl. angelsaksisch *sċeālu*, putamen, gluma; gotisch *skalja*, „Ziegel, eigentlich wohl Schindel, Schuppenartiges", Kluge, 331; Franck, Etym. Woordb. d. ned. Taal, 827; Muller, II, 365; Kluge, 294, 351; Verwijs en Verdam, VII, 224; Grimm, VIII, 2060—2064.

parallel aan het eng. *shale:* „applied to all argillaceous strata.... which split up more or less perfectly in their line of bedding", [1]) den nederlandschen term *schalie* te plaatsen.

Prof. J. W. MULLER had de welwillendheid mij het volgende mede te deelen: [2]) „Voor zoover ik het vraagstuk kan doorgronden is het aldus geschapen met die twee woorden: vanouds is *lei* in Holland, Utrecht en de (noord- en zuid-) oostelijke gewesten (vgl. ook Lorelei, Erpeler Lei aan den Rijn, enz.), *schalie* daarentegen in de zuidwestelijke: (Vlaanderen, Zeeland en de Zuid-Hollandsche eilanden) het eenige woord geweest voor beide, thans door de geologen nader onderscheiden gesteenten. Nu wilt gij het noordoostelijke woord tot de eene, het zuidwestelijke tot de andere soort gaan beperken. Dat is natuurlijk iets willekeurigs, maar in eene wetenschappelijke terminologie heeft men dergelijke onvolksaardige, kunstmatige onderscheidingen noodig, en er is niets tegen; het Vlaamsche volk zal alles *schalie*, het Hollandsche alles *lei* blijven noemen en ook daar is niets tegen." Prof. G. A. F. MOLENGRAAFF was zoo goed, mij te schrijven, dat hij zich reeds op zijne colleges van den term *schalie* als aequivalent van het eng. *shale* bediende; [3]) een gelukkige omstandigheid, die niet alleen pleit voor het gewicht der aangevoerde gronden, maar er tevens krachtig toe zal bijdragen, dezen term ingang te doen vinden [4]).

Het eng. *slate* [5]) heeft betrekking op de kleigesteenten, die door eene metamorphose, waarbij de druk de overhand heeft gehad zonder dat daarmede elke chemische omzetting is uitgesloten, eene dunplatige splijting hebben verkregen, welke steeds evenwijdig is aan de as der synklinale of antiklinale vouwen van het terrein en daardoor met het oorspronkelijk afzettingsvlak de meest willekeurige hoeken kan maken [6]) („valsche gelaagdheid"). Het verdient aanbeveling, in over-

[1]) NICHOLSON bij WRIGHT, V, 348. ARCH. GEIKIE's definitie luidt (op. cit. 2d edit 1885, 164), *shale*, (synon. fr. *schiste*, d. *Schieferthon*), „clay that has assumed a thinly stratified or fissile structure," zie verd. JAS. GEIKIE, 62. Naast het fr. *argile schisteuse* kent het ital. *scisto argilloso* (argilloscisto) en *argilla scagliosa*, lett. kleischalie.

[2]) Brief van 24 Dec. '07.

[3]) 16 Dec. '07: voor klei- of andere gesteenten „met onduidelijke, min of meer schelpachtige gelaagdheid."

[4]) De term *schalie* werd door wijl. Prof. J. L. C. SCHROEDER V. D. KOLK gebezigd voor het eng. *crystalline schist*, maar wist zich in die beteekenis niet staande te houden.

[5]) Oud-eng. *slat*, *sclat*, *sklat*, oud-fr. *esclat*, fr. *éclat*; bij COTGRAVE: „*esclat*, a shiver, splinter, also a thin lath or shingle" cf. MÜLLER, II, 400—401.

[6]) JAS GEIKIE, op. cit. 76, 220, sq.; WRIGHT, 504; ARCH. GEIKIE, 125—126: „In England the term *slate* or *clay-slate* is given to argillaceous, not obviously crystalline rocks possessing this cleavage structure", syn. *argillaceous schist*, fr. *phyllite*, *phyllade*; *schiste ardoise*; d. *Thonschiefer*, *Thonglimmerschiefer*).

eenstemming met de oorspronkelijke [1]) en thans nog algemeen gangbare beteekenis van het woord, den term *lei* tot deze gesteenten te beperken, waarvan de daklei de meest bekende vertegenwoordiger is. Op grond van de gegeven definitie zou het genoemde affix dus, afgezien van de bekende rijnsche devonische leien, moeten worden toegekend aan het grootste deel der z.g. „Fleckschiefer," „Knotenthonschiefer," andalusiet-, stauroliet-, chiastolietleien, enz.

Met den eng. term *schist* [2]) worden zulke heterogene gesteenten bestempeld, dat het bestaan van dit woord naast *lei*, *slate*, volkomen gerechtvaardigd is. Niet alleen kan men bij *schist* denken aan de min of meer gelaagde randfacies van zuiver eruptieve gesteenten, welke vaak zonder scherpe grens in aanliggende gelaagde gesteenten van sedimentairen oorsprong overgaan, — het zij, dat deze eruptieve gesteenten in kleinere lakkolithen en gangen dan wel in uitgestrekte intrusie- of effusieplaten (zooals vele „trapps") voorkomen; — ook sedimentaire gesteenten kunnen door contact in „schists" veranderen, metamorphoseerende agentien in sterk gestoorde gebieden op groote schaal zonder onderscheid sedimentaire en eruptieve gesteenten in min of meer duidelijk, soms voortreffelijk gelaagde kristallijne gesteenten als gneis, oogengabbro, amphiboliet, enz. overvoeren. Al heeft de term *schist* in zijne verschillende nuanceeringen [3]), en vooral het daaruit afgeleide adjectief [4]), zich in de romaansche talen een veel ruimere beteekenis weten te verwerven, toch vindt het ook daar, door het gelijktijdig gebruik der aequivalenten van *lei* en *slate*, een beperktere toepassing dan *Schiefer* in het duitsch. In verband daarmede verdient het wellicht aanbeveling naar engelsch voorbeeld in het bijzonder, ook in het nederlandsch de *„krystalline Schiefer"* met den aan het grieksch ontleenden term *schist* (mv. *schisten*) aan te duiden, en zich met de toepassing van het afgeleide adj. *schisteus* en het subst. *schistositeit* uitsluitend te beperken tot deze klasse van metamorphe gesteenten.

Terwijl ik, ten slotte, Prof. J. W. Muller mijne bijzondere

[1]) Plantijn, „schalie, leye oft scheversteen", une ardoise, ardosia, scandula, cf. Verwijs en Verdam, IV, 336-337; VII, 224, waarnaast de beteekenis „rots, leisteen", stond (vgl. ook „een leye der scandalisieringhe"); oudsaks. *leia*, rots, cf. Franck, 558; Kluge, 243. Het middelned. kende het woord bepaaldelijk in de beteekenis van leisteen of lei voor daken gebruikt, Verwijs en Verdam, IV, l. c.

[2]) van σχίζω, splijten, scheiden, klieven, splitsen, deelen, verdeelen; adj. verb. σχιστός; Arch. Geikie, 124: „a rock possessing this crystalline arrangement into seperate folia is in English termed a „schist". Naar Prof. Molengraaff mij l. c. mededeelt, werd ook deze term door hem reeds gebruikt

[3]) sp. ook *pizarra cristalina*.

[4]) dat met d. *schiefrig*, de. no. *skifrig*, zwe. *skiffrig* samenvalt.

erkentelijkheid betuig voor de zoo welwillend geleverde bijdragen en voor eenige waardevolle wenken, moet ik ook Prof. A. WICHMANN en Prof. G. A. F. MOLENGRAAFF mijn hartelijken dank uitspreken voor de levendige belangstelling en den steun, die ik van hun zijde mocht ondervinden.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt een mededeeling aan: *„Over de doorsnee van het maatpolytoop M_n der ruimte R_n met een centrale ruimte R_{n-1} loodrecht op een diagonaal.*

We bepalen de bedoelde doorsnee op drie verschillende wijzen:

1°. door middel van de projectie van M_n op de diagonaal,

2°. met behulp van de projectie van M_n op een vlak door twee de diagonaal snijdende overstaande ribben,

3°. door beschouwing van regelmatige simplexen.

I. *De projectie van M_n op een diagonaal.*

1. Men bewijst gemakkelijk, zoowel analytisch als synthetisch, de volgende stelling:

„De hoekpunten van het maatpolytoop M_n projecteeren zich op „een diagonaal in $n+1$ punten, n.l. in de uiteinden der diagonaal „en in de $n-1$ punten, die deze in n gelijke deelen verdeelen; in „deze $n+1$ punten projecteeren zich achtereenvolgens

$$1, n, \tfrac{1}{2}n(n-1), \ldots . \tfrac{1}{2}n(n-1), n, 1$$

„punten, waarbij deze getallen de coëfficienten der termen van $(a+b)^n$ „zijn".

Uit deze algemeene stelling volgen de voor $n = 4, 5, 6, 7, 8$ in de bijgevoegde diagrammen (zie de uitslaande plaat) neergelegde resultaten. Uitlegging van de bij $n = 4$ behoorende schets zal ook de overige voldoende verklaren.

De horizontale lijnen dezer figuur stellen steeds dezelfde diagonaal voor, waarop geprojecteerd wordt; op deze tien lijnen zijn achtereenvolgens de projecties van hoekpunten, ribben, zijvlakken, grenslichamen aangegeven. Ten einde plaats voor de cijfers te vinden, die de aantallen aangeven, zijn de dikke projectiestrepen — waar dit noodig is — afgebroken.

Duiden we de vijf punten op de diagonaal door a, b, c, d, e, aan — zie de onderste der tien horizontale lijnen —, dan projecteeren zich daar ter plaatse — zie de bovenste der tien lijnen — 1, 4, 6, 4, 1 hoekpunten — denk aan $(1+1)^4$.

Op de vier gelijke segmenten ab, bc, cd, de projecteeren zich achtereenvolgens 4, 12, 12, 4 ribben — denk aan $4(1+1)^3$.

Evenzoo zijn de drie gelijke segmenten ac, bd, ce achtereenvolgens de projecties van 6, 12, 6 zijvlakken — denk aan $6(1+1)^2$.

Eindelijk projecteeren zich op de twee gelijke segmenten ad, be achtereenvolgens 4, 4 grenslichamen — denk aan $4(1+1)$.

Gemakkelijk leidt men hieruit de in de overige figuren neergelegde resultaten voor $n = 5, 6, 7, 8$ af, als men nog bedenkt, dat de coëfficienten, waarmee $(1+1)^4$, $(1+1)^3$, $(1+1)^2$, $(1+1)$ vermenigvuldigd worden, 1, 4, 6, 4 zijn en dus door toevoeging van de eenheid op het eind in een herhaling van $(1+1)^4$ overgaan.

2. Meer algemeen geldt de volgende stelling, die de voorgaande omvat:

„De hoekpunten van elke begrenzende M_p van M_n $(p \leq n)$ projec-
„teeren zich op de diagonaal van M_n in $p+1$ opvolgende deelpunten
„dier diagonaal; daarbij zijn de projecties weer volgens de coëffi-
„cienten 1, p, $\frac{1}{2}p(p-1)$, ... van $(a+b)^p$ over deze $p+1$ achter-
„eenvolgende punten verdeeld."

De hoekpunten van een begrenzend vierkant projecteeren zich in drie der $n+1$ deelpunten, wat noodzakelijk de verdeeling 1, 2, 1 meebrengt. De hoekpunten van een begrenzenden kubus projecteeren zich in vier der $n+1$ deelpunten, wat — nu door het voorgaande de verdeeling 2, 2, 2, 2 uitgesloten is — noodzakelijk tot de verdeeling 1, 3, 3, 1 voert, enz.

Hieruit volgt dan verder onmiddellijk de nieuwe stelling:

„De doorsnee van een ruimte R_{n-1} loodrecht op de diagonaal van
„M_n, die projectie-as is, met de ruimte R_p, die een begrenzende
„M_p van M_n draagt, is een R_{p-1} in R_p loodrecht op de diagonaal
„van M_p, die de twee hoekpunten van M_p verbindt, welke zich in
„de uiteinden der projectie van M_p projecteeren." [1])

Doch er is meer. Als $p'(M_p)$ de doorsnee voorstelt van een maatpolytoop M_p met een ruimte R_{p-1} van zijn ruimte R_p loodrecht op

---

[1]) De bedoelde diagonaal d_p van M_p is de projectie van de projectie-as d op de ruimte R_p van M_p; dus kan men de projecties der hoekpunten van M_p op d verkrijgen door deze hoekpunten eerst in R_p op d_p en daarna de daardoor op d_p verkregen punten op d te projecteeren.

Wijl d_p en d in de ribbe van M_n als eenheid door $\vdash p$ en $\vdash n$ worden voorgesteld en d_p zich op d projecteert als $\frac{p}{n}$ van d, is de cosinus van den hoek tusschen d en R_p gelijk aan $\frac{1}{n} \vdash np$.

een zijner diagonalen in een punt, waarvan de afstand tot het midden der diagonaal in de diagonaal als eenheid $\frac{1}{2} - p'$ bedraagt, waaruit $p' < \frac{1}{2}$ blijkt te zijn, dan gelden de beide stellingen:

„Voor even n wordt een begrenzend maatpolytoop M_p van M_n „door de centrale ruimte R_{n-1} loodrecht op de diagonaal van M_n „gesneden volgens een $\frac{a}{p}(M_p)$, waarbij a naar omstandigheden voor „even p een der $\frac{p}{2}$ waarden $1, 2, \ldots \frac{p}{2}$, voor oneven p een der „$\frac{p-1}{2}$ waarden $1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}$ aannemen kan."

„Voor oneven n wordt M_p onder dezelfde omstandigheden gesneden „volgens een $\frac{2a-1}{2p}(M_p)$, waarbij a voor even p een der $\frac{p}{2}$ waar„den $1, 2, \ldots \frac{p}{2}$, voor oneven p een der $\frac{p+1}{2}$ waarden $1, 2, \ldots \frac{p+1}{2}$ „aannemen kan."

We zullen thans — in stede van ons verder in algemeenheden te verliezen — ter verduidelijking van het bovenstaande de uitkomsten voor de gevallen $n = 4, 5, 6, 7, 8$ der diagrammen volledig opgeven. Ten einde gemakkelijk maatverhoudingen te kunnen aangeven onderstellen we daarbij, dat de ribbe van M_n als eenheid van lengte is aangenomen.

3. Geval $n = 4$. De ruimte, die — zie het eerste diagram — in het midden c der diagonaal ae loodrecht op deze diagonaal staat, bevat de zes hoekpunten van M_4, die zich in c projecteeren, en snijdt — zie regel 3 en 4 — geen ribbe; dus heeft de doorsnee zes hoekpunten. Dezelfde ruimte snijdt twaalf zijvlakken — zie regel 7 — volgens $\frac{1}{2}(M_3)$ en acht grenslichamen — zie regel 9 en 10 — volgens $\frac{1}{3}(M_3)$; dus heeft de doorsnee twaalf ribben met een lengte $1/2$ en acht gelijkzijdige driehoeken tot zijvlakken. De doorsnee is dus een $(6, 12, 8)$ en wel het regelmatig achtvlak met ribben $1/2$.

Geval $n = 5$. Men vindt — zie het tweede diagram — 30 nu door snijding van ribben ontstane hoekpunten, 60 ribben, 40 zijvlak-

ken en 10 grenslichamen, dus een (30, 60, 40, 10). De hoekpunten zijn gelijksoortig, de ribben hebben als $\frac{1}{4}(M_3)$ de lengte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. De 40 zijvlakken bestaan uit twintig $\frac{1}{2}(M_3)$ en tweemaal tien $\frac{1}{6}(M_3)$, d. i. uit 20 zeshoeken en 20 driehoeken, beide regelmatig[1]) met zijden $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Elk der tien grenslichamen is als $\frac{3}{8}(M_4)$ — vergelijk in het eerste diagram de doorsnee met een ruimte loodrecht op *ae* in het punt midden tusschen *c* en *d* gelegen — een (12, 18, 8) begrensd door vier $\frac{1}{2}(M_3)$ en vier $\frac{1}{6}(M_3)$, d. i. door vier der zeshoeken en vier der driehoeken, en dus een regelmatig aan de hoekpunten afgeknot viervlak, d. i. het eerste der gelijkhoekpuntige, halfregelmatige (Archimedische) lichamen.

Geval $n = 6$. Uit het derde der diagrammen leest men af, dat de doorsnee een (20, 90, 120, 60, 12) is. Alle ribben hebben een lengte $\sqrt{2}$, alle zijvlakken zijn driehoeken. De grenslichamen zijn voor de eene helft (30) als $\frac{1}{2}(M_4)$ achtvlakken, voor de andere helft (15 + 15) als $\frac{1}{4}(M_4)$ viervlakken. De 12 grenspolytopen zijn als $\frac{2}{5}(M_5)$ — vergelijk nu weer het tweede diagram — polytopen (10, 30, 30, 10) begrensd door vijf der achtvlakken en vijf der viervlakken, welke beschouwd kunnen worden als tot op de helft der ribben aan de hoekpunten afgeknotte regelmatige vijfcellen, die door deze afknotting al de oorspronkelijke ribben verloren hebben.

Geval $n = 7$. We vinden een (140, 420, 490, 280, 84, 14). De lengte der ribben is $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. De 490 zijvlakken bestaan uit 210 zeshoeken en 280 driehoeken, de 280 grenslichamen uit 210 afgeknotte viervlakken en 70 viervlakken, de 84 vierdimensionale grenspolytopen uit 42 polytopen $\frac{1}{2}(M_5) = (30, 60, 40, 10)$ reeds onder $n = 5$ gevonden en 42 polytopen $\frac{3}{10}(M_5) = (20, 40, 30, 10)$ begrensd door vijf

[1]) Waar de regelmatigheid uit zich zelf in het oog springt — zooals bijv. bij de driehoeken door de gelijke lengte van alle ribben, enz. —, wordt de bijvoeging „gelijkzijdig" of „regelmatig" verder weggelaten.

afgeknotte viervlakken en vijf viervlakken — tot op een derde der ribben aan de hoekpunten afgeknotte regelmatige vijfcellen. De 14 vijfdimensionale grenspolytopen zijn polytopen (60, 150, 140, 60, 12), als $\frac{5}{12}(M_6)$, begrensd door zes (30, 60, 40, 10) en zes (20, 40, 30, 10,.

Geval $n = 8$. Hier is (70, 560, 1120, 980, 448, 112, 16) de uitkomst. De ribbenlengte is $1/2$, alle zijvlakken zijn driehoeken. De 980 grenslichamen bestaan uit 420 achtvlakken en 560 viervlakken, de 448 vierdimensionale grenspolytopen uit 336 polytopen $\frac{2}{5}(M_5)$ en 112 polytopen $\frac{1}{5}(M_5)$, d. i. uit 336 der reeds onder $n = 6$ gevonden tot op de helft der ribben afgeknotte vijfcellen en 112 vijfcellen. De 112 vijfdimensionale grenspolytopen zijn voor de eene helft $\frac{1}{2}(M_6) = (20, 90, 120, 60, 12)$ reeds boven gevonden, voor de andere helft $\frac{1}{3}(M_6) = (15, 60, 80, 45, 12)$ begrensd door zes tot op de helft der ribben afgeknotte vijfcellen en zes vijfcellen. Eindelijk zijn de 16 zesdimensionale grenspolytopen als $\frac{3}{7}(M_7)$ polytopen (35, 210, 350, 245, 54, 84) begrensd door zeven (20, 90, 120, 60, 12) en zeven (15, 60, 80, 45, 12). [1]).

Uit dit alles leidt men nu gemakkelijk de volgende algemeene wetten af:

„De hoekpunten der doorsnee zijn voor even n hoekpunten, voor oneven n middens van ribben van M_n; ze zijn steeds onderling gelijksoortig [2])."

„De gemeenschappelijke lengte der ribben is $1/2$ voor even n en $\frac{1}{2}1/2$ voor oneven n; ze zijn steeds onderling gelijksoortig [3])."

---

[1]) Waren we bij de opsomming der uitkomsten in dien zin omgekeerd te werk gegaan, dat we bij elke nieuwe waarde van n van de grenspolytopen met het grootste aantal afmetingen tot de hoekpunten afgedaald waren, dan zouden we een meetkundige variant van het bekende kinderboekje: „het huis van Adriaan" geleverd hebben. Doch echter met twee verschillen. Bij het afdalen van telkens een tree hooger van de ladder doorloopen we *om den anderen* weer dezelfde stadia en de ladder is een Jacobsladder met oneindig veel treden.

[2]) Dit wil zeggen, dat er in elk hoekpunt evenveel ribben op dezelfde wijs samenkomen, enz.

[3]) Schijnbaar maken de gevallen $n =$ oneven hierop een uitzondering, wijl bij de afgeknotte viervlakken twee soorten van ribben voorkomen n.l. doorsneden van twee zeshoekige vlakken en doorsneden van een zeshoekig en een driehoekig zijvlak. Dit is echter maar schijn. Want voor elke ribbe is in de doorsnee zelf steeds weer het aantal er doorgaande zijvlakken van elk der beide soorten standvastig, zoo bij $n = 5$ twee zeshoekige zijvlakken en een driehoekig.

„De zijvlakken zijn driehoeken voor even n, zeshoeken en (kleinere) driehoeken [1]) voor oneven n."

„De grenslichamen zijn achtvlakken en viervlakken voor even n, afgeknotte viervlakken en (kleinere) viervlakken voor oneven n".

„De vierdimensionale grenspolyeders zijn tot op de helft der ribben afgeknotte vijfcellen en vijfcellen voor even n, tot op een derde der ribben afgeknotte vijfcellen en (kleinere) vijfcellen voor oneven n."

Enz., enz. [2]).

Bovenstaande uitkomsten zijn grootendeels begrepen in de algemeene stellingen boven gegeven.

II. *De projectie van M_n op een vlak door twee de diagonaal snijdende overstaande ribben.*

4. Voor elke waarde van n is de bedoelde projectie — zie fig. 1 voor $n = 8$ en $n = 9$ — een rechthoek $PQQ'P'$ met de

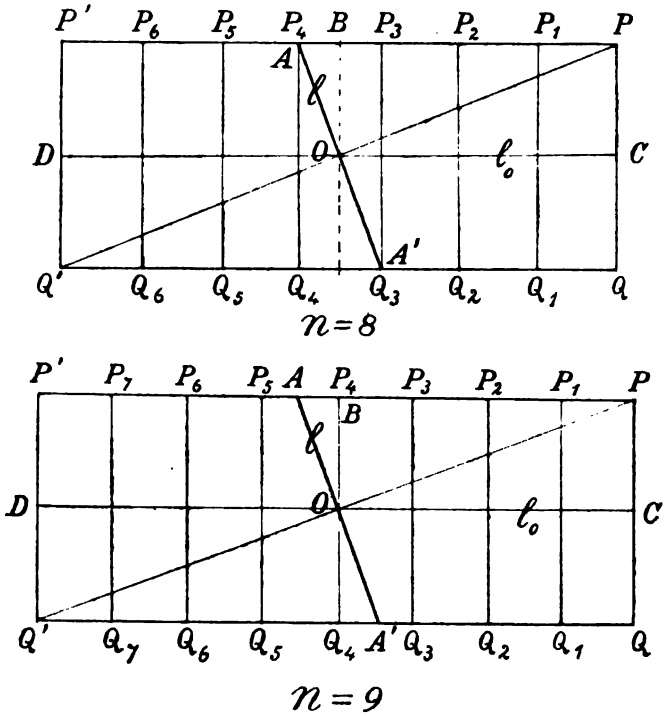


Fig. 1.

[1]) We vermelden hier niet, dat bij $n = 3$ alleen een zeshoek optreedt. Evenmin dat bij de grenslichamen de viervlakken zich voor $n = 4$ nog niet voordoen, enz.

[2]) We breken hier af, omdat eerst in het derde hoofdstuk aangewezen wordt, dat alles wat bij de doorsneden optreedt als simplex of afgeknot simplex kan beschouwd worden.

Opzettelijk wordt het symbool aangevende de aantallen hoekpunten, ribben, zijvlakken, enz. voor willekeurige n weggelaten, omdat de vorm ervan vrij samengesteld is.

zijden 1 en $\sqrt{n-1}$, die door $n-2$ lijnen P_1Q_1, P_2Q_2, . . . $P_{n-2}Q_{n-2}$ evenwijdig aan de kortere zijden PQ, $P'Q'$ in $n-1$ gelijke rechthoeken verdeeld is[1]). De diagonaal, waarop de snijdende ruimte R_{n-1} loodrecht staat, is een der diagonalen van den rechthoek, bijv. PQ'. Snijdt de loodlijn in het midden O van PQ' op deze lijn opgericht, die de projectie van de snijdende ruimte R_{n-1} voorstelt, de zijde PP' in A, dan valt dit punt A steeds op een afstand $\frac{1}{2\sqrt{n-1}}$ van het midden B van PP'. Want in den rechthoekigen driehoek AOP is B het voetpunt der loodlijn uit O op AB neergelaten en hieruit volgt $AB \cdot BP = OB^2$ en dus $AB = \frac{1}{4} : \frac{1}{2}\sqrt{n-1}$. Dus valt A voor even n met het deelpunt $P_{\frac{n}{2}}$ samen en ligt dit punt voor oneven n midden tusschen $P_{\frac{n-1}{2}}$ en $P_{\frac{n+1}{2}}$. Hieruit blijkt dan weer opnieuw, dat de hoekpunten der doorsnee hoekpunten zijn van M_n voor even n en middens van ribben van M_n voor oneven n.

In de zooeven aangehaalde verhandeling, die zich tot het geval $n = 4$ beperkt, is in een noot aangewezen, hoe men de hier beschouwde doorsnee als een aan beide zijden afgeknot „rhombotoop" beschouwen kan; de daar gevolgde gedachtengang is deze. Denkt men zich in de richting van de ribben PQ, $P'Q'$ naar weerskanten een oneindig aantal maatpolytopen M_n op elkaar gestapeld en verwijdert men daarna de zich op PP', QQ' en lijnen evenwijdig aan deze projecteerende maatpolytopen M_{n-1}, waarmee de opvolgende polytopen M_n aan elkaar grenzen, dan ontstaat er een prisma met M_{n-1} tot loodrechte doorsnee. Als dit prisma gesneden wordt door een ruimte R_{n-1}, die zich volgens de loodlijn l_0 uit O op PQ neergelaten projecteert, dan is de doorsnee dus een M_{n-1}. Welke verandering ondergaat deze doorsnee M_{n-1} van het prisma, als men de zich volgens l_0 projecteerende snijruimte vervangt door een andere, welke zich projecteert volgens een lijn l_φ door O, die met l_0 een hoek φ insluit? Zoo als gemakkelijk uit de figuur blijkt, bestaat deze verandering in een gelijkmatige vergrooting der loodlijnen uit de begrenzing van M_{n-1} neergelaten op de ruimte R_{n-2}, die zich in O projecteert, welke vergrooting op een vermenigvuldiging dier loodlijnen met $\sec\varphi$ neerkomt en dus als een *uitrekking* in de richting van de diagonaal CD kan worden beschouwd. Even als zulk een uitrekking

[1]) Men vergelijke de verhandeling "On the sections of a block of eightcells, etc." (Verhandelingen der K. A. v. W., deel IX N°. 7).

voor $n = 4$, waarbij M_{n-1} een kubus wordt, van den kubus een rhomboëder maakt, ontstaat in het algemeen uit M_{n-1} wat wij een rhombotoop noemen. Even als het rhomboëder als geheel beschouwd in zich zelf overgaat als het 120° om de as gedraaid wordt, of — anders gezegd — even als de as van het rhomboëder een periode drie heeft, heeft de as van het bedoelde rhombotoop een periode $n-1$. Denken we ons nu dit rhombotoop voor het bepaalde geval, dat de projectie der snijdende ruimte R_{n-1} — en dus ook de projectie van het rhombotoop zelf — langs OA valt, en stompen we dit af door de twee ruimten R_{n-2}, die in de uiteinden A, A' van het binnen den rechthoek $PP'Q'Q$ gelegen segment AA' dier projectie loodrecht op het projectievlak staan en de as van het rhombotoop dus loodrecht snijden, dan ontstaat de gevraagde doorsnee, die we naar het aantal harer afmetingen door D_{n-1} zullen aanduiden. We bepalen aanstonds de aslengte van het onafgestompte rhombotoop en van D_{n-1}, doch leiden alvorens eenige algemeene stellingen af, die nu voor het grijpen liggen.

5. De ribben van M_n projecteeren zich op het aangenomen vlak òf langs een der n lijnen $PQ, P_1Q_1, P_2Q_2, \ldots P_{n-2}Q_{n-2}, P'Q'$, òf als deelen van PP' of QQ'. Wijl nu de hoekpunten van D_{n-1} hoekpunten van M_n of snijpunten met ribben van M_n moeten zijn, projecteeren deze punten zich — vergelijk fig. 1 voor $n = 8$ en $n = 9$ — voor even n uitsluitend in de uiteinden A, A', voor oneven n uitsluitend in die uiteinden en in het midden O.

Hieruit volgt voor $n = 2n'$ de algemeene stelling:

„De doorsnee $D_{2n'-1}$ van $M_{2n'}$ is een $2n' - 1$-dimensionaal prismoïde met betrekking tot elk paar overstaande grensruimten $R_{2n'-2}$ en dus op $2n'$ wijzen."

Ziehier nog twee stellingen, die voor willekeurige n gelden:

„Elke lijn door het middelpunt O loodrecht op twee overstaande grensruimten R_{n-2} aangebracht is as van D_{n-1} met de periode $n-1$."

„Elke ruimte R_{n-2} door O evenwijdig aan een grensruimte R_{n-2} aangebracht verdeelt D_{n-1} in twee congruente $n-1$-dimensionale prismoïden."

Bij deze drie stellingen speelt de volkomen gelijkwaardigheid van een paar overstaande grensruimten R_{n-2} met elk ander paar een hoofdrol, terwijl de derde ons doet vragen, hoe de ruimte R_{n-2} door het middelpunt evenwijdig aan een grensruimte aangebracht D_{n-1} snijdt. We bewijzen als volgt, dat deze doorsnee een D_{n-2} is.

Draait de projectie l der snijdende ruimte R_{n-1} om O, dan blijft de in O op het projectievlak loodrecht staande ruimte $R_{n-2}^{(0)}$ op haar

plaats en beschrijft R_{n-1} dus een bundel met deze $R_n^{(0)}{}_{-2}$ tot asruimte. Daarbij blijft dan de veranderende doorsnee steeds gaan door de doorsnee van $R_{n-2}^{(0)}$ met M_n. We kunnen het karakter dezer doorsnee van $n-2$ afmetingen gemakkelijk leeren kennen door beschouwing van het geval, waarin l langs l_0 valt. Dan is onze D_{n-1} een M_{n-1} en dit zich langs l_0 projecteerend maatpolytoop wordt door de ruimte $R_{n-2}^{(0)}$, die in O loodrecht staat op het projectievlak en derhalve de diagonaal CD van dit M_{n-1} loodrecht middendoordeelt, volgens een D_{n-2} gesneden. Deze D_{n-2} nu is de doorsnee van D_{n-1} met de ruimte $R_{n-2}^{(0)}$ door O evenwijdig aan de ruimten R_{n-2}, die in A en A' loodrecht op de as staan en het rhombotoop afstompen. We vinden dus:

„Elke ruimte $R_{n-2}^{(0)}$ door het middelpunt O evenwijdig aan een grensruimte R_{n-2} snijdt D_{n-1} volgens een D_{n-2}, waarvan O weer het middelpunt is."

Hieruit volgt dan weer meer algemeen:

„Elke ruimte $R_p^{(0)}$ $(0 < p < n-1)$ door het middelpunt O evenwijdig aan een grensruimte R_p snijdt D_n volgens een D_{p-1}, waarvan O weer het middelpunt is."

Zoo vinden we — van beneden opklimmende —:

„Elke koorde van D_{n-1} door O evenwijdig aan een ribbe heeft een lengte $\sqrt{2}$, elk vlak door O evenwijdig aan een zijvlak snijdt D_{n-1} volgens een regelmatigen zeshoek met zijden $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, elke ruimte door O evenwijdig aan een grenslichaam snijdt D_{n-1} volgens een regelmatig achtvlak met ribben $\sqrt{2}$, enz."

6. We keeren op onze schreden terug en bepalen van het boven besproken rhombotoop de aslengte voor en na de afknotting. Uit de gelijkvormigheid der driehoeken AOB en POC volgt in verband met de lengten $\frac{1}{2}\sqrt{n-1}$, $\frac{1}{2}\sqrt{n}$, $\frac{1}{2}$ van OC, OP, OB voor OA de waarde $\frac{1}{2(n-1)}\sqrt{n(n-1)}$ en dus voor de helft der ongeschonden as, die $n-1$ maal zoo groot is, $\frac{1}{2}\sqrt{n(n-1)}$. Stellen we een rhombotoop met p afmetingen, waarvan q de aslengte is en r de deelen der as zijn door de afstomping weggenomen, door $Rh_p[q, r]$ voor, dan is de doorsnee D_{n-1} dus door het symbool $Rh_{n-1}\left[\sqrt{n(n-1)}, \frac{n-2}{2(n-1)}\right]$ voor te stellen. Dus geldt de stelling:

„Men verkrijgt de doorsnee D_{n-1}, als men het maatpolytoop M_{n-1} op de aangeduide wijze door uitrekking in de richting van een diagonaal tot op $\sqrt{n}$-maal de oorspronkelijke lengte in een rhombotoop met een aslengte $\sqrt{n(n-1)}$ doet overgaan en dit rhombotoop door twee ruimten R_{n-2} loodrecht op de as tot een

$$Rh_{n-1}\left[\sqrt{n(n-1)}, \frac{n-2}{2(n-1)}\right]$$

afknot." [1])

III. *Nadere verklaring van het verband van D_{n-1} met regelmatige en regelmatig afgeknotte simplexen.*

7. We beschouwen in de ruimte R_n een rechthoekig coördinatenstelsel met een willekeurig punt O tot oorsprong en $OX_1, OX_2, \ldots OX_n$ tot assen en noemen nu het een $2^{n\,de}$ deel dier ruimte, dat de meetkundige plaats is van het punt met louter positieve coördinaten het „n-been $O(X_1 X_2 \ldots X_n)$".

Zijn A, A' twee overliggende hoekpunten van een maatpolytoop M_n van R_n en $AA_1, AA_2, \ldots AA_n$ de door A gaande ribben, $A'A'_1$, $A'A'_2, \ldots A'A'_n$ de aan deze evenwijdig doch tegengesteld gerichte ribben, dan is M_n te beschouwen als het deel der ruimte R_n gemeen aan de twee n-beenen $A(A_1 A_2 \ldots A_n)$ en $A'(A'_1 A'_2 \ldots A'_n)$.

Snijden we deze figuur der twee tegengesteld georiënteerde n-beenen en het aan beide gemeenschappelijke maatpolytoop M_n door een willekeurige ruimte R_{n-1}, dan worden de beide n-beenen volgens twee tegengesteld georiënteerde simplexen gesneden en verschijnt de doorsnee van M_n met die ruimte R_{n-1} als het deel dier ruimte, dat tegelijkertijd door de beide in die ruimte liggende simplexen wordt ingesloten. Als de gekozen ruimte loodrecht staat op de diagonaal AA', die de toppen der n-beenen vereenigt, zijn de simplexen regelmatig en hebben zij het snijpunt P van de snijdende ruimte R_{n-1} met AA' tot gemeenschappelijk zwaartepunt. Dus geldt de algemeene stelling:

---

[1]) Deze stelling doet duidelijk zien, waarom de doorsneden van een achtvlak door vlakken evenwijdig aan twee zijvlakken identisch moeten zijn met die van een kubus door vlakken loodrecht op een diagonaal in punten van het middelste derde gedeelte dier lijn. Om in andere woorden nog eens hetzelfde te zeggen: Kapt men van een kubus met de eenheid van ribbe twee overstaande hoeken af door vlakken loodrecht op de verbindingslijn in de punten, die deze diagonaal in drie gelijke deelen verdeelen, en drukt men een achtvlak met ribben 1 2 in de richting der loodlijn op twee evenwijdige zijvlakken tot op de helft der dikte samen, dan doet men op twee verschillende wijzen hetzelfde lichaam ontstaan.

„De doorsnee van M_n met een ruimte R_{n-1} loodrecht op een diagonaal is steeds te beschouwen als een deel dier ruimte R_{n-1} door twee bepaalde concentrische, tegengesteld georiënteerde, regelmatige simplexen dier ruimte ingesloten."

Willen we van deze stelling partij trekken, dan moeten we de lengte der ribben dier tegengesteld georiënteerde regelmatige simplexen met gemeenschappelijk zwaartepunt nader bepalen.

8. Denkt men zich de snijdende ruimte R_{n-1} loodrecht op de diagonaal AA' in het eerste deelpunt A_1, op een afstand $\frac{1}{n}\sqrt{n}$ van A gelegen, dan is de doorsnee een simplex met de ribbe $\sqrt{2}$. Dus hebben de beide simplexen, die ontstaan als een willekeurig punt P van AA' het punt A_1 vervangt, ribben ter lengte van $AP\sqrt{2n}$ en $A'P\sqrt{2n}$, weshalve wij ze, mede naar het aantal hoekpunten, door $S_n(AP\sqrt{2n})$ en $S'_n(A'P\sqrt{2n})$ aanduiden. Dus geldt de stelling:

„Schuift men een M_n, waarvan de diagonaal AA' loodrecht op een gegeven ruimte R_{n-1} staat, in de richting dier diagonaal door die ruimte R_{n-1} heen, zoodat de ruimten R_{n-1} der grenspolytopen M_{n-1} zich evenwijdig aan zich zelf bewegen, dan is de doorsnee van R_{n-1} met het zich bewegende polytoop M_n op ieder oogenblik het deel dier ruimte R_{n-1}, dat besloten is binnen twee concentrische doch tegengesteld georiënteerde regelmatige simplexen $S_n(p\sqrt{2n})$ en $S'_n(p'\sqrt{2n})$, waarbij p en p' zoo samenhangen, dat de som $p+p'$ gelijk is aan $\sqrt{n}$. Gedurende die beweging van M_n blijft het gemeenschappelijk zwaartepunt der beide simplexen op zijn plaats en bewegen de ruimten R_{n-2} der grenssimplexen S_{n-1} en S'_{n-1} zich evenwijdig aan zich zelf; terwijl S_n zich van dit gemeenschappelijk zwaartepunt tot een simplex $S_n(n\sqrt{2})$ uitbreidt, krimpt S'_n omgekeerd van een simplex $S'_n(n\sqrt{2})$ tot dit punt samen".

Op het oogenblik, dat dit proces zich tot op de helft heeft afgespeeld en de beide simplexen even groot geworden zijn, vinden we:

„De doorsnee D_{n-1} is het deel der snijdende ruimte R_{n-1} ingesloten door twee bepaalde gelijke concentrische, doch tegengesteld georiënteerde, regelmatige simplexen $S_n\left(\frac{1}{2}n\sqrt{2}\right)$ en $S'_n\left(\frac{1}{2}n\sqrt{2}\right)$."

Zoo is voor $n=3$ de regelmatige zeshoek met zijden $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ de figuur ingesloten door twee driehoeken met zijden $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ — denk aan het bekende fabrieksmerk —, zoo is voor $n=4$ het regelmatig achtvlak met ribben $\sqrt{2}$ de figuur ingesloten door twee viervlakken

met ribben $2\sqrt{2}$ — denk aan de twee in een kubus beschreven viervlakken en het achtvlak aan beide gemeen. Zoo wordt in het algemeen het vraagstuk in de ruimte met n afmetingen teruggebracht tot een ander vraagstuk in de ruimte met $n-1$ afmetingen en tevens het verband van de uitkomst met regelmatige simplexen verklaard.

Denkt men zich het simplex S_n wit en het simplex S'_n zwart, dan zullen de n grensruimten R_{n-2} van D_{n-1} afkomstig van S_n wit, die afkomstig van S'_n zwart zijn. Hieruit volgt, dat het mogelijk moet zijn de $2n$ grensruimten R_{n-2} van D_{n-1} derwijze om en om wit en zwart te kleuren, dat twee tegenoverstaande grensruimten R_{n-2} verschillende kleur dragen. Werkelijk is het achtvlak het eenige der regelmatige lichamen, dat deze bewerking toelaat. [1])

9. Als het simplex S_n zich uitbreidt van een punt tot een $S_n(n\sqrt{2})$ en terzelfder tijd S'_n zich inkrimpt van een $S'_n(n\sqrt{2})$ tot een punt, ligt bij het begin van het proces S_n binnen S'_n en aan het eind omgekeerd S'_n binnen S_n. Gaandeweg zijn daarbij dan eerst de hoekpunten, daarna de ribben, vervolgens de zijvlakken, enz. van S_n naar buiten getreden. We onderzoeken thans, wanneer dit geschiedt.

Uit de diagrammen van de uitslaande plaat is gebleken, dat de doorsnee van M_n met een ruimte R_{n-1} van karakter verandert als het snijpunt P dier ruimte R_{n-1} met de diagonaal AA' een der $n-1$ deelpunten $A_1, A_2, \ldots$ passeert. Wijl nu het karakter der doorsnee natuurlijk ook verandert, als er binnen S'_n gelegen begrenzingselementen van S_n naar buiten treden, moet dit laatste plaats vinden op de oogenblikken, waarin die deelpunten der diagonaal AA' van het zich voortbewegende M_n door de vaststaande ruimte R_{n-1} gaan. Werkelijk geldt dan ook de stelling:

„Bij de translatie van M_n in de richting van AA' door de ruimte R_{n-1} heen treden achtereenvolgens de hoekpunten, ribben, zijvlakken, grenslichamen, enz. van S_n geheel buiten S'_n op de oogenblikken, dat het snijpunt P der diagonaal AA' met de ruimte R_{n-1} achtereenvolgens met de deelpunten A_1, A_2, A_3, A_4, enz. samenvalt.

We beschouwen — ten einde deze stelling te bewijzen — het

[1]) Hiertegen schijnt te strijden, dat er voor $n=5$ door elke ribbe *drie* zijvlakken gaan en om deze ribbe dus *drie* grenslichamen (12, 18, 8) liggen. Deze tegenstrijdigheid is echter slechts schijnbaar; zij wordt opgeheven door de opmerking, dat twee grenslichamen (12, 18, 8), die een zijvlak gemeen hebben, in kleur overeenstemmen of verschillen, naarmate het zijvlak driehoekig of zeshoekig is. Van de drie zijvlakken is er een driehoekig, zijn er twee zeshoekig; het grenslichaam, waartoe de twee zeshoekige zijvlakken behooren, verschilt in kleur van de beide anderen, die in kleur overeenstemmen.

willekeurig stadium der simplexen $S_n(AP\sqrt{2n})$ en $S'_n(A'P\sqrt{2n})$, verdeelen de n hoekpunten van S_n op willekeurige wijs in twee groepen β en γ van p en $n-p$ punten, duiden door β' en γ' de groepen der p en $n-p$ overeenkomstige hoekpunten van S'_n aan en stellen door B, C, B', C' (fig. 2) de zwaartepunten der puntgroepen $\beta, \gamma, \beta', \gamma'$

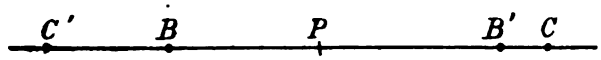


Fig. 2.

— d. i. de middelpunten der grenssimplexen $S_p, S_{n-p}, S'_p, S'_{n-p}$ met deze punten tot hoekpunten — voor. Daarbij liggen de vijf punten B, C, B', C', P dan zoo op een zelfde rechte, dat B en C' zich aan de eene, B' en C zich aan de andere zijde van P bevinden en men heeft

$$\left.\begin{array}{r} p\ BP = (n-p)\,PC \\ (n-p)\,C'P = \quad p\,.\,PB' \end{array}\right\},\ \frac{AP}{PA'} = \frac{BP}{PB'} = \frac{CP}{PC'}.$$

We kunnen nu beweren, dat het grenssimplex S_p der hoekpunten β van S_n nog geheel of gedeeltelijk binnen S'_n ligt als B zich tusschen C' en P bevindt, terwijl S_p geheel buiten S'_n ligt als C' zich tusschen B en P bevindt. Anders gezegd: bij het aangroeien van AP treedt het grenssimplex S_p van S_n geheel naar buiten als B met C' samenvalt en de ruimten R_{p-1} en R_{n-p-1} van S_p en S'_{n-p}, die elkaar in het algemeen volkomen loodrecht kruisen, incident worden door dat ze het punt $B = C'$, dan gemeenschappelijk zwaartepunt, tot snijpunt verkrijgen. Onder de voorwaarde $BP = C'P$ volgt nu uit de vergelijkingen

$$\frac{BP}{PC} = \frac{n-p}{p},\ \frac{PC}{C'P} = \frac{AP}{PA'}$$

de betrekking

$$(n-p)\,AP = p\,.\,PA',$$

welke leert, dat P met het p^{de} deelpunt A_p van AA' samenvallen moet.

10. Valt P met A_p samen, dan hebben de ruimten R_{p-1} en R_{n-p-1} van S_p en S'_{n-p}, zoo als we boven zagen, het gemeenschappelijk middelpunt van S_p en S'_{n-p} gemeen. Wijl dit snijpunt van S_p en S'_{n-p} hoekpunt der doorsnee wordt, geldt — als we deze doorsnee in verband met vorige beschouwingen weer $\frac{p}{n}(M_n)$ noemen de stelling:

„De middelpunten van de $\binom{n}{p}$ grenssimplexen S_p van een regelmatig simplex $S_n (p \leqq 2)$ vormen de hoekpunten van een polytoop congruent met $\frac{p}{n}(M_n)$ voor $p = 1, 2, \ldots, n-1$."

Voor even $n = 2n'$ heeft men in het bijzonder:

„De middelpunten van de $\binom{2n'}{n'}$ grenssimplexen $S_{n'}$ van een regelmatig simplex $S_{2n'}$ $(n' \leqq 2)$ vormen de hoekpunten van een $D_{2n'-1}$."

11. Valt P tusschen A_p en A_{p+1} in, dan worden de hoekpunten der doorsnee van de beide simplexen S_n en S'_n geleverd door de snijpunten van elk grenssimplex S_{p+1} van S_n met de $p+1$ grenssimplexen S'_{n-p} van S_n, die de eigenschap bezitten onder hun $n-p$ hoekpunten slechts een met een hoekpunt van dit S_{p+1} overeenkomend hoekpunt te tellen; in elk grenssimplex S_{p+1} vormen deze $p+1$ snijpunten dan de hoekpunten van een nieuw regelmatig simplex S_{p+1}, dat met het aangenomene concentrisch, doch tegengesteld georiënteerd is. We bepalen de ribbenlengte van dit nieuwe simplex voor het bepaalde geval, dat P juist midden tusschen A_p en A_{p+1} gelegen is, met behulp van beschouwingen, die zich geheel bij het voorgaande aansluiten.

Zijn B, C, B', C' (fig. 3) achtereenvolgens de zwaartepunten van het

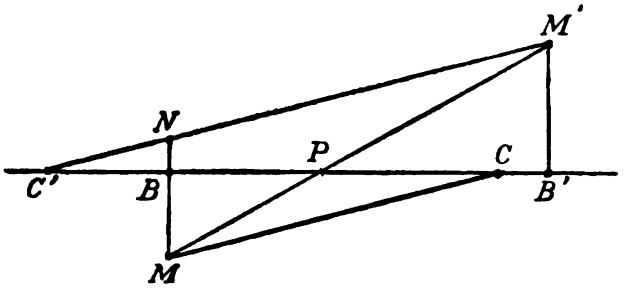


Fig. 3.

grenssimplex S_{p+1}, van het grenssimplex S_{n-p-1} der overige hoekpunten van S_n en van de grenssimplexen S_{p+1}, en S'_{n-p-1} der groepen van hoekpunten van S'_n, die met de hoekpunten van S_{p+1} en S'_{n-p-1} overeenkomen, dan liggen deze punten weer op een zelfde rechte door P en wel B en C' aan de eene, C en B' aan de andere zijde van P. Zijn nu verder M en M' overeenkomstige hoekpunten van S_{p+1} en S'_{p+1}, dan liggen deze punten in evenwijdige loodlijnen in B en B' op BB' opgericht en gaat de verbindingslijn MM' door P.

Het snijpunt N van BM en $C'M'$ is dan het met het hoekpunt M van S_{p+1} overeenkomende hoekpunt van S_{p+1}. Nu volgt uit de evenwijdigheid van CM en $C'M'$

$$\frac{BN}{MB} = \frac{C'B}{BC} = \frac{C'P - BP}{BP + PC},$$

terwijl de betrekkingen

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{BP}{PB'} = \frac{CP}{PC'} = \frac{2p+1}{2n-2p-1}$$

en

$$\frac{BP}{PC} = \frac{B'P}{PC'} = \frac{n-p-1}{p+1}$$

ons in staat stellen $C'P$ en BP in PC uit te drukken. Invoeging geeft dan de uitkomst

$$\frac{BN}{MB} = \frac{1}{2p+1}.$$

Dus geldt de stelling:

„Beschrijft men in de ruimten R_p, die de grenssimplexen $S_{p+1}\left(\frac{2p+1}{2}\sqrt{2}\right)$ van een regelmatig simplex $S_n\left(\frac{2p+1}{2}\sqrt{2}\right)$ dragen, simplexen $S_{p+1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ concentrisch en tegengesteld georiënteerd met de oorspronkelijken, dan vindt men de $(p+1)\binom{n}{p+1}$ hoekpunten van een $\frac{2p+1}{2n}(M_n)$."

Voor oneven $n = 2n' + 1$ heeft men in het bijzonder

„Beschrijft men in de ruimten $R_{n'}$, die de grenssimplexen $S_{n'+1}\left(\frac{2n'+1}{2}\sqrt{2}\right)$ van een regelmatig simplex $S_{2n'+1}\left(\frac{2n'+1}{2}\sqrt{2}\right)$ dragen, simplexen $S_{n'+1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ concentrisch en tegengesteld georiënteerd met de oorspronkelijken, dan vindt men de $(n'+1)\binom{2n'+1}{n'+1}$ hoekpunten van een $D_{2n'}$."

In verband met de boven gevonden uitkomsten bevat de hier voor den dag komende lengte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ der ribben van de nieuwe simplexen een bevestiging van de juistheid der uitkomsten.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt eene mededeeling aan, namens Mrs. A. BOOLE STOTT en hemzelven: *„Over vijf paren uit een zelfde bron afgeleide vierdimensionale cellen."* (Eerste gedeelte).

Inleiding.

Wijl deze mededeeling als een korte aanvulling van het in de Sammlung SCHUBERT opgenomen leerboek der „Mehrdimensionale Geometrie" beschouwd moet worden, nemen wij de daar gebruikte notatie hier over.

We beschouwen achtereenvolgens elk der zes regelmatige cellen C_5, C_8, C_{16}, C_{24}, C_{120}, C_{600} der ruimte R_4 en leiden uit deze twee nieuwe vierdimensionale cellen af. De eerste, die de middens K_6 der ribben van de regelmatige cel tot hoekpunten heeft, ontstaat door een regelmatige tot op het midden der ribben uitgestrekte afknotting der hoeken; de tweede is de weerkeerige poolvorm van de eerste met betrekking tot de bolruimte der punten K_6.

Wijl de regelmatige C_{16} ons hierbij de regelmatige C_{24} vinden doet, is het aantal paren nieuwe cellen echter niet zes doch vijf.

I. *Algemeene beschouwingen.*

1. Verstaat men bij de regelmatige cellen onder e, k, f, r achtereenvolgens het aantal der hoekpunten, ribben, zijvlakken, grenslichamen, onder p, q het aantal der grenslichamen door een ribbe, door een punt, onder e', k', f' het aantal der hoekpunten, ribben, zijvlakken van de grenslichamen, dan gelden behalve de betrekkingen

$$e + f = k + r \quad , \quad e' + f' = k' + 2$$

van EULER nog de vergelijkingen

$$qe = re' \quad , \quad pk = rk' \quad , \quad 2f = rf' \ ,$$

uit welk vijftal men dan gemakkelijk de betrekking

$$(q - 2)\, e = (p - 2)\, k. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

afleidt. Het volgende tabelletje geeft deze grootheden voor de zes regelmatige cellen van R_4. (zie tabel p. 483).

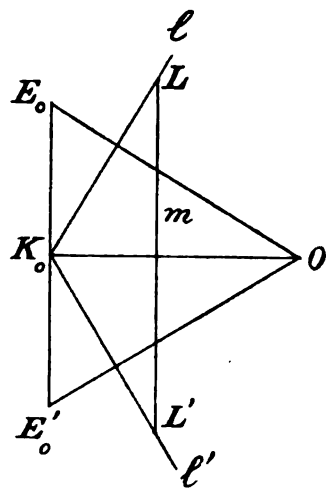
2. We trachten nu de kenmerkende getallen E, K, F, R van de eerste der beide nieuwe cellen — en, wat voor deze ook mogelijk is, P, Q — in de kenmerkende getallen e, k, f, r, p, q der regelmatige cel uit te drukken.

„Het aantal hoekpunten der nieuwe cel is k; d.i. $E = k$."

Projecteert men de regelmatige cel (fig. 1) op het vlak door een

e	k	f	r	p	q	e'	k'	f'
5	10	10	5	3	4	4	6	4
8	24	32	16	4	8	4	6	4
120	720	1200	600	5	20	4	6	4
16	32	24	8	3	4	8	12	6
24	96	96	24	3	6	6	12	8
600	1200	720	120	3	4	20	30	12

der ribben E_0E_0' en het middelpunt O, dan projecteeren zich de twee nieuwe grensruimten, die door het midden K_0 gaan, volgens de uit K_0 op de assen OE_0, OE_0' neergelaten loodlijnen l, l'. Wijl nu de doorsnee van de regelmatige cel met een vlak loodrecht op het projectievlak in een nabij E_0E_0' gelegen punt een gelijkzijdige driehoek, een vierkant, of een regelmatige vijfhoek zijn moet, steeds met het aangenomen punt tot middelpunt, naarmate p de waarde 3, 4 of 5 heeft, is de doorsnee van het samenstel der $p+2$ door K_0 gaande grensruimten der nieuwe cel met een ruimte loodrecht op OK_0 — bijv. met de ruimte, die volgens de loodlijn m op OK_0 loodrecht staat op het projectievlak — een recht p-zijdig prisma, waarvan het tusschen l, l' begrepen segment LL' van m de as is en de loodrechte eindvlakken zich in L en L' projecteeren. Hieruit volgt:



„Door een hoekpunt gaan $p+2$ grensruimten; d. i. $Q = p + 2$".

„Door een ribbe gaan drie grensruimten; d. i. $P = 3$".

„Door een hoekpunt gaan $2p$ ribben, dus is pk het aantal ribben; d. i. $K = pk$."

„Het stelsel der grensruimten bestaat uit twee groepen, nl. uit e regelmatige polyeders met q zijvlakken, en r tot op de middens der ribben aan de hoekpunten afgeknotte halfregelmatige gelijkhoekpuntige polyeders (e', k', f'); d. i. $R = e + r$".

„Wijl de polyeders van de tweede groep $e' + f'' = k' + 2$ zijvlakken hebben en een zijvlak aan twee grensruimten gemeen-

schappelijk is, is het aantal zijvlakken de halve som van qe en $r(k' + 2)$ of qe en $pk + 2r$; d. i. $2F = qe + pk + 2r$".

Dus is de uitkomst deze:

„De eerste der beide uit de regelmatige cel (e, k, f, r, p, q) afgeleide cellen, (E, K, F, R, P, Q), heeft de kenmerkende getallen

$$E = k, \quad K = pk, \quad F = \tfrac{1}{2}(qe + pk) + r, \quad R = e + r,$$
$$P = 3, \quad Q = p + 2."$$

Hierbij blijft dan de wet van EULER $E + F = K + R$ als controle. Werkelijk is het verschil der beide leden dezer vergelijking

$$\begin{aligned} E + F - (K + R) &= k + \tfrac{1}{2}(qe + pk) + r - (pk + e + r) \\ &= k - e + \tfrac{1}{2}(qe - pk) \\ &= \tfrac{1}{2}\{(q - 2)e - (p - 2)k\} \end{aligned}$$

nul, ten gevolge van de betrekking (1).

3. De tweede der nieuwe uit de regelmatige cel afgeleide cellen wordt ingesloten door de poolruimten van de middens K_0 der ribben met betrekking tot de bolruimte door die punten, d. i. door de raakruimten aan die bolruimte in die punten, d. i. door de ruimten in de punten K_0 loodrecht op de assen OK_0 aangebracht [1]). Door polaire omkeering van het boven gevondene komt men met betrekking tot deze tweede nieuwe cel tot de volgende uitkomsten:

„Het aantal grensruimten der nieuwe cel is k; d. i. $R' = k$."

„De grenslichamen hebben $p + 2$ hoekpunten en zijn dubbelpyramiden met een regelmatigen p-hoek tot basis, gelegen in een vlak, dat de verbindingslijn der toppen loodrecht middendoordeelt."

„De zijvlakken zijn gelijkbeenige driehoeken."

„In een grensruimte liggen $2p$ zijvlakken, dus is pk het aantal zijvlakken; d. i. $F' = pk$."

„Het stelsel der hoekpunten bestaat uit twee groepen, nl. uit e regelmatige hoekpunten en r halfregelmatige hoekpunten; d. i. $E' = e + r$".

„Het aantal ribben K' is $\frac{1}{2}(qe + pk) + r$."

Dus is de uitkomst deze:

„De tweede der beide uit de regelmatige cel (e, k, f, r, p, q) afgeleide cellen, (E', K', F', R'), wordt begrensd door dubbelpyramiden met een regelmatigen p-hoek tot basis, en heeft de kenmerkende getallen

$$E' = e + r, \quad K' = \tfrac{1}{2}(qe + pk) + r, \quad F' = pk, \quad R' = k."$$

---

[1]) Het boven aangehaalde leerboek bevat in deel II, blz. 256—261 eenige mededeelingen omtrent de overeenkomstige polytopen in de ruimte R_n.

4. Het zou kunnen schijnen, dat men uit de regelmatige cellen nog andere paren van nieuwe cellen zou kunnen afleiden door voor de uiteinden F_0 der assen OF_0 hetzelfde te doen, wat boven voor de punten K_0 gedaan werd. Dit is echter niet het geval. Want bij elke regelmatige cel vormen de middelpunten F_0 der zijvlakken de middens K_0 der ribben van een andere regelmatige cel, die bij de met zichzelf dualistisch verwante cellen C_5, C_{24} een cel van dezelfde soort, bij de paarsgewijs met elkaar verwante cellen (C_8, C_{16}), (C_{120}, C_{600}) telkens een dualistisch verwante cel is. En, zoo als onmiddellijk blijkt, kunnen de puntgroepen E_0 en R_0 evenmin tot nieuwe uitkomsten voeren.

We besluiten deze algemeene beschouwingen met de opmerking, dat de beide uit de regelmatige cel (e, k, f, r) afgeleide cellen veel regelmatigs vertoonen. Van de eerste zijn de hoekpunten en ribben, van de tweede zijn de zijvlakken en grenslichamen onderling gelijksoortige elementgroepen, terwijl de zijvlakken en grenslichamen van de eerste en de hoekpunten en ribben van de tweede uit twee ondergroepen bestaande elementgroepen vormen. Leveren deze nieuwe cellen voor niet geheel regelmatige polytopen het summum van regelmaat? We wenschen hier op dit punt niet nader in te gaan, aangezien het Wiskundig Genootschap te Amsterdam voor 1908 een prijsvraag uitschrijft omtrent wat men onder „halfregelmatige polytopen" heeft te verstaan.

5. Het volgende tabelletje geeft de uitkomsten aan, die men verkrijgt door invulling der waarden van e, k, f, r, p, q voor de vijf verschillende gevallen. Volledigheidshalve zijn daarin ook de grootheden opgenomen, die aanwijzen hoeveel hoekpunten er liggen in zijvlak en grensruimte. Daarbij moet dan worden opgemerkt, dat de eerste nieuwe cel tweeërlei zijvlakken en grenslichamen heeft, zoodat we genoodzaakt zijn vier nieuwe grootheden in te voeren en wel de aantallen hoekpunten S_1 en T_1 in zijvlak en grenslichaam van de eene, de aantallen hoekpunten S_2 en T_2 in zijvlak en grenslichaam van de tweede soort. Hierbij zullen dan S_2 en T_2 betrekking hebben op de afknottende lichamen met zijvlakken van dezelfde soort en S_1 en T_1 slaan op de afgeknotte lichamen, waarbij men dan wat S_1 betreft die zijvlakken nemen moet, die de afgeknotte lichamen onderling gemeen blijven hebben. Evenzoo moeten dan voor de tweede cel met tweeërlei hoekpunten en ribben de vier nieuwe grootheden P_1', P_2', Q_1', Q_2' worden ingevoerd. Zoo als gemakkelijk blijkt, is $T_1 = Q_1' = k'$, terwijl $T_2 = Q_2'$ het aantal hoekpunten is van het regelmatige polyeder met q zijvlakken.

	e	E,R'	K,F'	F,K'	R,E'	P,S'	Q,T'	S_1,P_1'	S_2,P_2'	T_1,Q_1'	T_2,Q_2'
C_5	5	**10**	**30**	**30**	**10**	3	5	3	3	6	4
C_8	16	**32**	**96**	**88**	**24**	3	5	4	3	12	4
C_{24}	24	**96**	**288**	**240**	**48**	3	5	4	4	12	8
C_{600}	120	**720**	**3600**	**3600**	**720**	3	7	3	3	6	12
C_{120}	600	**1200**	**3600**	**3120**	**720**	3	5	5	3	30	4

In een tweede gedeelte zullen we elk dezer vijf paren van nieuwe cellen aan een afzonderlijk onderzoek onderwerpen.

Natuurkunde. — De Heer P. ZEEMAN biedt eene mededeeling aan: „*Waarneming van de magnetische splitsing der spectraallijnen met de methode van* FABRY *en* PEROT."

1. De interferentie methode der parallelle half verzilverde platen, welke met zooveel vernuft door FABRY en PEROT is uitgewerkt,[1]) munt boven alle andere spectroscopische procédés uit door de nauwkeurigheid waarmede aan de theoretische voorwaarden, die er aan ten grondslag liggen praktisch kan worden voldaan.

De voornaamste taak van den experimentator bij hare toepassing is geworden het volkomen evenwijdig stellen der twee verzilverde platen waartusschen dan de terugkaatsing plaats vindt.

Ten einde enkele uitkomsten bij een onderzoek over de magnetische splitsing der spectraallijnen verkregen[2]) langs een onafhankelijken weg op de proef te stellen en verder dit onderzoek tot zwakke velden uittebreiden scheen mij de methode van FABRY en PEROT aangewezen. Hoewel het mij uiterst onwaarschijnlijk voorkomt dat fouten van het tralie van ROWLAND de door mij beschreven asymmetrische splitsing zouden kunnen veroorzaken, zoo is toch eenige twijfel in die richting mogelijk.

In deze mededeeling wordt voor de eerste maal de methode van FABRY en PEROT op de splitsing der spectraallijnen toegepast. Men kan een enkele maal in de literatuur uitgesproken vinden dat de methode der interferentiestrepen van verzilverde lagen voor zulk een onderzoek niet gebruikt kan worden. Het bezwaar tegen hare toepassing wordt hoofdzakelijk ontleend aan het groote lichtverlies

[1]) FABRY et PEROT, Ann. de Chimie et de Physique 1899—1904.

[2]) ZEEMAN, Deze Verslagen November 1907.

dat in het apparaat van FABRY en PEROT plaats vind. Intusschen bewijst deze mededeeling dat dit bezwaar niet onvermijdelijk is.

2. Van de twee vormen waarin de methode der evenwijdige platen kan worden gebruikt is de eenvoudigste, die welke ook de minst kostbare apparaten vereischt en bij de meting van golflengten door FABRY en PEROT[1]), lord RAYLEIGH[2]) en EVERSHEIM[3]) is gebezigd. Hierbij wordt de vorm van toestel gebruikt welke *étalon* genoemd wordt. De afstand der verzilverde platen is daarbij constant. De platen worden tegen afgeronde afstandstukken gedrukt met behulp van schroeven, die het uitoefenen van een veranderlijken druk toelaten. Door verandering van den druk kan het staal en het glas uiterst weinig gedeformeerd worden en de volkomen evenwijdigheid der glasplaten worden verkregen, welke reeds door de nauwkeurige bewerking der afstandstukken bijna bereikt was.

3. De theorie van de vergelijking van golflengten met dit toestel is zeer eenvoudig en door FABRY en PEROT aangegeven. Wij zullen haar toepassen op de splitsing der spectraallijnen in het magnetische veld en wel op het eenvoudigste geval, de splitsing in een triplet.

Laat de oorspronkelijke spectraallijn (dus later de middelste lijn van het triplet) de golflengte λ_0 hebben. Hiermede correspondeert een systeem ringen; laat het ordegetal van den eersten ring van af het middelpunt P_0 zijn. Dan is het ordegetal p_0 voor het middelpunt dit geheele getal P_0, vermeerderd met een breuk ε_0, dus $p_0 = P_0 + \varepsilon_0$. Hierbij zal gewoonlijk $0 < \varepsilon_0 < 1$.

De diameter van een ring vermeerdert met ε. Laat e de dikte van de luchtlaag zijn dan is het ordegetal voor het middelpunt $p_0 = \frac{2e}{\lambda_0}$. In een richting welke een hoek i met den normaal op de plaat maakt wordt het ordegetal $p_0 \cos i$.

Indien x_0 in hoekmaat de diameter van den ring P_0 voorstelt, dan is bij waarneming in het focale vlak eener lens $p_0 \cos \frac{x}{2} = P_0$. Na ontwikkeling van den cosinus wordt

$$p_0 = P_0 \left(1 + \frac{x_0^2}{8}\right)$$

---

[1]) FABRY et PEROT, Ann. de Chim. et de Phys. T. 25, Janvier 1902. C.R. 27 Mars 1904. FABRY et BUISSON. C.R. 16 Juillet 1906.

[2]) Lord RAYLEIGH, Phil. Mag Vol. 11, p. 685, 1906.

[3]) EVERSHEIM, Zeitschr. f. wissenschaftl. Photographie, Band 5 p. 152, 1907.

of

$$\varepsilon_0 = P_0 \frac{x_0^2}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Laat voor den uitersten component van het triplet naar den kant van het rood de golflengte λ_r zijn dan is daarvoor, wanneer aan P_r, ε_r en x_r overeenkomstige beteekenis wordt toegekend als boven aan P_0, ε_0 en x_0

$$\varepsilon_r = P_r \frac{x_r^2}{8}.$$

Nu moet echter $\lambda_0 (P_0 + \varepsilon_0) = \lambda_r (P_r + \varepsilon_r)$ zijn, dus is

$$\lambda_r = \lambda_0 \frac{P_0}{P_r}\left(1 + \frac{x_0^2}{8} - \frac{x_r^2}{8}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Zijn voor den component van het triplet naar den kant van het violet λ_v, P_v, x_v bij elkaar behoorende waarden dan is

$$\lambda_v = \lambda_0 \frac{P_0}{P_v}\left(1 + \frac{x_0^2}{8} - \frac{x_r^2}{8}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Bij de straling in een magnetisch veld doet zich de vereenvoudigende omstandigheid voor dat in zeer vele gevallen

$$P_0 = P_v = P_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

kan gekozen worden.

Beziet men een ringsysteem beantwoordende aan λ_0, dan zal men bij het langzaam stijgen van de magnetische kracht zich tegelijkertijd ringen van het systeem λ_0 zien los maken, die naar buiten en die naar binnen bewegen. De ringen welke aan λ_r beantwoorden krimpen in, die welke aan λ_v beantwoorden zetten zich uit.

Het zal van de waarde van p voor den étalon en van de sterkte van het magnetische veld afhangen hoever dit uitzetten en inkrimpen der ringen, vergeleken met den afstand der ringen λ_0, zal plaats vinden.

Evenzoo zullen p en de maximum magnetische kracht er over beslissen of er in het centrum nieuwe ringen verschijnen resp. verdwijnen zullen. In geval men niet den kleinsten ring meet, maar de ringen λ_r en λ_v, *die uit eenzelfden ring* λ_0 *ontstaan*, kan gebruiken, zal $\varepsilon > 1$ kunnen worden. Dan zal bovengenoemde gelijkheid (4) bestaan en zal men dus uit de middellijnen der ringen en de als gegeven aangenomen waarde λ_0, maar onafhankelijk van de juiste waarde van de dikte der luchtplaat, λ_r en λ_v kunnen vinden.

Alleen zal natuurlijk de grootte der splitsing tusschen de ringen λ_0, bij bepaalde waarde der magnetische kracht, door de dikte der luchtplaat worden bepaald en zal wat men „de gevoeligheid" van het ringsysteem voor magnetische krachten zou kunnen noemen met de dikte der luchtplaat toenemen. Een grens voor deze gevoeligheid

wordt (te spoedig) bereikt door de effectieve breedte der spectraallijnen, die aan het onderzoek worden onderworpen.

In sommige gevallen zal het wenschelijk zijn om niet den eersten ring maar de volgende bij de meting uit te kiezen, moeilijkheden kunnen daardoor niet ontstaan. P is in de formules steeds het orde getal van den gemeten ring.

In geval echter P_e van P_r of P_v verschilt moet de waarde van P_e voor de berekening volgens (2) en (3) bekend zijn.

4. Behalve de zooeven besproken vereenvoudiging welke uit de gelijkheid (4) voortvloeit, is er nog eene welke bij het onderzoek in het magnetische veld optreedt.

Ik bedoel dat de grootheid $e = p\,\frac{\lambda}{2}$, de optische dikte der luchtplaat begrepen tusschen de beide platen, eene absolute constante is.

In het algemeen is deze dikte niet onafhankelijk van λ. Ten gevolge der phasenverandering bij de terugkaatsing op het zilver, welke een weinig met de golflengte verandert moet bij het vergelijken van verschillend gekleurde ringsystemen de optische dikte voor elke kleur afzonderlijk worden bepaald of eene correctie worden aangebracht om alle waarden op zelfde kleur te reduceeren.

Het is duidelijk dat bij de toepassing, welke wij behandelen, alleen sprake is van ringsystemen voor uiterst weinig verschillende golflengten, waardoor dus de bedoelde correctie wegvalt.

5. De figuren 1 en 2 kunnen een denkbeeld geven van de wijze waarop de magnetische splitsing der spectraallijnen met behulp van Fabry en Perot's methode gezien wordt. Het zijn ongeveer zesmalige vergrootingen van negatieven welke met een étalon, waarvoor de optische afstand der platen op zeer weinig na 5 m.m. bedraagt, zijn opgenomen, terwijl als lichtbron een vacuumbuisje met kwik in het magnetische veld geplaatst diende. Het ordegetal voor Hg 5791 is bij 16° omstreeks 17266 in het centrum.

Het ringsysteem werd gevormd in het focale vlak van een achromatisch lensje van 18 m.m. middellijn en 12 c.m. hoofdbrandpuntsafstand. Dit focale vlak valt nauwkeurig zamen met het vlak waarin zich de spleet van een kleinen spectroscoop bevindt. Men ziet bij wijde spleet iedere spectraallijn in den vorm van een rechthoek waarop de ringen zich afteekenen. Het in de figuren voorkomende deel van het spectrum is dat der twee gele en der groene kwiklijnen. In fig. 1 ziet men de beide rechthoeken die aan de twee gele kwiklijnen beantwoorden over elkaar liggen. De groene kwiklijn

is ver overgeëxponeerd. Ik heb haar opgenomen om een idee van de gebruikte dispersie te geven.

Zeer mooi is de aanblik welke het systeem der bewegende ringen in den spectroscoop oplevert, wanneer men de magnetische kracht langzaam laat stijgen. Het magnetische veld waarbij de figuren 1 en 2 zijn opgenomen bedraagt omstreeks 5000 Gauss.

Men ziet dus eerst de ringen λ_r en λ_v elkaar naderen, elkaar bedekken, uit elkaar gaan, bij een waarde van omstreeks 15000 Gauss den volgenden ring λ_0 bedekken, dezen voorbijgaan enz.

Voor metingen kunnen bij de gele kwiklijnen alleen opnamen met nauwere spleet, dus zooals in Fig. 2, dienen. De temperatuur was bij deze opname iets anders dan bij de opname voor Fig. 1. .

6. Bij de metingen, waarop ik in een volgende mededeeling hoop terug te komen, kan men gebruik maken van de methode der middellijnen welke boven (§ 3) werd geresumeerd, maar evenzeer van *de methode der coincidenties* [1]) voor die bepaalde waarden der magnetische kracht, waarop λ_r met λ_c of λ_r en λ_v met λ_0 coïncideeren.

De bezwaren welke zich volgens FABRY en PEROT [1]) voordoen bij de toepassing der coïncidentie methode op de vergelijking van golflengten, worden door hen aldus geresumeerd:

„Même avec ce perfectionnement, la méthode présentait des inconvénients assez graves:

1°. La necessité d'éclairer simultanément l'appareil par les deux sources entraîne des pertes de lumière assez importantes;

2°. Les coïncidences ne sont bien observables que lorsque les deux systèmes d'anneaux ont des éclats comparables, et cette condition n'est pas toujours facile à réaliser;

3°. La recherche de la coïncidence entraîne toujours des tâtonnements et l'on n'est jamais sur (lorsque la période est courte) d'en rencontrer une qui soit exacte."

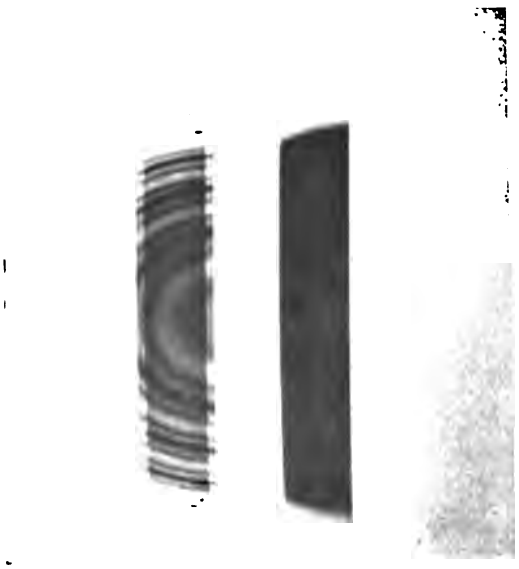
De bezwaren 1°. en 2°. bestaan bij de beschouwde toepassing op de straling in het magnetische veld niet, en door de verandering van stroomsterkte in den electromagneet kan de coïncidentie met den verlangden graad van nauwkeurigheid worden verkregen waardoor dus ook het sub 3°. genoemde bezwaar vervalt.

7. Ten slotte veroorloof ik mij nog enkele bijzonderheden over de gebezigde toestellen mede te deelen.

De monteering der 5 mm. étalon is gemaakt door JOBIN. Evenzoo

[1]) FABRY et PEROT, Ann. de Chim. et de Phys. p. 12, T. **25**, Janvier 1902.

P. ZEEMAN. „Waarneming van de magnetische splitsing der spectraallijnen met de methode van Fabry en Perot"



1. De twee gele kwiklijnen in magnetisch veld. Zeer wijde spleet. Groene kwiklijn overgeëxponeerd.
   Etalon 5. m.m. Veldsterkte, ongeveer 5000 Gauss.

2. Dezelfde lijnen. Nauwe spleet voor metingen op gele kwiklijnen.

de vlakke platen waarvan de inwendige oppervlakken nauwkeurig vlak zijn. De buitenvlakken behoeven niet zoo nauwkeurig te zijn afgewerkt, en maken een hoek van omstreeks 1′ met de binnenvlakken. Een beeld van het vacuumbuisje werd in viermalige vergrooting op den étalon geworpen met behulp van een achromatische lens van 12 cm. hoofdbrandpuntsafstand. Alle optische apparaten waren gemonteerd op een I-stuk en waren daardoor vast verbonden.

De figuren toonen aan dat voor het onderzoek der straling van de gele kwiklijnen in het magnetische veld, er geen voordeel in gelegen zou zijn een étalon met grootere optische dikte der luchtplaat te bezigen. Integendeel de effectieve breedte der gele kwiklijnen in het magnetische veld is zoo groot, dat de grenzen der methode in dit geval bijna bereikt zijn.

Scheikunde. — De Heer FRANCHIMONT biedt eene mededeeling aan van den Heer F. M. JAEGER: *„Over de vraag naar de mengbaarheid en de vorm-analogie bij aromatische Nitro- en Nitroso-verbindingen"*.

(Mede aangeboden door den Heer A. F. HOLLEMAN)

§ 1. De hier volgende mededeeling bevat eene nieuwe bijdrage tot de kennis van het wederzijdsch gedrag der aromatische nitro- en nitroso-derivaten, waarover reeds vroeger enkele gegevens werden verstrekt. De algeheele mengbaarheid in den vasten staat en de aan isomorfie grenzende vorm-analogie werden vastgesteld aan het *p-Nitro-* en *p-Nitroso-diaethylaniline* [1]), terwijl vervolgens in eene uitgebreide verhandeling van meer algemeenen aard [2]), de onderlinge vergelijking plaats vond van *p-Nitro-* en *p-Nitrosophenol* en van *o-Nitronitroso-* en *o-Dinitrobenzol*. Daarbij bleek van een *algemeenen* regel betreffende een morfologischen samenhang der twee klassen van verbindingen niet gesproken te kunnen worden.

Als een nieuw tweetal van dergelijke vergelijkbare stoffen, welke in meer dan één opzicht interessant zijn, werden thans bestudeerd het *o-Nitro-* en het *o-Nitroso-Aceetanilide*. Ook hier gaat het hij 't *p-Nitro-* en *p-Nitrosodiaethylaniline* gevondene niet op, ofschoon analogie in ééne der drie assenverhoudingen aanwezig is, en er in geringe mate vaste oplossing der twee komponenten mogelijk schijnt te zijn.

---

[1]) F. M. JAEGER, Versl. kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, April 1905, p. 651.

[2]) idem, Ueber Mischbarkeit von festen Phasen, Z. f. Kryst. 42, 236—276 (1906).

§ 2. Ortho-Nitro-Aceetanilide.

$C_6H_4(NO_2)_{(2)}.NH.CO\,CH_3$; smeltpunt: 87½° C.
(1)

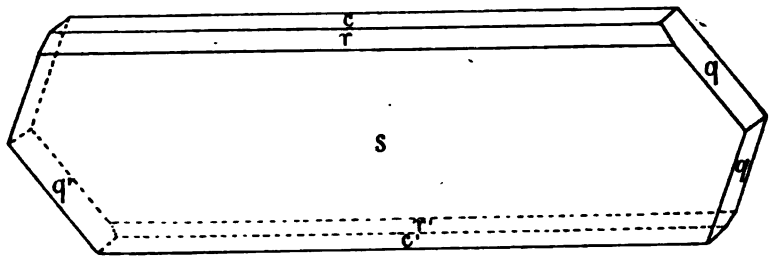


Fig. 1.

Deze verbinding is wegens hare groote oplosbaarheid in de meeste oplosmiddelen zeer bezwaarlijk in goed gekristalliseerden vorm te verkrijgen.

Het best gelukt 't nog uit verdunden aethylalkohol bij uiterst langzame verdamping. De stof kristalliseert dan in lichtgele, papierdunne plaatjes, met gestrekt zeshoekigen omtrek; de kristallen zijn zeer doorzichtig en geven scherpe signaalbeelden.

De symmetrie is *monoklien-prismatisch*; de assenverhouding werd, bij de hier geadopteerde keuze der vlakken-symbolen, berekend op:

$$a : b : c = 0{,}8935 : 1 : 1{,}9198$$
$$\beta = 83°51'.$$

Waargenomen vormen: $s = \{\bar{1}01\}$, sterk vóórheerschend en scherpe reflexen leverend; $r = \{101\}$, veel smaller, doch goed spiegelend; $c = \{001\}$, smaller dan r; $q = \{011\}$, eveneens smal, doch goed reflekteerend. De habitus is afgeplat volgens $\{\bar{1}01\}$, met aanzienlijke strekking volgens de b-as.

De volgende hoekwaarden werden bepaald:

	Gemeten:	*Berekend*:
$c : q = (001) : (011) =$	* 62°21′	—
$q : s = (011) : (10\bar{1}) =$	* 80°57′	—
$c : r = (001) : (101) =$	* 60° 4′	—
$r : s = (101) : (10\bar{1}) =$	49°45′	49°45′
$s : c = (10\bar{1}) : (00\bar{1}) =$	70°11′	70°11′

Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet gevonden.

In de orthodiagonaalzône is de uitdoovingsrichting overal loodrecht op de richting der b-as georienteerd. Op $\{\bar{1}01\}$ is geen merkbaar dichroïsme waar te nemen.

De optische eigenschappen der stof in konvergent gepolariseerd licht zijn zeer merkwaardig.

Voor de roode, gele en de meeste groene stralen van 't spectrum is het assenvlak {010}; buitengewoon sterke, geneigde dispersie; de assenhoek voor 't rood is veel grooter dan die voor 't groen. Het karakter der dubbele breking is positief.

Voor de blauwe en violette stralen daarentegen is het assenvlak loodrecht op {010} gelegen, met eene horizontale dispersie. De assenhoek voor alle stralen is slechts klein.

De kurieuze kleurverschijnselen in wit licht, bij deze stof, die dus tegelijk geneigde èn horizontale dispersie bezit, leenen zich bijzonder wel tot demonstratie van anomale dispersie bij tweeassige kristallen.

Het specifiek gewicht der kristallen is: 1,419 bij 15° C.; het aequiv. volume is dus 126,85.

Topische parameters: $\chi : \psi : \omega = 3{,}7578 : 4{,}2058 : 8{,}0744$.

§ 3. Ortho-Nitroso-Aceetanilide.

$C_6H_4(NO)_{(2)} . N_{(1)} H\text{-}COCH_3$; Smeltpunt: 108° C.

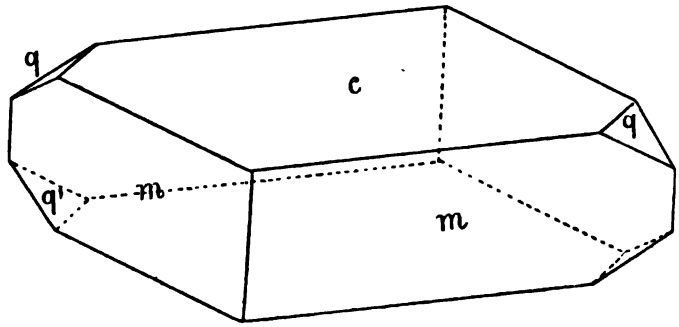


Fig. 2.

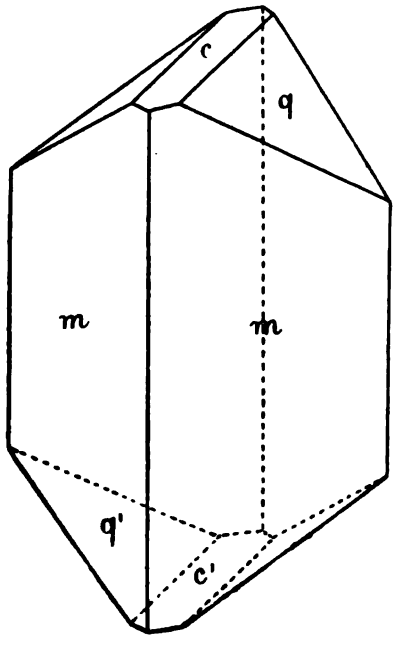


Fig. 3.

Door vriendelijke bemiddeling van den Heer F. Leuchs, te *München*, die deze stof het eerst heeft bereid (Berl. Ber. 40. 1083. (1907)), kreeg ik een kleine hoeveelheid kristallen dezer verbinding, welke uit heete alcoholische oplossing bij afkoelen verkregen waren. Zij vertoonden den habitus van fig. 2; uit een mengsel van aether en benzol verkreeg ik de dikprismatische kristallen van fig. 3. De prismavlakken waren, doordat zij vaak als ligvlakken der kristallen in de moederloog fungeeren, veelal gekromd en ongeschikt voor exacte meting, terwijl de vor-

men c en q steeds ideale reflexen leverden. De kristallen hebben eene prachtige smaragdgroene kleur en zijn volkomen doorzichtig.

De symmetrie is *monoklien-prismatisch*; de assenverhouding werd berekend op:

$$a : b : c = 0{,}8940 : 1 : 0{,}7295$$
$$\beta = 82° 6'$$

Waargenomen vormen: $c = \{001\}$, bij de uit alcohol verkregen kristallen vóórheerschend, en steeds goed glanzend; $m = \{110\}$, goed ontwikkeld, doch veelal kromvlakking; $q = \{011\}$, ideale reflexen leverend, en meestal met vrij groote vlakken uitgegroeid; $a = \{100\}$, uiterst smal en lichtzwak. De habitus is afgeplat volgens c of lang prismatisch parallel de c-as, met afplatting volgens twee evenwijdige vlakken van m. Uiterst volkomen splijtbaar naar $\{001\}$.

De volgende hoeken werden gemeten:

	Gemeten:	*Berekend:*
$c : m = (001) : (110) =$	* 84° 5¼′	—
$c : q = (001) : (011) =$	* 35° 51′	—
$m : m = (110) : (1\bar{1}0) =$	* 83° 3′	—
$m : q = (110) : (011) =$	61° 55½′	61° 51½′
$m : q = (110) : (0\bar{1}1) =$	72° 18′	72° 15′
$m : a = (110) : (100) =$	41° 34′	41° 31½′

Op $\{001\}$ onwaarneembaar, op $\{110\}$ daarentegen zeer duidelijk dichroïtisch; voor trillingen parallel aan de c-as: grasgroen, en voor trillingen loodrecht daarop: geelgroen. De uitdoovingshoek is moeilijk te bepalen; hij bedraagt circa 12° ten opzichte der c-as op de vlakken van $\{110\}$.

Het optisch assenvlak is $\{010\}$; op $\{001\}$ is éene as zichtbaar onder kleinen hoek met den normaal op dat vlak; de geneigde dispersie is buitengewoon sterk: $\rho < \nu$.

Het specifiek gewicht der kristallen bedraagt: 1.351 bij 15° C., 't aequiv-volume is 121.39.

Topische parameters: $\chi : \psi : \omega = 5.1206 : 5.7277 : 4.1784$.

§ 4. Eene geringe toevoeging van de Nitroso-verbinding aan de Nitro-verbinding bewerkt eene duidelijke depressie van het smeltpunt der laatste verbinding. Aangezien aldus geene zekerheid verkregen wordt omtrent het al- of niet-samenkristalliseeren dezer nauwverwante derivaten, daar ook eene smeltkromme met absoluut *minimum* voorhanden zijn kon, werden vooreerst eenige quantitatieve proeven gedaan, welke leerden, dat hier inderdaad eene gewone binaire smeltlijn met eutektikum voorhanden is. Voorts leerden meer gede-

tailleerde mikroskopische onderzoekingen, dat uit gemengde smelten der beide verbindingen, steeds een *mengsel* van de *gele* nitroaceetanilide-kristallen en de *groene* nitrosoaceetanilide-kristallen met geheel anderen habitus, zich afzet. Aan de zijde der nitrosoverbinding wordt eene merkbare hoeveelheid van het nitro-derivaat, door de afgescheiden kristallen als vaste oplossing meegevoerd; aan de zijde van 't nitro-derivaat echter kon langs dezen weg eene vorming van vaste oplossingen niet worden gekonstateerd. In elk geval, — zòo er al geringe menging is, — dan is deze aan de zijde van de nitroso-verbinding tot enkele weinige procenten der nitroverbinding bepaald; de hiaat is dus enorm uitgestrekt.

Tenslotte zij hier opgemerkt, dat beide stoffen zeer vluchtig zijn; de *damp* der nitroso-verbinding is *groengeel*.

Enkele proeven werden nog gedaan, om mengsels der twee verbindingen te doen sublimeeren. Daarbij bestaat het beslag van het konkave dekglaasje uit een netwerk van dendritische, sterk pleochroitische (kleurloos,—geelgroen) kristalletjes, waartusschen de ruitvormige kristallen der nitroso-verbinding benevens de gele, tot bundels vereenigde individuën der nitro-verbinding zich bevinden.

De eerstgenoemde kristallen bestaan voornamelijk uit de nitrosoverbinding, daarnevens bevatten waarschijnlijk sommige ook de nitroverbinding, zoodat hier een nieuw geval zou aanwezig zijn van de vorming van vaste oplossingen bij sublimatie. Wellicht leent zich dit tweetal verbindingen tot meting der dampspanningen dezer vaste oplossingen.

Zaandam, December 1907.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Meded. N°. 102ª uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden. H. KAMERLINGH ONNES: „*Isothermen van één-atomige gassen en hun binaire mengsels. I. Isothermen van helium tusschen* + 100° *C. en* — 217° *C.*

§ 1. Bij de groote rol, die de theorie van VAN DER WAALS in vele hoofdstukken der thermodynamica speelt, zijn experimenteele gegevens omtrent de toestandsvergelijking eener stof van des te meer waarde naarmate de onderlinge werking der moleculen van die stof beter wordt weergegeven door de onderstellingen, van welke VAN DER WAALS uitging. De kennis van de toestandsvergelijking der eenatomige gassen, wier moleculen wij voorshands als de meest eenvoudige moeten beschouwen, is uit dit oogpunt het meest gewenscht.

In Med. N°. 69 (Mrt. 1901) over de isothermen van tweeatomige gassen en hun binaire mengsels werd dan ook reeds opgemerkt, dat het onderzoek van het isothermennet van argon en van helium nog belangrijker uitkomsten beloofde dan de voltooiing van het isothermennet van de vroeger permanent genoemde gassen, in 't bijzonder van de waterstof bij lage temperaturen, op welk onderwerp van de inrichting van het cryogeen laboratorium af (verg. Med. N°. Dec. '94) mijne aandacht in de eerste plaats gevestigd was gebleven. Maar de moeilijkheid om over argon en helium in zoo zuiveren toestand en in zoo groote hoeveelheid te beschikken als voor isothermenbepaling noodig is, stonden nog langen tijd na Med. N°. 69 aan het bepalen van de toestandsvergelijking van helium en argon in den weg.

Terwijl de onderzoekingen over de isothermen van waterstof voortgezet worden, en tot Mededeelingen leidden, (Med. N°. 78, 97^a, 99^a en 100^a), die weldra naar ik hoop door meerdere gevolgd zullen worden, zijn intusschen ook de moeilijkheden aan het verkrijgen van zuiver helium geheel en van zuiver argon nagenoeg overwonnen. Wat de bereiding van zuiver helium betreft, vooral, doordat de waterstofcirculatie (Med. N°. 94f) de beschikking over de noodige vloeibare waterstof gaf. Zoo kunnen dus nu reeds de eerste metingen uit de serie, die betrekking zal hebben op de een-atomige gassen en hunne binaire mengsels, worden medegedeeld.

Zij betreffen de isothermen van helium, die thans de plaats hebben ingenomen, door de isothermen van waterstof bekleed voor dat de waterstof vloeibaar was gemaakt. De isothermenbepalingen moeten o. a. voeren tot de berekening van de kritische grootheden voor helium. Uit de thans medegedeelde bepalingen van de samendrukbaarheid langs verschillende isothermen bij betrekkelijk geringe en niet veel verschillende dichtheden kan reeds bij benadering de kritische temperatuur worden berekend.

§ 2. *Overzicht der bepalingen.*

Dit onderzoek bevat een zestal isotherme-bepalingen. De temperaturen, waarbij zij geschiedden, werden constant gehouden en bepaald op dezelfde wijze als bij de in vorige Mededeelingen N°. 97^a (Dec. 1906), N°. 99^a (Juni 1907), N°. 100^a (Oct. 1907) vermelde isothermenbepalingen voor waterstof. De aflezingen van den waterstofthermometer werden door middel van formule (4) van Med. N°. 97^b met de nieuwe coëfficienten van § 2 van Med. N°. 101^b tot de absolute schaal teruggebracht. De zoo gereduceerde zes temperaturen op welke de isothermen betrekking hebben zijn

$+100°.35$, $20°.00$, $0°$, $-103°.57$, $-182°.75$ en $-216°.56$.

Behalve de metingen bij de beide standaard-temperaturen 0° C. en 100° C.[1]) en die bij lage temperaturen, werd bij 20° C. eene bepaling gedaan om de gegevens te verkrijgen ter berekening van de hoeveelheid gas aanwezig in de steel van den piezometer en in de overige deelen, die bij de metingen op gewone temperatuur blijven.

De dichtheden, bij welke de druk werd waargenomen, liggen voor al deze isothermen ongeveer tusschen dezelfde grenzen, welke door de afmetingen van den piëzometer en door de manometer werden gesteld. De uiterste grenzen van de dichtheid zijn 25 en 54 maal de normale. De piëzometer en verdere hulpapparaten waren volkomen dezelfde, die voor de bepalingen van C. BRAAK en mij (zie Med. N°. 100[b] Nov. 1907) met waterstof van 0° C. en 100° C. hebben gediend. De bevredigende resultaten daarbij verkregen verhoogen tevens de betrouwbaarheid der thans beschouwde metingen.

§ 3. *Uitkomsten voor* pv_A.

Onderstaande tabel bevat de uitkomsten der bepalingen. De eerste kolom geeft het nummer der waarneming, de tweede de temperatuur boven 0° C. op de absolute schaal gemeten, de derde den druk in atmosfeeren, de beide volgenden het product pv_A en de dichtheid d_A, waarbij het volume van het gas v_A in het normaalvolume (dat bij 0° C. en 1 atmosfeer) en de dichtheid d_A in de normale dichtheid (die bij 0° C. en 1 atmosfeer) is uitgedrukt. (Vergelijk de overeenkomstige tabellen van bovengenoemde isotherme-bepalingen van waterstof).

De berekening dezer uitkomsten geschiedde als volgt.

Eerst werden de punten der isotherme van 20° C. berekend (vergelijk ook § 8 van Med. N°. 79 (Maart 1902)) en door de 3 punten met behulp van de methode der kleinste kwadraten de coëfficienten A_A en B_A van de kromme

$$pv_A = A_A + \frac{B_A}{v_A} + \frac{C_A}{v_A^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

bepaald. Voor C_A werd een bepaalde waarde aangenomen, daar de dichtheden te klein zijn om dezen coëfficient met voldoende zekerheid te bepalen. Schrijft men de vergelijking van VAN DER WAALS, met de tweede correctie voor de afmeting der moleculen in den vorm

$$pv = RT + \frac{RTb - a}{v} + \frac{5}{8}\frac{RTb^2}{v^2},$$

waar v het volume van het gas onder den druk p bij de absolute temperatuur T, uitgedrukt in het theoretisch normaalvolume is, (zie

[1]) De uitkomsten bij 0° C. en 100° C. zijn onvereenigbaar met die van RAMSAY en TRAVERS, die trouwens zonderlinge afwijkingen vertoonen.

TABEL I. He. Waarden van pv_A.

N°.	t	p	pv_A	d_A
1	+ 100°.35	42.574	1.38725	30.689
2		54.459	1.39314	39.091
3		66.590	1.39929	47.589
4	+ 20°.00	27.539	1.08664	25.343
5		36 303	1.09028	33.297
6		53.708	1.09918	48.862
7	0°	26.634	1.01392	26.268
8		38.565	1.01851	37.864
9		50.240	1 02521	49.004
10	— 103°.57	20.580	0.63135	32.597
11		24.100	0.63296	38.075
12		29.185	0.63597	45.891
13		33.383	0.63845	52.288
14	— 182° 75	13 751	0.33787	40.699
15		16.019	0.33898	47.257
16		18.189	0.34025	53.457
17	— 216°.56	9.564	0.21132	45.259
18		10.502	0 21171	49.606
19		11.448	0.21219	53.954

Med. N°. 71 § 3) en stelt men de waarde van A_1 bij 0°, $A_{1_0} = 1$, welke benadering voor ons doel geoorloofd is, dan vindt men (verg. Med. N°. 71 § 3) voor de waarde C_{A_T} van C_A bij T

$$C_{A_T} = {}^5/_8 RT b^2,$$

waarin $R = 0.0036619$ is. Voor b werd schattenderwijs (vergelijk de noot bij § 6 van Med. N°. 96^c Jan. 1907) eerst 0.0005 later, zie § 4, 0,000432 gesteld. Met de zoo voor 20° verkregen coëfficienten A_A en B_A werden in eerste benadering de herleidingen tot 0° voor het gas, dat zich buiten het reservoir op de temperatuur van 20° en voor een klein deel op de kamertemperatuur bevindt, uitgevoerd. Met de drie punten, welke zoodoende op de isotherme van 0° werden

gevonden, zijn daarop ook voor deze temperatuur de viriaalcoëfficienten A_A en B_A uitgerekend.

Hieruit volgt A_{A_0}, de waarde van pv_A voor $d=0$ door de formule

$$A_{A_0} = 1 - B_{A_0} - C_{A_0}$$

Met den spanningscoëfficient van uit 0° C. voor den toestand van AVOGADRO, 0.0036619 (vergelijk § 1 van Med. N°. 101^b) volgt voor 20°:

$$A_{A_{20}°} = A_{A_0}(1 + 0.0036619 \times 20),$$

zoodat op de isotherme van 20° een vierde punt verkregen wordt, dat de bepaling der helling der pv_A lijn veel zekerder maakt (vergelijk het slot van § 1 van Med. N°. 101^b). De berekening van A_A en B_A werd nu herhaald en met behulp van deze verbeterde coëfficienten de isotherme van 0° C. opnieuw berekend en met deze benaderingsrekening voortgegaan tot zij geen verandering meer opleverde. Voor 20° C. wordt op deze wijze (bij $b=0{,}000432$ gevonden:

$$pv_{A_{20}} = 1.07273 + 0.0005337\, d_{20} + 0.000000125\, d_{20}^2 \quad . \quad . \quad (3)$$

Met deze formule zijn de correcties bij de isothermenbepalingen berekend. De laatste werden overigens volgens de vroegere Mededeelingen behandeld.

§ 4. *Individueele viriaalcoëfficienten.*

De gegevens van tabel I kunnen worden aangewend om met behulp der methode der kleinste kwadraten de coëfficienten A_A en B_A af te leiden. C_A werd overeenkomstig formule (2) der vorige § aangenomen. Voor iedere isotherme werd $pv_{A,d=0}$ berekend en deze waarde werd, alsof zij een nieuw waargenomen punt betrof, aan de overige toegevoegd. Deze berekening geschiedde met de waarde $A_{A_0} = 0.99949$, die zich laat afleiden uit de waarde voor de coëfficienten B_A en C_A voor 0° bij de benaderingsrekening van het einde der vorige § ten slotte verkregen. Tabel II bevat de viriaalcoëfficienten en tevens de verschillen tusschen de gegeven pv_A's en de berekende. Deze verschillen zijn gerangschikt volgens de opklimmende dichtheden. De eerste kolom van verschillen heeft derhalve betrekking op $pv_{A,d=0}$, de overige op de gegevens van tabel I in de bovengenoemde volgorde.

De berekening der B_A zijn nog onzeker, omdat voor C_A geschatte waarden zijn genomen. Bepalingen van pv_A bij grootere dichtheden, welke eene onafhankelijke bepaling van C_A mogelijk zullen maken, worden voorbereid.

Dat de schattingen van C_A niet al te onjuist zijn, kan als volgt worden toegelicht. Voor 100° volgt uit Tab. II $B_{A\,100°} = 0.000673$. Men kan in de onderstellingen, welke aan de vergelijking van VAN DER WAALS ten grondslag liggen, uit de waarde voor twee temperaturen van

TABEL II. He. Individueele viriaalcoëfficienten.
Afwijkingen der pv_A van de berekende.

t	A_A	$10^3 B_A$	$10^6 C_A$	10^5 (W—R)				
+100°.35	1.36667	+0.673	+0.16	+10	−21	−10	+22	
+ 20°.00	1.07273	+0.534	+0.13	− 3	+31	−36	+ 8	
0°	0.99970	+0.512	+0.12	−20	+80	−75	+15	
−103°.57	0.62036	+0.337	+0.07	+11	− 7	− 32	0	+27
−182°.75	0.33066	+0.176	+0.04	1	− 1	− 8	+ 8	
−216°.56	0.20693	+0.093	+0.02	0	+ 1	− 3	+ 3	

$B = RTb - a$ met $B = B_A(A_{1_0})$ de waarde van b afleiden, en vindt dan $b = 0.000432$, hetgeen niet veel verschilt van de op andere gronden eerst schattenderwijze aangenomen waarde 0.0005. Ofschoon de hier gevolgde berekening zeer onzeker is, werd toch aan de gevonden waarde de voorkeur boven de eerste geschatte waarde gegeven, en zijn op grond daarvan de eerst met 0,0005 uitgevoerde berekeningen met deze nieuwe schatting herhaald. De verschillen liggen binnen de grens der waarnemingsfouten.

§ 5. *Bepaling van de kritische temperatuur van helium.*

Uit de gegevens van tabel II kan men tot een eerste schatting komen omtrent de kritische temperatuur van helium, die uit isothermen bepalingen binnen het thans toegankelijke gebied van temperaturen zal worden gevonden.

Door extrapolatie blijkt, dat het BOYLE-punt in de nabijheid van −250° zal liggen. Voor waterstof is hiervoor gevonden (vergelijk Med. N°. 100a) — 166°. Neemt men voor de kritische temperatuur van waterstof aan 30° K. dan volgt hieruit voor helium

$$T_{kHe} = 6°\ K.$$

Wordt deze waarde van T_k aangenomen zoo komt met het temperatuurgebied — 217° tot — 183° voor helium overeen dat van 0° tot + 200° voor waterstof. Door de wet der overeenstemmende toestanden op de hellingen der pv_t-lijnen bij beide stoffen in de nabijheid van deze gelijkwaardige temperatuurgrenzen toe te passen, komt men tot een iets geringere waarde van de kritische temperatuur nl.

$$T_{kHe} = 5°.3\ K.$$

Ook deze waarde meen ik nog als een bovenste grens voor de kritische temperatuur van He te mogen beschouwen, daar het mij waarschijnlijk voorkomt, dat He ten opzichte van H_2 van de wet der

overeenstemmende toestanden in dien zin zal afwijken, dat de kritische temperatuur lager gevonden zal worden dan uit de toepassing van die wet op overeenstemmende toestanden bij waarden der gereduceerde temperaturen vele malen grooter dan 1 zou volgen.

Slechts van een eerste schatting op grond van isothermebepalingen kan thans nog sprake zijn. De bepaling der isothermen van — 253° en — 259°, die onder handen is, zal spoedig naar ik hoop tot een meer vertrouwbare schatting kunnen leiden.

Ten slotte betuig ik gaarne mijn dank aan den Heer C. BRAAK voor zijne hulp bij dit onderzoek.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Meded. N°. 102*b* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden. H. KAMERLINGH ONNES: *„Over het meten van zeer lage temperaturen. XIX. Afleiding van den spanningscoëfficient van helium voor den internationalen heliumthermometer en herleiding van de aflezingen op den heliumthermometer tot de absolute schaal."*

§ 1. *Spanningscoëfficienten van helium.* Daar de ligging van het absolute nulpunt met voldoende nauwkeurigheid bekend is - in Med. 101*b* is uit de Leidsche waarnemingen over waterstof $T_{0°C.} = 273°.08\ K$ afgeleid, eene waarde, die wegens de overeenstemming met andere bepalingen waarschijnlijk zeer weinig van de juiste zal afwijken — kan men met behulp van de in de vorige mededeeling bepaalde viriaalcoëfficienten B_A voor helium bij 0° C. en 100° C. de spanningscoëfficienten van helium bij verschillende dichtheden voor dit temperatuurgebied berekenen. Voor den spanningscoëfficient van den *internationalen* [1]) *heliumthermometer*, den gemiddelden relatieven spanningscoëfficient van 0° tot 100° C. voor helium met de dichtheid, behoorende bij den nulpuntsdruk van 1000 m.M., $\left[{}^{0°\ \text{tot}\ 100°\ C.}_{\alpha_v}\right]_i$, of kortweg ${}_i\alpha_v$, geeft de formule

$$100\,.\,{}_i\alpha_v = \frac{A_{1_0} \times 0{,}36619 + (B_{A,100°\,C.} - B_{A0°\,C.})\frac{100}{76}}{A_{1_0} + B_{A,0°\,C.}\frac{100}{76}} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

[1]) De schaal van den waterstofthermometer van constant volume bij 1000 mM. nulpuntsdruk wordt veelal de schaal van den normalen waterstofthermometer (zoo ook in Med. N°. 97*b*) genoemd. Daar men 0° C. en 760 mM. als den normalen toestand bij gassen aanduidt, schijnt het mij de voorkeur te verdienen de zooeven genoemde schaal die van den *internationalen* waterstofthermometer te noemen. Evenzoo zal men dan moeten spreken van den internationalen heliumthermometer.

$$^{He}_{i}a_v = 0.0036615.$$

Neemt men in aanmerking dat volgens tabel II van Med. N°. 102^c de isotherme van 0° betrekkelijk groote waarden voor $W - R_i$ geeft, dan schijnt de isotherme van 20° C., waar de $W - R_i$ slechts klein zijn, meer betrouwbaar voor de hierboven gegeven afleiding. Daarom is ook $\left[\begin{smallmatrix}0°\,C.-0°\,C.\\ a\end{smallmatrix}\right]_{1000\ mM.}$ berekend met behulp van de gegevens voor 20° C. en 100°.35 C. De afwijkingen van de absolute schaal voor den waterstofthermometer bij 20° C. verwaarloozende, werd door rechtlijnige extrapolatie $B_{A,0°C.}$ bepaald. Dit gaf

$$B_{A,\,0°C.} = 0.0_s499,$$

waaruit volgt

$$A_{A_0} = 0.99950.$$

Met deze nieuwe gegevens volgt uit formule (1) van deze §

$$^{He}_{i}a_v = 0\ 0036618.$$

Uit de gegevens voor B_A van tabel II der vorige Mededeeling en $T_{0°C.} = 273^c.08\ K$ laten zich op de wijze van § 2 van Med. N°. 97^b de correcties van de aflezingen van den helium-thermometer van constant volume met gegeven nulpuntsdruk tot de absolute schaal bepalen. Deze zijn voor eennulpuntsdruk van 1000 mM. berekend en in tabel I vereenigd, waarin de overige kolommen dezelfde beteekenis hebben als de overeenkomstige van tabel XVI van Med. N°. 97^b.

TABEL I. Correctie van den internationalen helium-thermometer tot de absolute schaal.

ϑ	$10^3 . B'_T$	$(\Delta\vartheta)_a$	$(\Delta\vartheta)_b$
100°.00	+ 0.492		
0° (*a*)	+ 0.513		
0° (*b*)	+ 0.500		
— 103°.57	+ 0.544	+ 0°.0034	— 0°.006
— 182 .75	+ 0.532	+ 0.0158	+ 0 .002
— 216 .56	+ 0.463	+ 0.0252	+ 0 .010

De met (*a*) aangeduide correcties zijn berekend met de waarden van $B_{A.0°C.}$ uit de directe bepaling, voor (*b*) is de met $B_{A20°}$ omgerekende waarde gebruikt (vergelijk de vorige Mededeeling). Die van kolom (*b*) zijn waarschijnlijk op grond van het in de vorige § opgemerkte de betrouwbaarste.

§ 3. *Bepalingen van andere waarnemers.*

Ter vergelijking met de uitkomsten der beide vorige §§ kunnen slechts dienen de bepalingen van TRAVERS, SENTER en JACQUEROD. [1]) Zij vinden :

1°. voor den spanningscoëfficient van den heliumthermometer bij 700 mM. nulpuntsdruk $\left[{}^{0°C-100°C}_{\quad a_v \quad}\right]_{700} = 0.00366255$ hetgeen overeenkomt met 0.0036628 voor $\left[{}^{0°C-100°C}_{\quad a_v \quad}\right]_i$, en

2°. voor het verschil der aanwijzingen van den heliumthermometer t_{He} en den waterstofthermometer t_{H_2} (beide van ongeveer 1000 mM. nulpuntsdruk) bij het kookpunt van zuurstof $(t_{H_2} - t_{He})_{-180°\,C.} = 0°.10$, en bij dat van waterstof $(t_{H_2} - t_{He})_{-252°C.} = 0°.20$, verschillen die zoo belangrijk zijn, dat CALLENDAR [2]) er uit afleidt, dat de correcties van den heliumthermometer tot de absolute schaal negatief zijn.

Beide van de mijne sterk afwijkende uitkomsten kunnen ongedwongen verklaard worden, wanneer men aanneemt, dat de bepaling van den spanningscoëfficient van helium door TRAVERS, SENTER en JACQUEROD niet de juiste waarde heeft opgeleverd. Herleidt men nl. de door hen gevonden verschillen in aanwijzing van hun helium- en hun waterstofthermometer met behulp van de correcties van ieder deze thermometers tot de absolute schaal, die in Med. N°. 100[a] en in Tab. I van deze Mededeeling gegeven zijn, tot het verschil in aflezingen op de absolute schaal, welke men bij dezelfde temperatuur vindt met behulp van den waterstofthermometer, die θ_{H_2} geeft, en met behulp van den heliumthermometer, die θ_{He} geeft, zoo blijft bij — 182° over een verschil

$$(\theta_{H_2} - \theta_{He})_{-182°} = 0°.10 - 0°.049 - 0°.002 = 0°.05$$

terwijl men door extrapolatie van de tot — 217° gevonden correcties voor — 252° zou vinden

$$(\theta_{H_2} - \theta_{He})_{-252°} = 0°.20 - 0°.12 - 0°.02 = 0°.10.$$

Nu is bij de berekening der temperaturen t_{H_2} en t_{He} door genoemde onderzoekers de spanningcoefficient van den heliumthermometer $\left({}^{He}_{i}\,a_v\right)_{Travers}$ gelijk genomen aan die van den waterstofthermometer bij denzelfden nulpuntsdruk (voor 1000 mM. dus 0.0036628). Wanneer de door mij toegepaste correcties juist zijn

[1]) Phil. Trans. Ser. A. Vol. 200 p. 105—180. Door KUENEN en RANDALL (Proc. Roy. Soc. Vol. 59) is eene bepaling verricht, die daar zij alleen op het oog had uit te maken of het helium zich normaal gedraagt, niet tot de nauwkeurigheid opgevoerd is, noodig om haar aan isothermebepalingen te kunnen toetsen.

[2]) Phil. Mag. [6] 5. 1903.

moet dus, opdat $\theta_{H_2} - \theta_{He} = 0$ zal worden bij $-182°$ die spanningscoëfficient verminderd worden met 0.0000010, zoodat

$$\overset{He}{\underset{i}{\alpha_v}} = 0.0036618$$

wordt en opdat $\theta_{H_2} - \theta_{He} = 0$ zal worden bij $-252°$ met 0,0000013 zoodat

$$\overset{He}{\underset{i}{\alpha_v}} = 0,0036616$$

zou worden.

De eerste waarde, die zonder extrapolatie is afgeleid en daarom het meeste vertrouwen verdient, blijkt volkomen overeen te stemmen met de in § 1 door mij uit de isothermen gevondene.

Met betrekking tot de hier gevolgde afleiding kan nog worden opgemerkt, dat zij tamelijk groote nauwkeurigheid toelaat. Kan ook de zekerheid der temperatuurbepalingen, waarop ze berust, worden betwijfeld wat de absolute waarde betreft, zoo is het verschil, dat hier alleen in aanmerking komt, met voldoende zekerheid bekend. De zooeven medegedeelde berekening geeft derhalve niet alleen een verklaring der door TRAVERS, SENTER en JACQUEROD gevonden te groote verschillen maar tevens een gewenschte contrôle voor den in § 1 gevonden spanningscoëfficient van helium.

Anatomie. — De Heer BOLK biedt voor de Werken der Akademie eene verhandeling aan van Mej. CLARA POLAK: *„Die Anatomie des Genus Colobus."*

De Voorzitter benoemt de Heeren VAN WIJHE en WEBER om daarover verslag uit te brengen in de volgende vergadering.

De Heer MOLENGRAAFF deelt mede dat hij zich gekweten heeft van zijn opdracht de Akademie te vertegenwoordigen bij gelegenheid van de feestelijke viering van het honderdjarig bestaan van de Geological Society of London.

Op 26 September 1907 had in Burlington House een luisterrijke receptie plaats, waar Sir ARCHIBALD GEIKIE als voorzitter der Geological Society de gelukwenschen in ontvangst nam van afgevaardigden uit nagenoeg alle landen der wereld. Aan één der afgevaardigden van ieder land werd gelegenheid gegeven eenige minuten het woord te voeren; voor Nederland sprak de Heer WICHMANN, die den Senaat der Rijksuniversiteit te Utrecht vertegenwoordigde. Op die receptie

overhandigde de Heer MOLENGRAAFF het adres der Akademie. De Geological Society heeft hare gasten een schitterende ontvangst bereid. De gastvrijheid bepaalde zich niet tot Londen, maar ook de Universiteiten van Oxford en Cambridge hebben bij die gelegenheid de afgevaardigden uit het buitenland tot een bezoek uitgenoodigd en zeer gastvrij ontvangen.

Voor de Boekerij wordt door den Heer EINTHOVEN aangeboden de dissertatie van den Heer B. VAANDRAGER: „*Verdere onderzoekingen over het Electrocardiogram*".

De vergadering wordt gesloten.

ERRATUM.

p. 309 r. 16 v. b. lees locaalvariometer inplaats van galvanometer.
„ 18—19 v. b. lees bifilairmagnetische inpl. v. galvanometrische.

(9 Januari, 1908).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 25 Januari 1908.

Voorzitter: de Heer D. J. KORTEWEG.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 507.
Verslag van de Heeren W. EINTHOVEN en H. J. HAMBURGER omtrent een schrijven van den Minister van Binnenlandsche Zaken over deelneming van Nederland aan het Physiologisch Laboratorium op den Col d'Olen bij de Monte Rosa, p. 508.
Verslag van de Heeren J. W. VAN WIJHE en MAX WEBER over eene verhandeling van Mej. CLARA POLAK, getiteld: „Die Anatomie des Genus Colobus", p. 509.
Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1907, p. 510.
H. A. LORENTZ: „Electromagnetische verschijnselen en de beweging der aarde," p. 511.
J. J. BLANKSMA: „Over de constitutie van het oxymethyldinitro-benzonitril van VAN GEUNS". (Aangeboden door de Heeren A. F. HOLLEMAN en P. VAN ROMBURGH), p. 512.
F. M. JAEGER: „Over de analogie in kristalvorm bij de halogeensubstitutieprodukten van koolwaterstoffen met open koolstofketen". (Aangeboden door de Heeren P. VAN ROMBURGH en A. P. N. FRANCHIMONT), p. 514.
P. H. SCHOUTE: „Over vierdimensionale netten en hun ruimte doorsneden", (1ste gedeelte), p. 526.
Z. P. BOTMAN: „Bijdrage tot de kennis der oppervlakken met constante gemiddelde kromming". (Aangeboden door de Heeren JAN DE VRIES en W. KAPTEYN), p. 537.
J. C. KLUYVER: „Over het cyclische minimaalvlak", p. 550.
Aanbieding van het portret van wijlen den Heer C. H. D. BUYS BALLOT, p. 562.
Aanbieding van een boekgeschenk, p. 562.
Errata, p. 563.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Bericht van den Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen;

2°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 3 Januari 1908 met verzoek om bericht en raad omtrent een schrijven van H. M. Gezant te Rome over deelname van Nederland aan het Physiologisch Laboratorium op den Col d'Olen bij de Monte Rosa.

In handen gesteld van de Heeren EINTHOVEN en HAMBURGER om advies.

De Heer EINTHOVEN brengt ook namens den Heer HAMBURGER het volgende rapport uit over: *„Een missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken betreffende het deelnemen van Nederland aan de werkzaamheden op het laboratorium van den Col d'Olen."*

Op verzoek van den voorzitter der Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen hebben ondergeteekenden de eer, rapport uit te brengen over een aan de Afdeeling gericht schrijven van den Minister van Binnenlandsche Zaken van 3 Januari 1908, Afd. KW. No. 33. Hierin wordt om bericht en raad gevraagd betreffende de wenschelijkheid, dat Nederland bijdraagt in de kosten van een nieuw opgericht laboratorium op den Col d'Olen, om zich daardoor het recht te verschaffen, aan de werkzaamheden, die er zullen worden verricht, te mogen deelnemen.

Het bedoelde laboratorium is op 3000 Meter hoogte op de Monte Rosa op initiatief van den Italiaanschen physioloog A. M o s s o gebouwd. Het is voor onderzoekingen op verschillend gebied bestemd: plantkunde, dierkunde, bacteriologie, physiologie, natuurkunde en meteorologie, voor elk van welke vakken een afzonderlijk locaal aanwezig is, terwijl er behalve de vertrekken, die voor alle laboranten tezamen beschikbaar zijn, als de bibliotheekkamer, de eetkamer enz., nog 18 afzonderlijke slaapkamers worden aangetroffen.

De geleerden, die er wenschen te werken, vinden in het laboratorium te hunner beschikking een boekenverzameling, een magazijn van glaswerk, chemicaliën en een aantal der meest gebruikelijke instrumenten, zoodat zij een voortreffelijke gelegenheid hebben, om op een hoogte van 3000 M. boven de zee, d. i. een paar honderd Meter boven de grens der eeuwige sneeuw, veelzijdige onderzoekingen in te stellen.

De ligging van het laboratorium op den Col d'Olen biedt bovendien nog een bijzonder gunstige gelegenheid aan voor vergelijkende onderzoekingen op verschillende hoogten. In eenige uren kan men van Novarra, in de Po-vlakte, den Col d'Olen bereiken, en van hier kan in een tocht van 4 uur de Punta Gnifetti worden beklommen, waar zich op 4560 Meter de Capanna Regina Margherita bevindt. Dit is een physiologisch laboratorium dat met den steun van de Koningin Moeder van Italië op initiatief van M o s s o is gesticht en dat een internationaal karakter draagt. Het bestuur van de internationale associatie van Akademies heeft in zijn vergadering van Juni 1903 te Londen eenstemmig het belang en het nut van de Capanna Regina Margherita erkend.

Men kan zich een plaats in het laboratorium van den Col d'Olen

verzekeren door slechts eenmaal fr. 5000.— te betalen. In verschillende landen van Europa en ook in Amerika heeft men zich reeds rechten op een of meer plaatsen verworven en de ondergeteekenden aarzelen niet, ook het verkrijgen van een plaats voor Nederland met warmte aan te bevelen. De onderzoekingen, die in het laboratorium van den Col d'Olen zullen worden verricht, hebben een hoog wetenschappelijke beteekenis en Nederland mag in de rij der naties niet achterblijven, waar het geldt deze inrichting van algemeen belang te steunen en er de werkzaamheden te bevorderen.

De ondergeteekenden meenen ten slotte nog te kunnen aanbevelen, dat een matige tegemoetkoming voor reis- en verblijfkosten worde verleend aan den Nederlandschen onderzoeker, die bereidt wordt gevonden, gedurende een bepaalden tijd op den Col d'Olen werkzaam te zijn. Wel is waar wordt een werktafel en een slaapkamer op het laboratorium gratis verstrekt, maar het verblijf aldaar brengt toch onvermijdelijke onkosten met zich mede.

De uitzending van een Nederlandsch geleerde zou onder het patronaat der Akademie kunnen plaats hebben.

W. Einthoven.
H. J. Hamburger.

De conclusie van het rapport wordt goedgekeurd.

Anatomie. — De Heer Van Wijhe brengt ook namens den Heer Weber het volgende verslag uit over eene verhandeling van Mejuffrouw Clara Polak getiteld: „*Die Anatomie des Genus Colobus*".

Mejuffrouw Polak heeft eene lijvige verhandeling van meer dan 338 pagina's vergezeld van 57 teekeningen voor de Verhandelingen der Akademie aangeboden.

Zij levert daarin eene monographie over de anatomie van het apengeslacht Colobus, welke anatomie tot nog toe zoo goed als onbekend was. Als onderzoekingsmateriaal stond haar slechts een enkel, vrouwelijk, exemplaar van Colobus guereza ter beschikking, dat zij zoo volledig mogelijk onderzocht, waardoor zij bouwstoffen van waarde leverde voor eene vergelijkende ontleedkunde der Primaten.

Zij behandelt achtereenvolgens het spierstelsel, het periphere zenuwstelsel, het darmstelsel, de organen van den hals, de borstingewanden, het urogenitaalstelsel en het arterieele vaatstelsel. Aan het slot geeft zij onder het opschrift „Resumee" eenige beschouwingen van algemeenen aard.

Het werk draagt de blijken van zorgvuldig en nauwkeurig onderzoek van het zeldzame materiaal, weshalve de ondergeteekenden de eer hebben aan de Akademie voor te stellen het in hare verhandelingen op te nemen.

J. W. VAN WIJHE.
MAX WEBER.

De conclusie van het verslag wordt goedgekeurd.

Aardkunde. — De Heer DE BRUYN brengt het jaarverslag uit der Geologische Commissie over het jaar 1907.

In den loop van dit jaar hebben geene veranderingen in het personeel der Commissie plaats gehad.

Geene mededeelingen omtrent grondboringen of terreininsnijdingen werden ons gedaan door Ingenieurs, die bij den Rijks- en Provincialen Waterstaat of bij particulieren werkzaam zijn.

Van Dr. H. G. JONKER, thans hoogleeraar bij de Mijnbouwkundige Afdeeling der Technische Hoogeschool te Delft, verscheen de lijst in Juni l.l. in het licht (als n°. 36 onzer Mededeelingen omtrent de Geologie van Nederland), welke lijst wij in ons vorig Verslag aangekondigd hebben.

Deze lijst van geschriften, welke handelen over of van belang zijn voor de Geologie van Nederland omvat 1413 nummers, en is voorzien van een Personen-register en een Bibliotheken-register. In het laatste is vermeld in welke der voornaamste onzer openbare Bibliotheken deze geschriften te vinden zijn.

Voorts deed Prof. JONKER nog een onderzoek naar de Erratica in het Diluvium van Maarn, Urk en Wieringen. In Maarn vond hij een groot aantal kalksteenen met ondersilurische en midden-silurische fossielen in het zwerfsteenengezelschap; te Urk kon hij twee verschillende keileemen van verschillenden oorsprong onderscheiden. Hij zal zijne uitkomsten later voor de Mededeelingen der Commissie uitvoerig mededeelen.

Dr. H. VAN CAPPELLE volbracht te Sneek een voorloopig onderzoek van de talrijke aardmonsters, welke afkomstig zijn van een aantal diepe boringen in den omtrek van Sneek verricht ten dienste voor eene aldaar aan te leggen waterleiding. Ten tweede volbracht hij in Friesland een onderzoek in het diluviale gebied dier provincie. Een verslag van de uitkomsten van dat onderzoek verwachten wij over niet langen tijd.

Prof. J. A. GRUTTERINK zette met behulp zijner leerlingen in de maand Augustus de geologische kaarteering, die door wijlen Prof. SCHROEDER VAN DER KOLK aangevangen is, en welke wij in onze vorige verslagen vermeld hebben, voort. De bladen van het Loo n°. 412 en van Beekbergen n°. 432 werden thans bewerkt. [1])

Verder houdt Prof. GRUTTERINK zich bezig met de samenstelling van een verslag, waarnit zal moeten blijken, welke uitkomsten in de laatste jaren door de kaarteering van de horizontale en vertikale strooken, ingevolge het voorstel van wijlen Prof. SCHROEDER VAN DER KOLK, zijn verkregen.

In ons vorige verslag deelden wij mede, dat de Heer WATERSCHOOT VAN DER GRACHT, Ingenieur-Direkteur der Rijksopsporing van Delfstoffen, ons boorkernen en aardmonsters van zijne diepboringen heeft toegezegd. Hij heeft in den loop dezes jaars aan die belofte voldaan, waarvoor wij hem onzen dank betuigen, en gaat met deze toezending geregeld voort.

Ten slotte hebben wij de eer u voor te stellen:

1°. den dank der Akademie te betuigen aan Prof. GRUTTERINK voor zijne leiding in den afgeloopen zomer van de werkzaamheden bij de kaarteering.

2°. aan Zijn Excellentie den Minister van Waterstaat opnieuw eene toelage van *f* 1000 voor het jaar 1909 aan te vragen ter bestrijding van de kosten voor geologisch onderzoek van Nederland.

De Geologische Commissie,
C. LELY, *Voorzitter.*
J. M. VAN BEMMELEN, *Sekretaris.*
K. MARTIN.
H. E. DE BRUIJN.
G. A. F. MOLENGRAAFF.

De conclusies van het verslag worden goedgekeurd.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ doet eene mededeeling over: *„Electromagnetische verschijnselen en de beweging der aarde"*. (Deze mededeeling zal in het Verslag der volgende maand verschijnen).

[1]) De westelijke helft van de beide bladen 412 en 432 werd gekaarteerd door den Heer J. C. SCHAGEN VAN SOELEN Mijn-ingenieur als ploeghoofd, en als medewerkers door de Heeren mijnstudenten: G. E. J. WIESSING, W. F. GIESOLF, E. C. N. VAN HOEPEN, G. TH. SCHUYLING, C. TH. GROOTHOFF en J. E. DELHEZ.

De oostelijke helft door den Heer O. J. VAN DER ELST, Mijn-ingenieur als ploeghoofd, en als medewerkers door de Heeren mijnstudenten: K. A. BIEGMAN, H. A. BROUWER, J. E. BRUINING, D. H. VAN LENNEP en H. J. VAN LOHUIZEN.

De zelfstandige bewerking van onderdeelen werd aan de Heeren BIEGMAN, BROUWER, GIESOLF en WIESSING toevertrouwd.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. BLANKSMA: *„Over de constitutie van het oxymethyldinitro-benzonitril van* VAN GEUNS."

(Mede aangeboden door den Heer P. v. ROMBURGH).

In 1882 verkreeg LOBRY DE BRUYN [1]) door inwerking van cyaankalium op meta-dinitrobenzol in methyl-alcoholische resp. ethyl-alcoholische oplossing het oxymethyl — resp. oxyethyl-nitrobenzonitril $C_6H_3(OCH_3)CN\,NO_2$ 1. 2. 3.

Het onderzoek van deze lichamen werd later voortgezet door VAN GEUNS [2]), die er in slaagde deze nitrilen tot zuuramiden te verzeepen en daaruit de correspondeerende zuren te bereiden. Tevens toonde VAN GEUNS aan, dat in beide lichamen door nitratie met salpeterzuur zwavelzuur nog een nitrogroep kan worden ingevoerd, zoodat de verbindingen $C_6H_2(OCH_3)CN(NO_2)_2$ Sp. 113° en $C_6H_2(OC_2H_5)CN(NO_2)_2$ Sp. 63° ontstaan. Deze beide lichamen bevatten een beweeglijke nitrogroep, die gemakkelijk door OH, OCH_3, NH_2, $NHCH_3$, NHC_6H_5 enz. kan worden vervangen.

Daar echter de plaats, waar de nitrogroep bij de nitratie was ingevoerd, onbekend was gebleven, was ook van deze derivaten de constitutie nog onbekend.

Toen de heer VAN GEUNS, wegens vertrek naar Indië dit onderzoek had moeten staken, heb ik op verzoek van wijlen Prof. LOBRY DE BRUYN getracht deze constitutie te bepalen. Na eenige pogingen, die tot geen resultaat leidden, werd tenslotte de weg gevolgd die voor de constitutiebepaling van het 2.3.4 trinitro-phenetol tot het doel had gevoerd. [3]) De constitutie van dit lichaam was als volgt vastgesteld:

$$C_6H_2(OC_2H_5)(NO_2)_3\ 2.3.4 \rightarrow C_6H_2(OC_2H_5)NH_2(NO_2)_2\ 1.3.2.4 \rightarrow C_6H_3(OC_2H_5)(NO_2)_2\ 2.4.$$

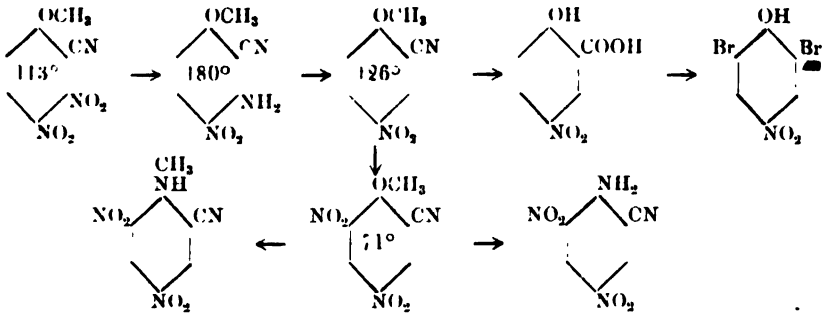
Het oxymethyl-dinitrobenzonitril werd nu op analoge wijze behandeld; door inwerking van alcoholische ammoniak werd eene NO_2-groep door NH_2 vervangen, terwijl deze NH_2 vervolgens door diazoteering en koking met alcohol werd verwijderd. Op deze wijze werd een oxymethyl-nitrobenzonitril verkregen met smeltpunt 126° $C_6H_2(OCH_3)\,CN(NO_2)_2 \rightarrow C_6H_2(OCH_3)CN.NH_2NO_2 \rightarrow C_6H_3(OCH_3)CN.NO_2$ Hieruit volgt, dat de NO_2-groep op 3 door NH_2 is vervangen, daar anders het oorspronkelijke oxymethylnitro-benzonitril $C_6H_3(OCH_3)\,CN.NO_2$ 1.2.3 sp. 171° zou zijn terugverkregen. Er bleef nu nog over de

[1]) Recueil **2**, 205.
[2]) Dissertatie Amsterdam 1903.
[3]) Recueil **27**, 49.

constitutie van dit lichaam te bepalen. Door behandeling met salpeterzuur zwavelzuur werd hieruit een oxymethyldinitro-benzonitril verkregen dat bij 71° smelt en waaraan de volgende constitutie toekomt $C_6H_2(OCH_3)CN(NO_2)_2$ 1.2.4.6 [1]).

De constitutie van dit lichaam werd op de volgende wijze bepaald. Behandelt men deze verbinding in alcoholische oplossing met ammoniak of methylamine dan wordt de OCH_3 groep gemakkelijk door NH_2 of $NHCH_3$ vervangen en ontstaat het dinitrocyaan-aminobenzol Sp. 219° of het dinitrocyaan-methylaminobenzol Sp. 161°, welke lichamen reeds vroeger uit de overeenkomstige oxyethyl-verbinding bereid waren. [2])

Vervolgens werd het oxymethylnitrobenzonitril sp. 126° met zoutzuur gedurende 5 uren op 150° verhit. Bij opening van de buis ontsnapte een gas, dat met groengezoomden rand brandde (CH_3Cl) terwijl in de buis kristallen aanwezig waren, die na omkristallisatie uit water bij 228° smolten, en 5-nitrosalicylzuur bleken te zijn. (C_6H_2 COOH, OH, NO_2 1. 2. 5.) In de moederloog werd de aanwezigheid van NH_3 aangetoond, ontstaan door verzeeping van de cyaangroep. Ter identificatie van het verkregen lichaam werd een weinig van het preparaat met eene gelijke hoeveelheid 5-nitrosalicylzuur (sp. 228°, bereid door nitratie van salicylzuur [3]) gemengd. Het smeltpunt veranderde hierdoor niet. Tevens konden deze beide preparaten door behandeling met broomwater gemakkelijk in 2-6-dibroom-4-nitrophenol sp. 141° worden omgezet. [4]) De uitgevoerde reacties zijn dus de volgende:



Hiermee was dus bewezen, dat de constitutie van het oxymethyldinitrobenzonitril, door Van Geuns bereid, is $C_6H_2(OCH_3), CN, (NO_2)_2$. 1, 2, 3, 4.

---

[1]) Hieruit volgt, dat in het oxymethyl-nitrobenzonitril sp. 126° de nitro-groep op 4 of 6 staat.

[2]) Blanksma. Rec. 20, 413. 21, 274.

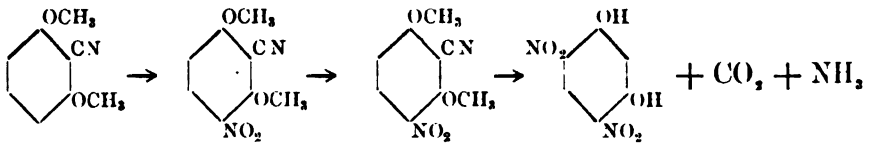
[3]) Hübner. Ann. 195, 31.

[4]) Lellmann en Grothmann. Ber. 17, 2731.

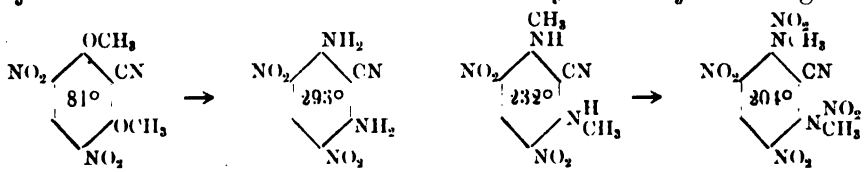
Tevens was aangetoond, dat de beweeglijke NO_2-groep in dit lichaam op 3 staat, waardoor eveneens de constitutie van de verbindingen bekend is, die door substitutie van deze NO_2-groep door OH, OCH_3 enz. hieruit zijn verkregen.

Tenslotte werd nog de constitutie vastgesteld van het dinitrodimethoxybenzonitril verkregen door nitratie van het $C_6H_3(OCH_3)CN$. 1, 3, 2, of van het nitrodi-methoxybenzonitril $C_6H_2(OCH_3)_2CNNO_2$ 1, 3, 2, 4. [1]).

Dit lichaam werd door verhitting met zoutzuur van 30% gedurende 5 uren op 150°–160° in 4-6-dinitro-resorcine sp. 215° omgezet waaruit volgt dat de constitutie is $C_6H(OCH_3)_2CN(NO_2)_2$ 1.3.2.4.6.



Het 4.6 dinitro-2-cyaan 1.3 dimethoxybenzol geeft door behandeling met alcoholische ammoniak of methylamine zeer gemakkelijk verbindingen, die volkomen gelijken op de lichamen, die op gelijke wijze uit den 2.4.6 trinitro-resorcinedimethylether zijn verkregen.



Kristallografie. — De Heer VAN ROMBURGH biedt eene mededeeling aan van den Heer F. M. JAEGER: *„Over de analogie in kristalvorm bij de halogeensubstitutieprodukten van koolwaterstoffen met open koolstofketen"*.

(Mede aangeboden door den Heer FRANCHIMONT).

§ 1. De onderzoekingen, waaromtrent in het volgende een en ander meegedeeld wordt, kunnen als nieuwe bewijzen gelden voor de waarde van de theorie van BARLOW en POPE, als een middel om de geometrische analogieën der kristalvormen van in substitutie-verband staande molekuulsoorten te voorspellen. Reeds vroeger heb ik in dien zin enkele waarnemingen gedaan,[2]) en werd onder meer aangetoond, hoe bij chemisch zeer heterogene stoffen, zooals b.v. bij *jodoform* en *fosfortrijodide*; bij *benzylphtalimide*, *saccharine*, *anthranilzuur*, *o-sulfobenzoëzuur* en zijne

[1]) Dissertatie VAN GEUNS. pg. 69.

[2]) F. M. JAEGER, Zeits. für Miner. und Kryst. **44** 61. (1907).

beide *isomere chloriden*; bij *stilbeen* en *benzylideen-aniline*; bij *dibenzyl* en *benzylaniline*, etc., — zulke theoretisch afgeleide betrekkingen experimenteel bevestigd gevonden worden.

Nóg frappanter in dit opzicht nu zijn de hier volgende gegevens, welke betrekking hebben op de halogeenderivaten van koolwaterstoffen met open ketens, en die dus opnieuw eene aanwijzing geven voor de principieele juistheid van den grondslag, waarop genoemde theorie is opgebouwd. Het spreekt van zèlve, dat daaruit nòch voortvloeit, dat zij een surrogaat zou kunnen zijn voor de struktuurtheoriëen der organische chemie, of voor de daar geldende stereochemische opvattingen; nòch, dat men in haar eene explikatie mag zien voor het valentie-begrip, of eene verklaring van de al of niet aanwezige mengbaarheid in den vasten aggregaat-toestand. Daar zij nl. over de onderlinge *chemische bindingswijze* der atomen absoluut geene veronderstellingen insluit, noch voor het begrip der chemische binding in 't algemeen eenige verklaring wil geven, — zoo is het duidelijk, dat zij voor de sterische ligging der atomen van 't samengestelde molekuul tot beelden voeren kàn, welke afwijkend zijn van die, welke door de stereochemie worden afgeleid; want deze laatsten toch zijn gebaseerd op stilzwijgend aangenomen voorstellingen omtrent de wederkeerige beïnvloeding der atomen, welke aan de werkingswijze van de in de mechanica gebruikelijke, ruimtelijk gerichte krachten onmiddellijk ontleend zijn; en toch is voor het recht, om eene chemische bindingseenheid op ééne lijn te stellen met eene ruimtelijk gerichte krachtseenheid, die b.v. langs de verbindingslijn der atoom-centra werkt, geenszins eenig zeker bewijs geleverd.

Dat de theorie óók in kristallografischen zin vele problemen onopgelost laat, is niet te ontkennen. Van het verschil in grootte der aangroeingssnelheden der kristallen in diverse richtingen vermag zij geen rekenschap te geven, en dat zij tusschen geometrische vorm-analogie en mengbaarheid in den vasten toestand evenmin een oorzakelijk verband kan uitdrukken, wordt hier weder bewezen door het feit, dat deze halogeen-derivaten voor het meerendeel, ondanks hunne groote vorm-analogie, geene of slechts uiterst geringe mengbaarheid vertoonen. Maar het feit alleen, dat de door haar voorspelde vorm-overeenkomst, ook werkelijk experimenteel gevonden wordt, is op zichzelf al een hoogst belangrijk argument te harer gunste hoewel daarbij een zwak punt blijft de ònmogelijkheid, om de indices der waargenomen hoofd-vormen, in eene *eenvoudige* relatie te brengen met de afgeleide strukturen.[1])

[1]) Dat trouwens Hauy's wet in dezen zin nog al eens moeilijkheden oplevert, is niet te ontkennen. Zoo heb ik b.v. onlangs bij 't *2-4-6-tribroombenzonitril* en

§ 2. Volgens BARLOW en POPE's theorie, moet de struktuur van elke koolwaterstof met open keten kunnen worden afgeleid uit die van het *methaan*, door middel van de zoogenoemde 1e en 2e geometrische eigenschap van homogene, dichtste ruimte-pakkingen. Zonder dat de struktuur van elken homologen term in het bijzonder behoeft te worden afgeleid, kan men op grond van de eenvoudige manipulatie's, welke er bij herhaling moeten worden toegepast, om de ter sprake zijnde koolwaterstof uit het CH_4 te verkrijgen, — al dadelijk het bestaan van bepaalde vormanalogieën voorspellen.

Voor het CH_4 is slechts één dichtste ruimtelijke opeenpakking mogelijk, waarbij dan aan het C-atoom dus eene viermaal zoo groote werkingssfeer wordt toegekend als aan elk der vier H-atomen.

Deze struktuur kan men zich ontstaan denken, door de werkingssferen der C-atomen te plaatsen in de hoekpunten van de hexaëdrische cellen in een BRAVAIS'sch puntsysteem, en zich dan telkens de werkingssferen der 4 H-atomen in de kubus-centra geplaatst te denken, aldaar vereenigd tot eene *tetraëdrische* groep, wier trigonale assen met die van het BRAVAIS'sche systeem samenvallen. De aldus verkregen dichtste opeenhooping, — welke onderverdeeld kan worden in tetraëdrische molekulen CH_4, — gelijk ook de LE BEL-VAN 'T HOFF'sche theorie ze vooropstelt, — bezit *tetartoëdrisch-regulaire symmetrie*. In overeenstemming daarmede, kristalliseert dan ook b.v. CJ_4 *regulair*, ofschoon eene tetartoëdrie daarvan tot dusverre nog niet experimenteel bewezen is geworden. Het is op grond hiervan, dat men kan verwachten, dat b.v. 't zoo symmetrische gebouwde *tetramethylmethaan* of zijne halogeensubstitutieprodukten eveneens òf *kubisch* òf *pseudokubisch* zullen kristalliseeren.

Inderdaad kan men van de (monokliene) kristallen van het **tetrabroomtetramethylmethaan**, Smpt. 163° C., het pseudo-kubisch karakter duidelijk aantoonen. Evenzoo laat zich uit de ruimtelijke betrekkingen, welke de theorie i. c. involveert, begrijpen, waarom het genoemde lichaam met zijne valentie-som = 32, in staat is, om met *benzol* (valentie-som = 30) eene molekuulverbinding te geven, welks vorm in enkele zône's zeer duidelijke analogieën vertoont met dien van het zooeven besproken tetrabromide zèlve.

VON FEDOROW (Journ. f. prakt. Chem. (1890). **42**. 145) heeft bewezen, dat het bij 220° C. smeltende *tetrabroomdimethylaethaan*: $CH_3 . CBr_2 . CBr_2 . CH_3$, behalve een tetragonalen vorm, ook een labieleren

't *2-4-6-tribroombenzoëzuurchloride, sterk ontwikkelde vormen* aangetroffen met de symbolen: $\{881\}$, $\{80\bar{1}\}$, $\{\bar{6}07\}$, $\{\bar{4}03\}$, $\{\bar{5}57\}$ $\{\bar{3}37\}$, en $\{\bar{5}58\}$, alle aan één kristal; $\{93\bar{4}\}$ en $\{2\bar{3}0\}$ aan een ander, enz.

rhombischen vorm bezit, welke bij aanname der symbolen {110} en {012} voor de door v. FEDOROW waargenomen vlakken, eene parameterverhouding levert, welke met de hier voor het tetrabroomtetramethylmethaan, geheel analoog is, en waarvoor dus dezelfde beschouwingen geldig zijn als voor dàt lichaam.

§ 3. Behalve de genoemde halogeenderivaten, worden hier verder nog beschreven de vormen der kristallen van **tetrajoodaethyleen**: C_2J_4, van **acetyleendijodide**: $C_2H_2J_2$ van **aethyleendijodide**: $C_2H_4J_2$ en van de door VAN ROMBURGH gesyntheseerde **di-** en **tetrabromiden** van het **1-3-5-hexatriëen**: $CH_2:CH.CH:CH.CH:CH_2$.

Ook voor het **tetrajoodaethyleen** laat zich, op grond van de struktuur van 't vaste C_2H_4, bewijzen, dat zijne symmetrie *kubisch* òf *pseudo-kubisch* moet zijn. Volgens BARLOW en POPE kan nl. de struktuur van het C_2J_4 als volgt worden verkregen:

Men denke zich de influentie-sferen der C-atomen (volume = 4), geplaatst in de hoekpunten van aaneensluitende, quadratische mazen van 't regulaire netvlak, en dan de vierkanten gedeformeerd tot rhomben, met de diagonaalverhouding: 2,689 : 2,469. Deze verhouding is nl. die der aequivalentieparameters $x:y$, welke uit de metingen berekend kunnen worden.[1])

Dan zijn de genoemde influentie-sferen bijna met elkaar in aanraking, doch niet geheel, en in de eene richting iets meer dan in de andere van elkaar verwijderd. Op deze laag van bollen, met volume = 4 (fig. 1, groote cirkels) plaatse men in elke holte een bol met volume = 1; waren de eerste mazen juist vierkanten, dan zou elke bol *vier* groote sferen raken. Nu echter slechts *drie*, en wel zóó, dat de kleine bollen onderling dezelfde afstanden hebben als de groote. De cirkels *R* in fig. 1 geven hunne projectie's aan.

De nieuwe laag van kleine bollen *R* heeft nu juist twee maal zooveel holten als er groote bollen zijn; deze holten worden vervolgens op symmetrische wijze opgevuld met andere sferen van volume = 1, nl. *P* en *Q* in fig. 1. Aldus krijgt men één geheel, uit drie lagen bestaande: één van groote bollen en twee lagen van kleine bollen op elkaar volgend.

Denkt men zich nu eene tweede kombinatie van drie zulke lagen, precies zoo als dèze gevormd, en beide vervolgens zóó op elkaar geplaatst, dat de zijde van de ééne kombinatie, waarop geen kleine bollen gelegen zijn, gelegd wordt tegen de gelijksoortige zijde der andere kombinatie, en dan zóó geplaatst, dat ze in elkaars holten

[1]) *xyz sin* $\gamma = 12$; $\beta = 84°3'$, en $a:b:c = 3{,}2674:1;2{,}9442$. terwijl $a:b:c = 3x:y:4z$, en dus: $x:y:z = 2{,}689:2{,}469:1{,}817$.

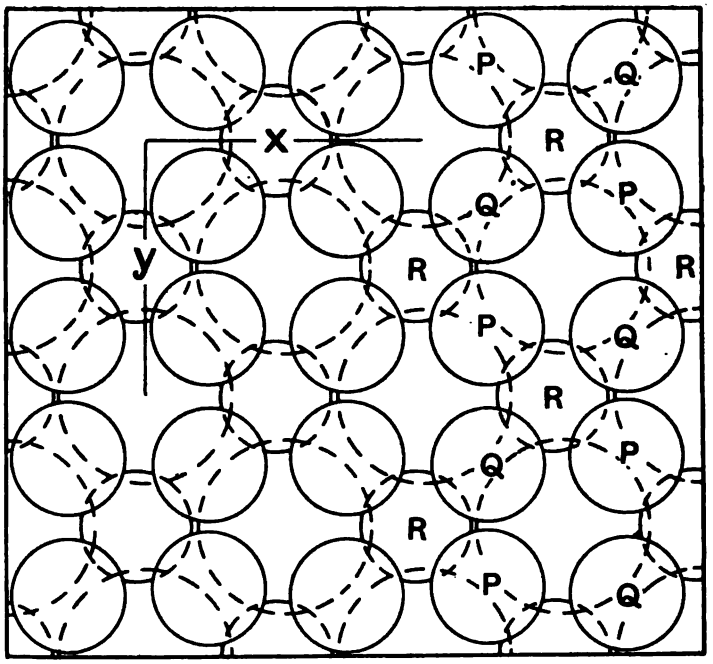


Fig. 1.

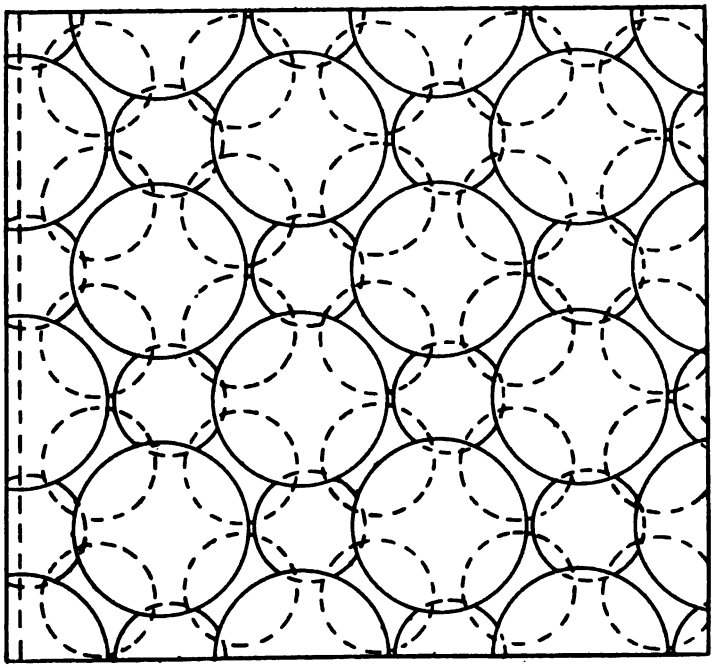


Fig. 2.

sluiten, om eene dichtste ruimte-pakking te krijgen. In dit geval zal elke groote bol van de eene laag *drie* groote bollen van de laag der tweede kombinatie raken. Daarbij moet die plaatsing dan zóó geschieden, dat de geringe hiaat tusschen de groote bollen, aan de éene zijde der in kontakt zijnde lagen, juist de tegengestelde richting heeft van die van de aangrenzende laag. Men kan zich van de relatieve ligging der zes opeenvolgende lagen eene projektie maken, door fig. 1 geplaatst te denken òp fig. 2. Het is licht in te zien, dat deze dichtste homogene ruimte-pakking, welke van een kubisch puntsysteem door geringe deformatie is afgeleid (dus: *pseudo-kubisch* is), thans *monoklienprismatische symmetrie* bezit: want ze heeft twee-tallige assen parallel aan *y*, en loodrecht daarop staande spiegelvlakken parallel *c*, terwijl het snijpunt van beide natuurlijk een symmetriecentrum is.

Wanneer men zich nu de geheele ruimte opgevuld denkt door dergelijke opgestapelde dubbel-kombinatie's van zes lagen, zóódanig, dat elke eind-laag van eene kombinatie tevens dienst doet als eindlaag van de volgende dubbelkombinatie, en wel zóó, dat elke bol *P* b.v. behoort tot de eerste, elke bol *Q* tot de daaraanvolgende kombinatie, dan komt de samenstelling dezer ruimtepakking overeen met C_2J_4, en de homologe verdeeling ervan kan zóó geschieden, dat aan elke eenheid ervan (molekuul) eene struktuur toekomt, welke dezelfde is als die men op grond der stereochemische beschouwingen aan C_2H_4 pleegt toe te kennen.

De stippellijn links in fig. 2, geeft in projektie de grootte der verschuiving aan, welke de hoek β kleiner maakt dan 90°, en aldus de monokliene symmetrie ten gevolge heeft [1]).

Voor de beide *bromiden* van *hexatriëen* laat zich de struktuur uit die voor C_2H_4 door herhaalde toepassing der 1ste en 2de geometrische eigenschap afleiden; ook dèze beide verbindingen blijken pseudokubisch te zijn, met waarden voor hunne parameters, welke aan die voor C_2J_4 analoog zijn (zie metingen).

Wat den kristalvorm van $C_2H_4J_2$ betreft: deze moet in relatie te brengen zijn met dien van C_2Cl_6, wat, hoewel niet al te mooi, het geval is. Van C_2H_6 zijn nl. *twee* konfiguratie's mogelijk: de eene is rhombisch-bipyramidaal, en de andere regulair, doch beide hebben als struktuur-eenheid de molekulaire formule, welke volgens de Le Bel-Van 't Hoff'sche theorie vereischt wordt. De rhombische

[1]) Natuurlijk, dat op deze kombinatie van influentiesferen dan nog de alzijdige druk moet worden aangewend, om de tusschenruimten te elimineeren (zie Verh. Pope en Barlow, Trans. Chem. Soc. (1906).

struktuur vereischt waarden voor $a : b : c$, die slingeren rondom 0,56 : 1 : 0,63 [1]).

De verhouding van $a : c$ in de metingen is dezelfde als die door de theorie wordt geëischt. Neemt men daarbij $\frac{3c}{2}$, dan wordt de waargenomen verhouding : $a : b : c = 0{,}60 : 1 : 0{,}66$, wat met 't oog op de niet al te nauwkeurige metingen voldoende kan heeten.

Evenzoo kan men uit de metingen voor $C_2H_2J_2$ afleiden : $a : b : c = 1{,}06 : 1 : 0{,}82$, en $\beta = \pm 90°$, terwijl in het struktuurschema van 't C_2J_4 die verhouding als $1{,}089 \cdot 1 : 0{,}736$ is : echter kunnen de metingen aan het $C_2H_2J_2$ kwantitatief slechts als *benaderend* gelden.

Merkwaardig is zeker de *isomorfie* van $C_2H_2J_2$ en $C_2H_4J_2$; en wel voornamelijk, omdat men uit de *rhombische* ruimte-pakking voor C_2H_6 door symmetrische wegname van 2 H-atomen, de afgeleide *monokliene* aggregatie kan verkrijgen, door dáárna het geheel door alzijdigen druk zijne dichtste opeenhooping te verleenen.

Van C_2J_2 is een kristalvorm te verwachten, welke in nauw verband staat tot die van het C_6H_6. Ik hoop dit feit te kunnen verifiëeren, zoodra ik er in geslaagd zal zijn, eene genoegzame hoeveelheid van deze merkwaardige, en zeer snel veranderende verbinding te verkrijgen. In nauw verband met deze analogie staat ook de bekende overgang van acetyleen in benzol door polymerisatie.

§ 4. 1-3-5-hexatriëen-dibromide.

Deze verbinding werd het eerst door GRINER [2]), doch verkeerdelijk als *triklien* beschreven. Het hier onderzochte preparaat was door VAN ROMBURGH en VAN DORSSEN [3]) bereid ; de op twee verschillende wijzen gewonnen verbinding bleek in beide gevallen, op enkele geringe optische verschillen na, dezelfde kristallonomische eigenschappen te bezitten.

Waarschijnlijke struktuur :

$$CH_2 = CH - CH\,Br - CH\,Br - CH = CH_2 ;$$

smeltpunt : 85°,5 à 87° C. Kristallen uit aether + ligroïne.

Groote, ietwat geelachtige, prismatische kristallen of ook wel dunnere naalden, met sterken glans, doch die door plaatsgrijpende polymerisatie spoedig dof en zwart worden, vooral als ze aan den

---

[1]) Zie Trans. Chem. Soc. (1906). 1682, de c-as moet verdubbeld worden.

[2]) GRINER, Ann. de Chim. et Phys. (6). **26**. (1892). p. 381.

[3]) VAN ROMBURGH en VAN DORSSEN, Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, Juli 1906, p. 54. Het dibromide werd de eene keer bereid door additie van broom aan de koolwaterstof, de andere maal door de inwerking uan fosfortribromide op divinylglykol.

invloed van het licht blootgesteld zijn. Zij bezitten een scherpen, doch niet onaangenamen, ietwat op citroenen gelijkenden reuk.

Naast geometrisch zeer zuiver gebouwde kristallen, komen ook meermalen individuën met grootere afwijkingen voor.

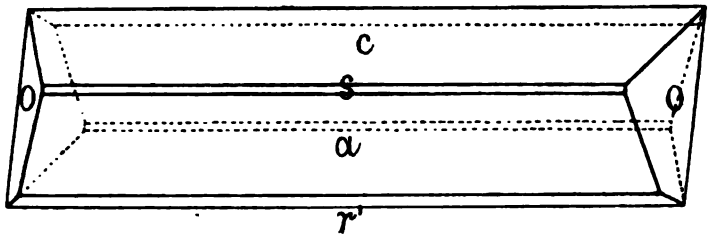


Fig. 3.

1-3-5-hexatriëen-dibromide.

Monoklien-prismatisch.

$$a : b : c = 2{,}9021 : 1 : 3{,}3330$$

$$\beta = 64°40^1/_2{}'$$

Waargenomen vormen: $c = \{001\}$ en $a = \{100\}$, ongeveer even sterk ontwikkeld; de meeste kristallen zijn volgens c afgeplat; $o = \{111\}$, groot en sterk glanzend; $s = \{101\}$, zeer smal; $r = \{\bar{1}01\}$, iets breeder, en veel betere spiegelbeelden leverend dan s. De habitus is gestrekt naar de b-as; in de zône van den orthodiagonaal zijn vaak een aantal niet nader te bepalen vicinaalvlakken aanwezig. Geene duidelijke splijtbaarheid.

	Gemeten:	*Berekend:*
$c : a = (001) : (100) =$	* 64° 40½′	—
$a : r = (100) : (10\bar{1}) =$	* 51 28½	—
$o : c = (111) : (001) =$	* 64 54½	—
$a : o = (100) : (111) =$	63 27	63° 22′
$s : c = (101) : (001) =$	34 34½	34 49½
$s : a = (101) : (100) =$	34 6	33 51
$o : r = (111) : (10\bar{1}) =$	94 48	94 28½
$o : o = (111) : (\bar{1}1\bar{1}) =$	62 18	62 13
$c : r = (001) : (\bar{1}01) =$	63 56½	63 51
$s : o = (101) : (111) =$	58 50½	58 53½

In de zone van den orthodiagonaal is de uitdooving overal loodrecht op de richting der b-as georienteerd; op $\{100\}$ en $\{001\}$ zeer sterke konische refraktie. Het optisch assenvlak is $\{010\}$; ééne optische as treedt bijna loodrecht op $\{001\}$ uit; zeer sterke, geneigde dispersie, met $\varrho < v$; positieve dubbelbreking.

't Specifiek gewicht der kristallen is 2.131 bij 18° C.: aequivalentvolume = 112.67. Topische parameters:

$$\chi : \psi : \omega = 0.8040 : 2.3445 : 1.8143.$$

§ 5. 1-3-5 hexatriëen-tetrabromide.

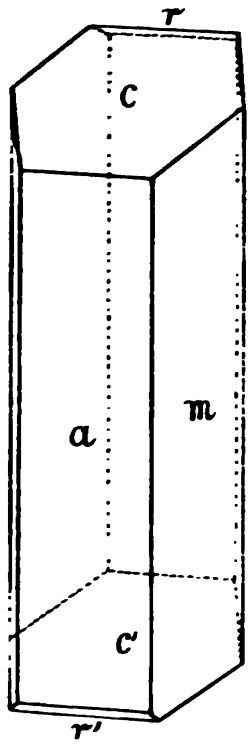


Fig. 4.

Deze verbinding werd door VAN ROMBURGH en VAN DORSSEN (loc. cit.) bereid door additie van broom aan de koolwaterstof, in chloroform opgelost, en onder meewerking van het direkte zonlicht.

Waarschijnlijke struktuur:
$CH^2Br - CHBr - CHBr - CHBr - CH = CH^2$;
smeltpunt 115° C. kristallen uit aethylacetaat + methylalkohol: zij vormen kleine kleurlooze, veelal afgeplatte naaldjes.

Monoklien-prismatisch.

$$a : b : c = 3.1917 : 1 : 3.635$$
$$\beta = 69° 1'$$

Waargenomen vormen: $m = \{110\}$ en $a = \{100\}$, ongeveer even sterk ontwikkeld: $c = \{001\}$, klein doch goed meetbaar: $r = \{\bar{1}02\}$, zeer smal en vaak ontbrekend. De kristallen zijn naar de c-as gestrekt, en veelal naar twee evenwijdige vlakken van m afgeplat. Zeer zuivere geometrische bouw; de orthodiagonaalzone alleen vertoont grootere afwijkingen. Geene duidelijke splijtbaarheid werd gevonden.

		Gemeten:	*Berekend:*
$c : m$	= 001 : 110	=* 83° 27½'	—
$a : m$	= 100 : 110	=* 71 27	—
$c : r$	= 001 : $\bar{1}02$	=* 33 44	—
$a : c$	= 100 : 001	= 68 59	69° 1'
$m : m$	= 110 : $\bar{1}10$	= 37 4	37 4
$a : r$	= 100 : $\bar{1}02$	= 77 14	77 15

Op $\{100\}$ rechte uitdooving; op $\{110\}$ is de uitdoovingshoek ongeveer 52½° ten opzichte der c-as. 't Optisch assenvlak is $\{010\}$, met geneigde dispersie. Op a is éene optische as zichtbaar aan den rand van 't gezichtsveld.

Het specifiek gewicht der kristallen is 2,362 bij 15° C ; 't aequivalent-volume = 169,35.

Topische parameters : $\chi : \psi\ \omega = 7,\ 9807 : 2,5005 : 9,0892$.

§ 6. Door NEGRI [1]) is gemeten het **diallyltetrabromide,** smeltpunt: 63° C, welks struktuur wordt voorgesteld door : $CH_2Br - CHBr - CH_2 - CH_2 - CHBr - CH_2Br$.

Zijne kristallen waren uit aether verkregen. Wanneer men in zijne metingen de volgorde der assen : $b : c : a$ neemt, wordt hunne verhouding in plaats van 0, 3641 : 1 : 0,3788, nu : $a' : b' : c' = 2,6398 : 1 : 0,9611$.

Het *hexatriëentetrabromide* kan men eene meer symmetrische vlakkenverdeeling toekennen, door $\{100\} = \{100\}$, $\{001\} = \{101\}$, $\{102\} = \{101\}$ en $\{110\} = \{110\}$ te nemen. De parameterverhouding wordt daardoor : $a : b : c = 3,0445 : 1 : 0,9668$ $\beta = 93° 44'$. De beide verbindingen blijken aldus morfologisch uiterst nauw verwant te zijn ; hadden ze dezelfden stand der *Br*-atomen, dan zouden ze wel geheel en al isomorf geweest zijn !

§ 7. **Tetrajoodaethyleen.**

De verbinding, aan welke de struktuur : $J_2C = CJ_2$ toekomt, en welke bij 192° C. smelt, kristalliseert uit een mengsel van benzol + ligroïne, waaraan een weinig absolute alkohol toegevoegd is, in lichtgele, platte, sterk glanzende naalden, welke goed gebouwd zijn, en exakte meting toelaten.

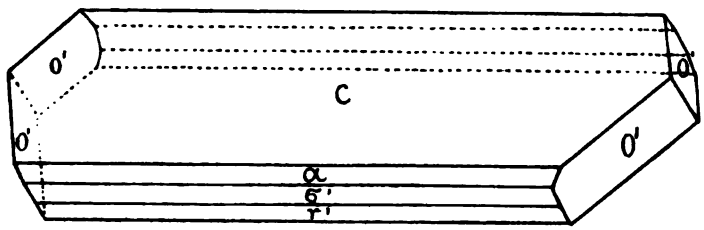


Fig. 5.
Tetrajood-aethyleen.

De meeste kristallen zijn tweelingen volgens $\{001\}$, welk vlak tevens een van volkomen splijtbaarheid is ; echter komen er ook enkelvoudige kristallen voor.

[1]) NEGRI, Rivista d. Min. Crist. Ital. (1889). 6. : Ref. Zeits. f. Kryst. 20 177. Berl. Ber. 22. 2498.

Monoklien-prismatisch.

$a : b : c = 2{,}9442 : 1 : 3{,}4387$

$\beta = 70°\ 44^1/_2{}'$

Waargenomen vormen: $c = \{001\}$, voorheerschend en ideale reflexen leverend; $a = \{100\}$, $\sigma = \{\bar{2}01\}$ en $s = \{\bar{1}01\}$, goed spiegelend en ongeveer even sterk ontwikkeld; $o = \{\bar{1}11\}$, groot en zeer glanzend; soms nog $\{225\}$ aangeduid.

De habitus is langgestrekt naar de b-as, met afplatting naar $\{001\}$. Etsfiguren, met monobroomnaftaline op c verkregen, waren in overeenstemming met de gevonden symmetrie.

	Gemeten:	*Berekend*:
$o : a = (001) : (100) =$	* 70° 44$^1/_2{}'$	—
$c : o = (001) : (111) =$	* 79 50$^1/_2$	—
$c : \sigma = (001) : (20\bar{1}) =$	* 84 3$^1/_2$	—
$o : o = (111) : (11\bar{1}) =$	42 27	42° 29$^1/_2{}'$
$c : s = (001) : (\bar{1}01) =$	60 52$^1/_2$	60 52$^1/_2$
$s : \sigma = (\bar{1}01) : (201) =$	23 11	23 11
$o : s = (\bar{1}11) : (101) =$	68 46$^1/_2$	68 45$^1/_2$
$o : a = (11\bar{1}) : (100) =$	76 13	76 4

Zeer volkomen splijtbaar naar c.

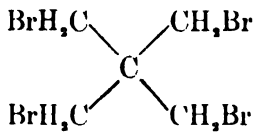
In de diagonaalzone is de uitdooving overal normaal georienteerd; de ligging van 't optisch assenvlak was niet vast te stellen.

Specifiek gewicht der kristallen: 2,983 bij 20° C; 't aequiv. volume = 169,66.

Topische parameters: $\chi : \psi : \omega = 7{,}6803 : 2{,}6087 : 8{,}9701$.

§ 8. **Tetramethylmethaantetrabromide.**

Deze stof, aan welke de struktuur:



toekomt, en die bij 163° C. smelt, kristalliseert uit ligroïne bij zeer langzame verdamping in den vorm van kleine, kleurlooze, platte naaldjes, welke een onaangenamen duffen reuk bezitten. De hoekwaarden, aan verschillende kristalletjes gemeten, loopen niet onaanzienlijk uiteen.

Prachtige, groote kristallen verkrijgt men uit benzol: deze zijn echter geen zuiver tetrabromide, doch eene molekulairverbinding met benzol. Zij zijn triklien, maar de zône van den langsten diagonaal

bezit bijna dezelfde hoekwaarden als de zuivere verbinding, wat op eene inlegging der benzolmolekulen, parallel aan 't vlak {010} der oorspronkelijke molekulaire struktuur wijst. De kristallen verweeren uiterst snel aan de lucht, zoodat exakte meting onmogelijk was.

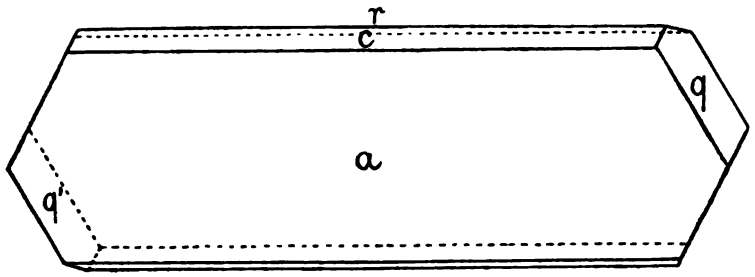


Fig. 6.
Tetrabroomtetramethylmethaan.

Monoklien-prismatisch.

$$a : b : c = 2{,}2766 : 1 : 3{,}6486$$

$$\beta = 67°7\tfrac{1}{2}'$$

De meeste kristallen zijn enkelvoudig, doch vaak komen ook tweelingen voor naar {100}, evenals bij het *tetrajoodaethyleen* volgens {001}.

Waargenomen vormen : $a = \{100\}$, vóórheerschend, en sterk glanzend ; $c = \{001\}$, en $r = \{\bar{1}02\}$, even sterk ontwikkeld en goed spiegelend ; $q = \{012\}$, goed gevormd.

	Gemeten :	*Berekend :*
$a : c = (100) : (001) =$	* 67° 7½'	-
$c : q = (001) : (012) =$	* 59 15	—
$c : r = (001) : (\bar{1}02) =$	* 46 44½	—
$a : r = (100) : (10\bar{2}) =$	65 59	66° 8'
$a : q = (100) : (012) =$	78 44	78 33

Het optisch assenvlak was in zijne ligging niet duidelijk te bepalen ; de uitdooving in de orthodiagonaal-zône is overal normaal georienteerd.

Het soortelijk gewicht der kristallen is : 2,596 bij 15° C. ; het acquivalent-volume bedraagt : 149,39.

Topische parameters : $\chi : \psi : \omega = 6{,}1297 : 2{,}6925 : 9{,}8239$.

Het *pseudo-kubische* karakter blijkt, door {100} en $\{\bar{1}02\}$ te behouden, maar $c = \{102\}$ en $q = \{112\}$ te nemen, waardoor ook de vlakkenverdeeling eene meer symmetrische wordt. Men vindt dan : $a : b : c = 1{,}0484 : 1 : 0{,}9492$, en $\beta = 90°45'$.

§ 9. Door v. FEDOROW is een **dimethylacetyleentetrabromide**: $CH_3—CBr_2—CBr_2—CH_3$, smeltpunt: 230° C. gemeten (Zie: FAWORSKY, Journ. f. prakt. Chem. (1890). (2). **42**. 145). Het is dimorf; de stabielere *tetragonale* modifikatie vertoont: {110} en {111}, $a : c = 1 : 1{,}28$. De bij — 10° C. optredende minder stabiele vorm is *rhombisch*, met: $a : b : c = 1{,}8671 : 1 : 3{,}478$, als men de vormen als {110} en {012} aanneemt. De analogie met de hier gemeten derivaten is licht aan te toonen.

Hiermede is derhalve de nauwe verwantschap van al deze halogeen-verbindingen experimenteel bevestigd gevonden. Eene meer uitvoerige behandeling dezer kwestie's zal binnenkort van de hand der heeren BARLOW en POPE en in eene publikatie van mijne hand gegeven worden in de Transactions of the Chemical Society (1908). Bovendien hoop ik binnenkort nòg meer hierop betrekking hebbend materiaal tot mijne beschikking te hebben.

Zaandam, Januari 1908.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt eene mededeeling aan: *„Over vierdimensionale netten en hun ruimtedoorsneden"*. (Eerste gedeelte).

Uit het tabelletje

$C_5 \ldots . 75° 31' 21''$, $C_{16} \ldots . 120°$, $C_{120} \ldots . 144°$
$C_8 \ldots . 90°$, $C_{24} \ldots . 120°$, $C_{600} \ldots . 164° 28' 39''$

der hoeken door twee in een zijvlak samenkomende grenslichamen der regelmatige cellen van de ruimte R_4 gevormd blijkt onmiddellijk, dat er alleen bij de cellen C_8, C_{16}, C_{24} sprake van zijn kan, dat ze elk voor zich die ruimte vullen. Het is overbekend, dat ze dit ook werkelijk doen. Zoo is in het in de Sammlung SCHUBERT opgenomen leerboek der „Mehrdimensionale Geometrie" (deel II, blz. 241) aangewezen, hoe de beide netten der cellen C_{16} en C_{24} door vervorming van het uit zich zelf duidelijke net der cel C_8 kunnen worden afgeleid. We herhalen dit hier in eenigszins afwijkenden vorm om er daarna nieuwe beschouwingen aan vast te knoopen.

1. De punten met de coördinaten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ zijn de hoekpunten van een achteel C_8^{12} met de dubbele lengte-eenheid tot lengte van ribben, den oorsprong van coördinaten tot middelpunt en

de richtingen der assen tot richtingen der ribben. Deze hoekpunten laten zich op eenvoudige wijs rangschikken in twee groepen van acht punten, waarvan de eene groep de punten met een positief, de andere groep de punten met een negatief coördinatenproduct bevat. Elk dezer groepen heeft de eigenschap, dat geen twee der acht punten door een ribbe van $C_8^{\gamma(2)}$ vereenigd zijn; daarom noemen we ze groepen van niet-naburige hoekpunten. Vereenigen we bij elk dezer groepen de twee in een zelfde zijvlak van $C_8^{\gamma(2)}$ liggende punten door een diagonaal, dan ontstaan de ribbenstelsels van twee cellen $C_{16}^{\gamma(2)\ 2}$; wijl elk der grenskuben van $C_8^{\gamma(2)}$ omschreven is aan een der 16 grensviervlakken van elk der beide $C_{16}^{\gamma(2)\ 2)}$, noemen we deze laatste in $C_8^{\gamma(2)}$ beschreven, waarbij dan de eene de positieve, de andere de negatieve mag heeten.

Denken we ons nu het net der C_8 opgebouwd uit afwisselend witte en zwarte achtcellen, zoodat twee C_8 met een gemeenschappelijk grenslichaam in kleur verschillen, — waaruit dan volgt, dat twee C_8 in ribbe-contact dit ook doen, terwijl daarentegen twee C_8 in zijvlak- of in hoekpunt-contact dezelfde kleur dragen —, en nemen we aan, dat in elke witte C_8 een positieve, in elke zwarte C_8 een negatieve C_{16} ingeschreven is, dan is het duidelijk, dat beide groepen van C_{16} de geheele ruimte R_4 nog niet opvullen. Want men moet, om van een C_8 de ingeschreven C_{16} te maken, van dit maatpolytoop aan elk der acht verdwijnende hoekpunten een in dit punt rechthoekige vijfcel wegkappen, waarvan de vier door dit punt gaande ribben een lengte 2 hebben. Wijl nu echter een hoekpunt, dat verdwijnt voor een der zestien cellen C_8, waartoe het behoort, dit doet voor allen, zullen er om dit punt heen zestien afwisselend wit en zwart gekleurde rechthoekige vijfcellen overblijven en deze gezamenlijk een $C_{16}^{\gamma(2)\ 2)}$ vormen, waarvan dit punt het middelpunt is. Zoo ontstaat dus een ruimtevulling van R_4 door drie even talrijke groepen van cellen $C_{16}^{\gamma(2)\ 2)}$ met de eigenschap, dat alle cellen C_{16} van een zelfde groep door translatie met elkaar tot bedekking te brengen zijn.

Om de regelmaat van het net der C_{16} ten volle te doen uitkomen denken we ons drie cellen $C_{16}^{\gamma(2)\ 2)}$, waarvan er geen twee tot een zelfde groep behooren, evenwijdig aan zich zelf verplaatst naar een gemeenschappelijk middelpunt, den oorsprong van coördinaten. We zien dan onmiddellijk in, dat de hoekpunten der drie $C_{16}^{\gamma(2)\ 2}$ geza-

menlijk de hoekpunten van een C_{24}^{2} vormen. Want de twee ingeschreven cellen $C_{16}^{21\,2}$ leveren dan samen weer de hoekpunten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ van de oorspronkelijke achtcel $C_{8}^{(2)}$ op en de coördinaten van de hoekpunten der derde cel $C_{16}^{21\,2}$ zijn

$$(\pm 2, 0, 0, 0),\ (0, \pm 2, 0, 0),\ (0, 0, \pm 2, 0),\ (0, 0, 0, \pm 2),$$

waaruit dan werkelijk het beweerde blijkt (vergelijk „*Mehrdimensionale Geometrie*", deel II, blz. 205).

We maken van deze opmerking aanstonds gebruik om het verband tusschen de vier assengroepen der drie stelsels van cellen C_{16} met de assengroepen van C_8 op te sporen.

2. Om het net der cellen C_8 in een net van cellen C_{24} om te zetten denken we ons de cellen van het eerste weer afwisselend wit en zwart gekleurd, om nu elk der zwarte achtcellen te splitsen in acht congruente pyramiden met het middelpunt der achtcel tot gemeenschappelijken top en de acht grenskuben tot grondlichamen. Door nu aan elke witte achtcel de acht zwarte pyramiden toe te voegen, die er een grenskubus mee gemeen hebben, ontstaat het net der cellen $C_{24}^{(2)}$; werkelijk worden dan aan de 16 hoekpunten van de wit onderstelde achtcel met den oorsprong van coördinaten tot middelpunt, n.l. aan de punten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ de boven reeds opgegeven acht hoekpunten

$$(\pm 2, 0, 0, 0),\ (0, \pm 2, 0, 0),\ (0, 0, \pm 2, 0),\ (0, 0, 0, \pm 2)$$

toegevoegd.

De omzetting van het net der $C_8^{(2)}$ in dat der C_{24} kan ook op de volgende eenvoudige wijs geschieden. Verdeel elk der cellen $C_8^{(2)}$ in 16 gelijke en gelijkstandige cellen $C_8^{(1)}$ door middel van vier ruimten door het middelpunt O evenwijdig aan de paren van grensruimten. Deel dan elk der zestiende deelen $C_8^{(1)}$ (fig. 1) door de ruimte in het midden van de in het middelpunt O van $C_8^{(2)}$ uitkomende diagonaal $A\,O$ loodrecht op deze lijn in twee gelijke helften; hierbij wordt, zooals bekend is, de doorsnee een regelmatig achtvlak $A_{12}A_{13}\ldots A_{34}$. We richten nu eerst onze opmerkzaamheid op de halve cellen $C_8^{(1)}$ die om het punt O liggen; zij vormen een $C_{24}^{(1/2)}$. Van de 24 grensachtvlakken worden er 16 door de doorsneden $A_{12}A_{13}\ldots A_{34}$ geleverd, terwijl we de 8 overige verkrijgen door in elk van de acht uit-

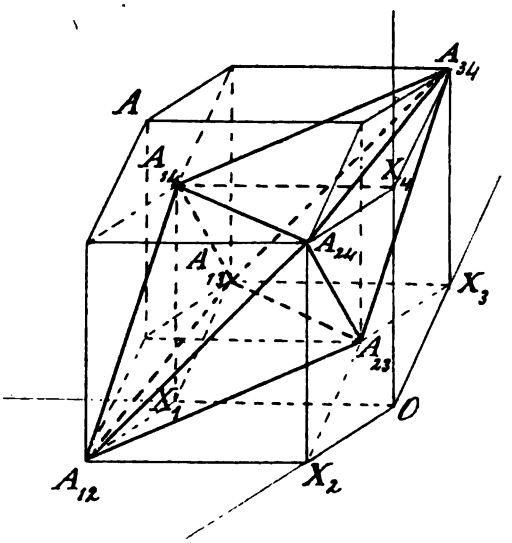


Fig. 1.

einden van de vier koorden langs de assen OX_1, OX_2, OX_3, OX_4 door O, bijv. in X_1, de acht rechthoekige viervlakken X_1 (A_{12} A_{13} A_{14}) samen te voegen, waarbij het dan duidelijk is, dat er in X_1 werkelijk acht van die viervlakken samenkomen, omdat we de richting van elk der segmenten $X_1 A_{12}$, $X_1 A_{13}$, $X_1 A_{14}$ kunnen omkeeren. Verder merken we dan op, dat om een willekeurig hoekpunt A van de oorspronkelijke cel weer 16 halve cellen $C_8^{(1)}$ liggen en deze volkomen op dezelfde wijs een $C_{24}^{(1\ 2)}$ vormen. Daarmee is het net der $C_8^{(2)}$ dan omgezet in een net van cellen $C_{24}^{(1\ 2)}$, waarbij de middelpunten en de hoekpunten der cellen $C_8^{(2)}$ de middelpunten der op dezelfde wijs geplaatste cellen $C_{24}^{(1\ 2)}$ vormen.

Voegen we aan het beschouwde zestiende deel $C_8^{(1)}$ (fig. 1) de drie deelen toe, die ontstaan door een der beide assen OX_1 en OX_2 of beide van teeken om te keeren, dan blijkt onmiddellijk, dat A_{34} het middelpunt is van een zijvlak der oorspronkelijke cel $C_8^{(2)}$. Hieruit blijkt dus oogaanschouwelijk de juistheid der bekende stelling, dat de middelpunten der zijvlakken van een $C_8^{(2)}$ — en dus ook de middens der ribben van elk der beide ingeschrevene cellen $C_{16}^{(2\ 2)}$ — de hoekpunten zijn van een $C_{24}^{(1\ 2)}$.

3. Alvorens de netten der cellen C'_8, C_{16}, C'_{24} — of, zooals we ons zullen uitdrukken, de netten (C'_8), (C'_{16}), (C'_{24}) — in hun onderling verband nader te onderzoeken stellen we ons de vraag of het mogelijk is R_4 met *verschillende* regelmatige cellen geheel te vullen. Hier wijst het boven gegeven tabelletje ons op twee mogelijkheden. We kunnen de som der hoeken 75° 31′ 21″ en 164° 28′ 39″ met 120 ° tot 360° aanvullen of door combinatie van een der beide cellen C'_{16}, C'_{24} met tweemaal de andere tot 360° komen. Dit laatste is echter reeds hierdoor buitengesloten, dat C'_{16} en C'_{24} in grenslichamen verschillen, welk bezwaar zich niet voordoet als men tracht de drie cellen C'_8, C'_{16}, C'_{600} met dezelfde lengte van ribben om een zijvlak te rangschikken. Doch hoewel dit mogelijk is, komt men ook langs dezen weg niet tot het beoogde doel. Was de bedoelde ruimtevulling tot stand gekomen, dan zouden twee grensviervlakken van C'_8, die steeds een zijvlak gemeen hebben, hierin van elkaar moeten verschillen, dat het eene tevens aan een C'_{16}, het andere tevens aan een C'_{600} behoorde, en dit is onmogelijk. Want men kan de grensviervlakken van een C'_8 reeds daarom alleen niet om en om wit en zwart kleuren, omdat het aantal vijf dier viervlakken oneven is. Er bestaat dus geen ruimtevulling van R_4, waarbij *verschillende* regelmatige cellen optreden.

4. We beschouwen thans de door de middelpunten der regelmatige cellen van de netten (C'_8), (C'_{16}), (C'_{24}) gevormde stelsels van punten, die we door de symbolen (P_8), (P_{16}), (P_{24}) aanduiden, wat nader.

Van de puntstelsels (P_8), (P_{16}), (P_{24}), die we vierdimensionale „assemblages van BRAVAIS" zouden kunnen noemen, is (P_8) het eenvoudigste. Zijn de coördinaatassen door het middelpunt van een bepaalde cel $C'^{(2)}_8$ evenwijdig aan de ribben dezer cel aangenomen, dan is (P_8) het stelsel der punten $(2a_1, 2a_2, 2a_3\ 2a_4)$ met louter geheele evene coördinaten, wat we in verkortende symboliek door de vergelijking $(P_8) = (2a_i)$ aangeven.

Van de beide andere puntstelsels laat zich (P_{24}) het eenvoudigst in (P_8) uitdrukken. Bij de tweede afleidingswijs van de cellen $C'^{(2)}_{24}$ uit de cellen $C^{(2)}_8$ bleek ons, dat (P_{24}) de vereeniging is van het stelsel (P_8) met het stelsel der hoekpunten van de cellen $C'^{(2)}_8$. Nu is dit stelsel der hoekpunten uit (P_8) af te leiden door een translatie, in richting en in grootte aangegeven door het lijnsegment, dat het middelpunt van de achteel, die tot bepaling van het coördinatenstelsel diende, met een der hoekpunten verbindt; dus is het stelsel der hoekpunten in dezelfde symboliek door $(2a_i + 1)$ aangegeven en vinden we

$(P_{24}) = (2a_i) + (2a_i + 1)$, d. w. z. (P_{24}) is het stelsel der punten met geheele coördinaten, die òf alle even òf alle oneven zijn.

Eindelijk wordt (P_{16}) uit (P_{24}) afgeleid door aan (P_8) niet het geheele stelsel der hoekpunten der cellen $C_8^{(2)}$ toe te voegen, doch slechts die helft, welke niet door de hoekpunten der ingeschreven $C_{16}^{(21\ 2)}$ wordt ingenomen. We drukken dit uit door de vergelijking $P_{16} = (2a_i) + \frac{1}{2}(2a_i + 1)$. Hierbij is dan onder $\frac{1}{2}(2a_i + 1)$ die verzameling van punten te verstaan, waarvan de coördinaten louter geheele onevene getallen zijn gebonden aan de voorwaarde, dat de halve som òf steeds even, òf steeds oneven is. Is in de cel $C_8^{(2)}$, die ons boven het coördinatenstelsel leverde, een positieve $C_{16}^{(21\ 2)}$ beschreven, wat we verder zullen onderstellen, dan is het punt (1, 1, 1, 1) door een hoekpunt der ingeschreven $C_{16}^{(21\ 2)}$ ingenomen en voor de vrijgebleven hoekpunten $\frac{1}{2}(2a_i + 1)$ de halve som der vier grootheden a_i dus oneven.

Wordt het verband tusschen de puntstelsels (P_8), (P_{16}), (P_{24}) op de aangegeven wijs gelegd, dan is het aantal punten van (P_{24}) dubbel, het aantal punten van (P_{16}) anderhalf maal zoo groot als dat van (P_8) en moeten dus de inhouden van $C_8^{(2)}$, $C_{16}^{(21\ 2)}$, $C_{24}^{(1\ 2)}$ tot elkaar staan als de getallen 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$. Dit laat zich gemakkelijk verifieeren. Om van $C_8^{(2)}$ een $C_{16}^{(21\ 2)}$ te maken hebben we aan acht hoekpunten een rechthoekige vijfcel weggekapt, waarvan de inhoud $\frac{1}{24}$ is van $C_8^{(2)}$; dus blijft er $\frac{2}{3}$ van $C_8^{(2)}$ over. En om van $C_8^{(2)}$ de in deze cel vervatte $C_{24}^{(1\ 2)}$ te maken hebben we elk der zestien deelen $C_8^{(1)}$ gehalveerd.

5. Onder het „transformatiebeeld" van elk der netten (C_8), (C_{16}), (C_{24}) met betrekking tot een ruimte R_3 van de dragende ruimte R_4 als scherm verstaan we de van oogenblik tot oogenblik veranderende doorsnee van deze vaste ruimte met het zich in de richting loodrecht op deze ruimte voortbewegende vierdimensionale net. Verwisselt men bij deze beweging het betrekkelijke met het volstrekte, dan kan men dit transformatiebeeld ook opvatten als voortgebracht door de door-

snijding van het stilstaande vierdimensionale net met een ruimte R_3, die zich, evenwijdig blijvend met zich zelf, in loodrechte richting beweegt; daarbij kan men dan weer aannemen, dat dit beeld wordt waargenomen door iemand, die in de beweging der ruimte R_3 deelt. Hoofddoel nu van deze mededeeling is aan te geven hoe men de transformatiebeelden der netten (C'_{16}), (C_{24}) in verband kan brengen met dat van het net (C'_8), dat verreweg het eenvoudigste is. Wijl de drie beelden op elk oogenblik een vulling der snijdende ruimte leveren, kan dit onderzoek tot nieuwe, zij het dan ook niet geheel regelmatige driedimensionale ruimtevullingen voeren.

Om eenig transformatiebeeld van het net (C'_{16}) te kunnen ontwerpen moet men van elk der samenstellende cellen C_{16} de plaats *van* het middelpunt en den stand *om* het middelpunt kennen; wijl de coördinaten van de celmiddelpunten boven gegeven zijn, hebben we ons verder slechts met den stand om het middelpunt bezig te houden. We duiden dien aan met behulp van de vier diagonalen van elke C'_{16} en merken dan op, dat deze vier lijnen bij elk der beide soorten van ingeschreven cellen C_{16} ook diagonalen — groepen van niet-naburige diagonalen — van de omgeschreven cellen C_8 zijn, terwijl ze bij de cellen C'_{16} van de derde groep aan de coördinaatassen evenwijdig loopen.

Denkt men zich het middelpunt eener cel $C'^{(2)}_{16}$ van de derde groep tevens als het middelpunt van een cel $C'^{(4)}_8$, waarvan de ribben evenwijdig loopen aan de coördinaatassen, dan is de $C'^{(2)}_{16}$ in dien zin ingeschreven in deze nieuwe achtcel, dat de hoekpunten van $C'^{(2)}_{16}$ de middelpunten zijn der acht grenskuben van $C'^{(4)}_8$. Om een doorzichtige reden noemen we de $C'^{(2)}_{16}$ *polair* ingeschreven in $C'^{(4)}_8$ — en nu ter onderscheiding de cellen der beide andere groepen *lichamelijk* ingeschreven in de cellen $C'^{(2)}_8$. Immers, zooals reeds boven werd opgemerkt, is dan in elk der acht grenskuben van $C'^{(2)}_8$ een grensviervlak van $C'^{(2)}_{16}$, ingeschreven, terwijl elk der overige acht grensviervlakken van $C'^{(2)}_{16}$ met betrekking tot elk der vier paren overstaande grenskuben van $C'^{(2)}_8$ drie hoekpunten van den eenen en een hoekpunt van den anderen kubus tot hoekpunten heeft.

Hiermee is dan elk der cellen $C'^{(2)}_{16}$ van het net (C_{16}) verpakt in een zoo klein mogelijke C_8, waarvan de ribben evenwijdig loopen

aan de coördinaatassen. Daarbij zijn de vierdimensionale doozen van de „rechtopstaande" cellen C_{16} van de derde groep cellen $C_8^{(4)}$, die van de „hellende" cellen C_{16} van de eerste en tweede groep cellen $C_8^{(2)}$. Terwijl de doozen $C_8^{(2)}$ der hellende cellen C_{16} de ruimte R_4 vullen, doen de doozen $C_8^{(4)}$ der rechtopstaande cellen C_{16} dit achtmaal, wijl $C_{16}^{(24\cdot 2)}$ het 24ste deel is van $C_8^{(4)}$, — zoo als onmiddellijk blijkt als men de rechtopstaande $C_{16}^{(24\cdot 2)}$ en haar doos $C_8^{(4)}$ door ruimten door het gemeenschappelijk middelpunt evenwijdig aan de paren grensruimten van $C_8^{(4)}$ in zestien gelijke deelen verdeelt en de rechthoekige vijfcel van $C_{16}^{(24\cdot 2)}$ vergelijkt met de $C_8^{(2)}$ van $C_8^{(4)}$ —, en de rechtopstaande C_{16} gezamenlijk een derde van R_4 vullen.

Bij de tweede omzettingswijs van de cellen $C_8^{(2)}$ van het net (C_8) in de cellen $C_{24}^{(1\cdot 2)}$ van een net (C_{24}) zijn de hoekpunten van de met een $C_8^{(2)}$ concentrische $C_{24}^{(1\cdot 2)}$ de middelpunten der zijvlakken van deze $C_8^{(2)}$, waaruit volgt, dat de zes middelpunten der zijvlakken van elk der acht grenskuben van $C_8^{(2)}$ hoekpunten zijn van een grensachtvlak van $C_{24}^{(1\cdot 2)}$ en deze cel dus weer ingeschreven — en wel *lichamelijk* ingeschreven — in $C_8^{(2)}$ mag heeten. Ook de overige zestien grensachtvlakken laten zich met betrekking tot deze omgeschreven $C_8^{(2)}$ onmiddellijk aanwijzen; door elk der zestien hoekpunten van $C_8^{(2)}$ gaan zes zijvlakken dezer cel, waarvan de middelpunten de hoekpunten van een grensachtvlak van $C_{24}^{(V2)}$ uitmaken [1]).

Uit het voorgaande volgt, dat de vierdimensionale doozen, die de cellen $C_{24}^{(1\cdot 2)}$ insluiten en aan de coördinaatassen evenwijdige ribben hebben, uit twee netten (C_8) van cellen $C_8^{(2)}$ bestaat, welke door verwisseling van middelpunten en hoekpunten in elkaar overgaan.

6. We eindigen dit eerste gedeelte met de aanwijzing van het verband

[1]) Door van het gekozen hoekpunt van deze $C_8^{(2)}$ uit de voerstralen der zes middelpunten der zijvlakken te verdubbelen vindt men de centrale doorsnee loodrecht op de diagonaal van dit punt.

tusschen de assenstelsels der vijf verschillende cellen met den oorsprong van coördinaten tot gemeenschappelijk middelpunt, die men door evenwijdige translatie van een der cellen $C_8^{(2)}$, een van elk der drie groepen van cellen $C_{16}^{(21\ 2)}$ en een der cellen $C_{24}^{(0\ 2)}$ verkrijgen kan. We duiden deze cellen kortheidshalve door C_8, C_{16}, C''_{16}, C'''_{16}, C_{24} aan, waarbij C_{16} de polair ingeschrevene en C''_{16} en C'''_{16} achtereenvolgens de positieve en de negatieve lichamelijk ingeschrevene zestiencel voorstellen. Verder zullen ook hier — volgens de notatie van het boven aangehaalde leerboek — E, K, F, R hoekpunt, midden van ribbe, middelpunt van zijvlak, middelpunt van grenslichaam aangeven en derhalve onder OE, OK, OF, OR op deze punten uitloopende assen te verstaan zijn. Zoo is dan OE_8 een as OE van C_8, OK_{16} een as OK van C_{16}, OF''_{16} een as OF van C''_{16}, enz.

De aantallen der assen OE, OK, OF, OR van elk der drie verschillende cellen zijn steeds de helften van de aantallen der elementen E, K, F, R; ze zijn vervat in het volgende tabelletje.

	OE	OK	OF	OR
C_8	8	16	12	4
C_{16}	4	12	16	8
C_{24}	12	48	48	12

Hier vertegenwoordigt C_{16} natuurlijk de drie cellen C_{16}, C'_{16}, C''_{16}.

We wijzen nu het verband der assenstelsels van de vijf cellen C_8, C_{16}, C''_{16}, C'''_{16}, C_{24} aan, door de coördinaten van de bij deze concentrische cellen optredende punten E, K, F, R op te geven met betrekking tot twee stelsels van coördinaatassen met het gemeenschappelijk middelpunt der cellen tot oorsprong, het stelsel (OX_i) der vier assen OR_8 en het stelsel (OY_i) der vier assen OE''_{16} (fig. 2), tusschen welke de betrekkingen

$$\left.\begin{aligned} 2y_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2y_2 &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ 2y_3 &= -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ 2y_4 &= -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \end{aligned}\right\}$$

bestaan. [1])

[1]) We kozen deze transformatie T, omdat ze de hoekpuntenachttallen van C_{16} en C'_{16} in elkaar en die van C'_{16} in zich zelf doet overgaan. Zij voldoet aan de voor-

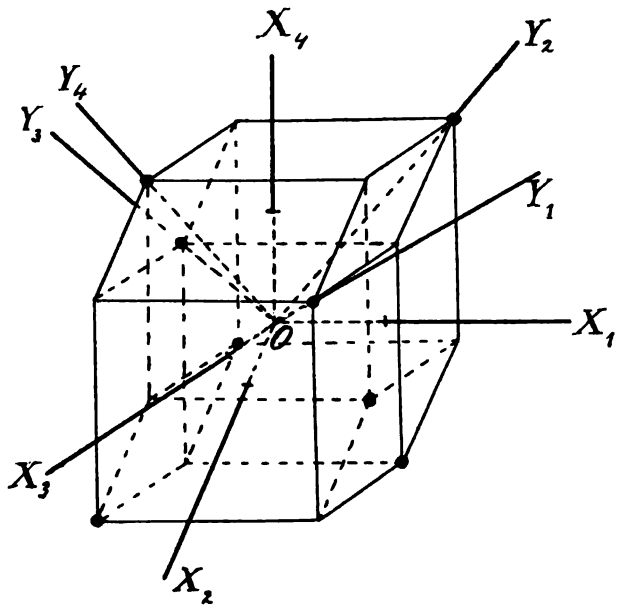


Fig. 2.

We geven nu eerst in beide coördinatenstelsels de coördinaten der *hoekpunten* van de vijf concentrische cellen aan en verdeelen daarbij — zie het volgende tabelletje — de zestien hoekpunten van $C_8^{(2)}$ in de acht hoekpunten van C'_{16} en de acht hoekpunten van C''_{16}; daartoe is dan ter onderscheiding noodig aan te geven of het product der coördinaten positief of negatief is.

Cellen	Aantal hoek-punten	Coördinaten (OXi)	Product	Coördinaten (OYi)	Product
C_8 en C'_{16}	8	$(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$	+	$(\pm 2, 0, 0, 0)$	
C_8 en C''_{16}	8	$(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$	−	$(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$	−
C_{16}	8	$(\pm 2, 0, 0, 0)$		$(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$	+
C_{24}	24	$(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$		$(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$	

Met behulp hiervan vindt men gemakkelijk de beide viertallen van coördinaten van de stelsels der punten K, F, R van de vijf cellen. Ze zijn aangegeven in de volgende tabel, die na al het voorgaande nu in zich zelf wel duidelijk zijn zal.

waarde $T^4 = -1$, zoodat eerst T^8 de eenheid teruggeeft. Men vindt, dat T^2 een rechthoekige dubbeldraaiing om O is, waardoor (x_1, x_4) in $(-x_4, x_1)$ en (x_2, x_3) in $(-x_3, x_2)$ overgaat.

Cellen					Aantal der assen	Coördinaten (OXi)	Product	Coördinaten (OYi)	Product
C_8	C_{16}	C_{16}	C''_{16}	C_{24}					
E	$2R$	E	$\frac{4}{3}R$	$2R$	4	$(\pm1,\pm1,\pm1,\pm1)$	+	$(2,0,0,0)$	
E	$2R$	$\frac{4}{3}R$	E	$2R$	4	$(\pm1,\pm1,\pm1,\pm1)$	−	$(\pm1,\pm1,\pm1,\pm1)$	−
K	$\frac{3}{2}F$	—	—	$\frac{3}{2}F$	16	$(\pm1,\pm1,\pm1,0)$		$\left(\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$	−
F	K	K	K	E	12	$(\pm1,\pm1,0,0)$		$(\pm1,\pm1,0,0)$	
R	$\frac{1}{2}E$	R	R	R	4	$(\pm1,0,0,0)$		$\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$	+
—	—	F	—	F	16	$\left(\pm1,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{3}\right)$	−	$\left(\pm\frac{2}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{2}{3},0\right)$	
—	—	—	F	F	16	$\left(\pm1,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{3}\right)$	+	$\left(\pm1,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{3}\right)$	+
—	—	—	—	K	48	$\left(\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},0\right)$		$\left(\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},0\right)$	

Natuurlijk komen de assen, waarvan telkens het aantal opgegeven is, in karakter overeen met de punten, die ze met O verbinden. Zoo zijn de vier assen, opgegeven in de eerste rij, assen OE voor C_8 en C'_{16}, assen OR voor C_{16}, C''_{16} en C_{24}: daarbij duiden de coëfficienten 2, $\frac{4}{3}$, 2 bij $2R$, $\frac{4}{3}R$, $2R$ aan, dat de in deze rij voorkomende coördinatenviertallen betrekking hebben op het punt, dat men verkrijgt als men de bedoelde as OR van C_{16}, C''_{16}, C_{24}, wat de *lengte* betreft, van O uit met 2, $\frac{4}{3}$, 2 vermenigvuldigt.

Hiermee is nu de stand van elke as van een der cellen van de drie netten (C_8), (C_{16}), C_{24}) met betrekking tot elk der beide coördinatenstelsels aangewezen en in verband met het voorgaande dus het materiaal geleverd, waardoor het mogelijk wordt alle op eenvoudige wijs met deze assen in verband staande ruimtedoorsneden dezer drie regelmatige netten gemakkelijk af te leiden. Om een voorbeeld reeds hier aan te duiden merken we op, dat een ruimte loodrecht op een der 12 assen OF voor *al* de cellen van het net (C'_{16}) op een as OK loodrecht staat; als het nu mogelijk blijkt zulk een ruimte

zoo te bepalen, dat ze van de middelpunten van alle cellen C_{16}, die gesneden worden, even ver verwijderd is, dan ontstaat in de snijdende ruimte een min of meer regelmatige ruimtevulling door een zelfde lichaam in drie verschillende standen.

In een volgende gedeelte hopen we met de bepaling der merkwaardige ruimtedoorsneden van de netten (C_8), (C_{16}), (C_{24}) aan te vangen.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt eene mededeeling aan van den Heer Z. P. BOUMAN: *„Bijdrage tot de kennis der oppervlakken met constante gemiddelde kromming."*

(Mede aangeboden door den Heer W. KAPTEYN).

§ 1. Zooals bekend is, is de groote moeilijkheid bij het bestudeeren der oppervlakken met constante gemiddelde kromming gelegen in de integratie van de diff. vergel.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = -\sinh\theta \,.\, \cosh\theta.$$

De hier gevolgde weg leidt tot twee simultane partiëele diff. vergel. van de eerste orde en van den tweeden graad.

In Gauss'sche symbolen is de waarde van de gemiddelde kromming H van een oppervlak gegeven door

$$H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}.$$

We kiezen als onafhankelijke coördinaten op het oppervlak die, welke onveranderlijk zijn langs de lijnen van lengte nul, en stellen ze voor door ξ en η. We vinden dan:

$$H = -2\frac{D'}{F}, \text{ terwijl } E = G = 0.$$

Vermenigvuldigen we beide leden der eerste vergelijking met X (richtings-cosinus van de normaal met de X-as), dan vinden we:

$$FHX = -2D'X.$$

Maar:

$$D'X = \frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\eta}\ ^{1})$$

en bovendien is [2]):

[1]) BIANCHI, Vorlesungen über Differential-Geometrie, Deutsche Uebersetzung von MAX LUKAT, pag. 89.

[2]) l. c. pag. 86.

$$FX = \frac{1}{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{dz}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} y & z \\ \xi & \eta \end{pmatrix},$$

waar x, y en z de Cartesiaansche coördinaten van het oppervlak voorstellen ten opzichte van een rechthoekig assenkruis.

We vinden dus:

$$\frac{H}{i}\begin{pmatrix} y & z \\ \xi & \eta \end{pmatrix} = -2\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta},$$

of:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{H}{2i}\begin{pmatrix} y & z \\ \xi & \eta \end{pmatrix}.$$

en evenzoo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} &= -\frac{H}{2i}\begin{pmatrix} z & x \\ \xi & \eta \end{pmatrix}. \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} &= -\frac{H}{2i}\begin{pmatrix} x & y \\ \xi & \eta \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Bovendien moeten x, y en z nog voldoen aan

$$E = G = 0,$$

dus aan:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 &= 0 \\ \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

De vergelijkingen (I) en (II) geven, voor $H = 0$, het vraagstuk der minimaal-oppervlakken terug.

Voor $-\frac{H}{2i}$ zullen we, kortheidshalve, invoeren het symbool Q.

§ 2. Om van te voren te voldoen aan (II), stellen we:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} + i\frac{\partial y}{\partial \xi} &= u\frac{\partial z}{\partial \xi}, & \frac{\partial x}{\partial \eta} + i\frac{\partial y}{\partial \eta} &= v\frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} - i\frac{\partial y}{\partial \xi} &= -\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial \xi}, & \frac{\partial x}{\partial \eta} - i\frac{\partial y}{\partial \eta} &= -\frac{1}{v}\frac{\partial z}{\partial \eta} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad (III)$$

waarin u en v nog te bepalen functie's van ξ en η zijn.

Wanneer we de vergelijkingen (III) substituëeren in (I), vinden we de vergelijkingen, waaraan u en v moeten voldoen, terwijl bovendien

$\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \xi}$ en $\frac{\partial y}{\partial \eta}$, afgeleid uit (III), aan de voorwaarden van integrabiliteit hebben te gehoorzamen.

Deze laatste geven:

$$\frac{\partial\, u \frac{\partial z}{\partial \xi}}{\partial \eta} = \frac{\partial\, v \frac{\partial z}{\partial \eta}}{\partial \xi},$$

en

$$\frac{\partial \frac{1}{u} \frac{\partial z}{\partial \xi}}{\partial \eta} = \frac{\partial \frac{1}{v} \frac{\partial z}{\partial \eta}}{\partial \xi},$$

zooals duidelijk is.

Uitschrijvende, vinden we:

$$\left.\begin{aligned} (a).\quad & \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi} + u\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,.\,\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta} + v\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,.\,\partial \eta} \\ (b).\quad & \frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{1}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,.\,\partial \eta} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{1}{v}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,.\,\partial \eta} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (IV)$$

Substituëeren we thans nog de waarden van $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \xi}$ en $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ in de vergel. (I), terwijl we $Q = -\frac{II}{2i}$ stellen, dan vinden we:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial z}{\partial \xi} + \left(u - \frac{1}{u}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{Q}{i}\left(u + \frac{1}{u} - v - \frac{1}{v}\right)\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

$$\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{1}{i}\left(u + \frac{1}{u}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = Q\left(v - \frac{1}{v} - u + \frac{1}{u}\right)\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{Q}{2i}\left(\frac{u}{v} - \frac{v}{u}\right)\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

Uit deze laatste drie vergelijkingen worden, met behulp van (IV), direct afgeleid:

$$\left.\begin{aligned} (a).\quad & \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi} + u\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = Q\,i\,(v - u)\,\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta} \\ (b).\quad & \frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{1}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = Q\,i\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right)\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \text{terwijl}\quad & \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{Q}{2i}\left(\frac{u}{v} - \frac{v}{u}\right)\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (V)$$

We kunnen gemakkelijk doen zien, dat een der vergelijkingen (V) afhankelijk is van de twee andere, zooals duidelijk is.

Deelen we beide leden van (V,a) door u^2, en voegen er bij (V,b), dan vinden we:

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{2v}{Qi(v-u)^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Uit (IV,a) volgt:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} = (v-u) \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = (v-u) \left(\frac{u^2-v^2}{uv} \right) \frac{Q}{2i} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

Door hierin $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ te substituëeren, vinden we:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = - \frac{2u}{Qi(v-u)^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

We kunnen thans, uit (III), het volgende stel vergelijkingen opschrijven:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{-(u^2-1)}{Qi(v-u)^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} \\
\frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{1}{2}\left(v - \frac{1}{v}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{v^2-1}{Qi(v-u)^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} \\
\frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{2i}\left(u + \frac{1}{u}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{u^2+1}{Q(v-u)^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} \\
\frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{1}{2i}\left(v + \frac{1}{v}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{-(v^2+1)}{Q(v-u)^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} \\
\frac{\partial z}{\partial \xi} &= = \frac{-2u}{Qi(v-u)^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} \\
\frac{\partial z}{\partial \eta} &= = \frac{2v}{Qi(v-u)^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (VI)$$

Zoodra dus u en v bekend zijn, is het vraagstuk opgelost.

§ 3. Om thans de vergelijkingen, waaraan u en v moeten voldoen, neer te schrijven, kunnen we gebruik maken van (IV) en (VI), of we kunnen gebruik maken van de voorwaarden van integrabiliteit.

(IV,a) geeft:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{-2u}{iQ(v-u)^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{2v}{iQ}\left(\frac{2}{(v-u)^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{v-u} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right).$$

(IV,b) geeft:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{-2u}{iQ(v-u)^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{2u}{iQ}\left(\frac{2}{(v-u)^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{v-u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right).$$

Uit (VI) vinden we:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right) = -\frac{2}{iQ}\frac{v+u}{(v-u)^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi} + \frac{2v}{iQ(v-u)}\left(\frac{2}{(v-u)^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta} + \frac{1}{v-u}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right) = -\frac{2}{iQ}\frac{v+u}{(v-u)^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi} + \frac{2u}{iQ(v-u)}\left(\frac{2}{(v-u)^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial v}{\partial\eta} - \frac{1}{v-u}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}\right)$$

en

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{Q}{2i}\left(\frac{u}{v}-\frac{v}{u}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\eta} \text{ geeft } \frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = -\frac{2}{iQ}\frac{v+u}{(v-u)^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi}.$$

De hier boven gegeven vergelijkingen toonen dus aan, dat aan al de voorwaarden van het vraagstuk te voldoen is op de eenige wijze, door te stellen:

$$\frac{2}{(v-u)^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta} + \frac{1}{(v-u)}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \text{ en } -\frac{2}{(v-u)^2}\frac{\partial v}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial v}{\partial\eta} + \frac{1}{(v-u)}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = 0,$$

welke vergelijkingen we schrijven in den vorm:

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta} + (v-u)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} &= 0 \\ 2\frac{\partial v}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial v}{\partial\eta} - (v-u)\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (VII)$$

Het vraagstuk is dus geheel teruggebracht tot de integratie van deze twee simultane diff. vergel., die van de tweede orde en niet lineair zijn.

Gemakkelijk valt af te leiden uit (VII), dat voldaan is aan de voorwaarden $\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)$ en $\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)$.

We vinden n.l. steeds:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\eta} = -\frac{2(uv-1)}{Qi(v-u)^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{2(uv+1)}{Q(v-u)^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi},$$

terwijl

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = -\frac{2(v+u)}{iQ(v-u)^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi}.$$

Na substitutie blijkt:

$$D' = -\frac{H}{2}F \text{ en } X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

zoodat dus werkelijk aan alle voorwaarden van het vraagstuk voldaan blijkt door de vergel. (VII). Er zou dus alleen overblijven, de oplossing van (VII) te vinden.

§ 4. We weten reeds, dat, op de coördinaten ξ en η, voldaan moet worden aan

$$D' = -\frac{H}{2} . F.$$

Maar bovendien volgt uit de vergelijkingen van CODAZZI[1]):

$$\frac{\partial D}{\partial \eta} = 0 \text{ en } \frac{\partial D''}{\partial \xi} = 0$$

Dus is:

$$D = f_1(\xi) \text{ en } D'' = f_2(\eta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (VIII)$$

waarin f_1 en f_2 respect. functie's van ξ en η alleen zijn.

Het geval, dat òf D òf D'' gelijk is aan nul, biedt geen moeilijkheden, maar ook niets bijzonders.

Zijn D en D'' beide gelijk nul, dan is direct duidelijk, dat dit leidt tot het boloppervlak, den eenvoudigsten vorm van een oppervlak met constante gemiddelde kromming. We kunnen n.l. de voorwaarde neerschrijven voor ombilicaalpunten, die, met weglating van kleinen van hooger orde, luidt: [2])

$$\frac{E}{D} = \frac{F}{D'} = \frac{G}{D''}.$$

Wanneer voor elk punt van het oppervlak $E = G = 0$, is dus elk punt een ombilicaal-punt, zoodra steeds $D = D'' = 0$; en deze oppervlakken zijn (voor zoover het de reëele oplossing betreft) alleen bollen.

§ 5. We vatten thans de zaak iets algemeener aan.

Beschouwen we de totale kromming van een oppervlak als simultaan-differentiaal-invariante der beide grondvormen, dan vinden we[3]):

$$\text{Totale kromming} = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = \frac{H^2}{4} - \frac{f_1(\xi) f_2(\eta)}{F^2} =$$

$$= \frac{1}{2iF} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{2}{iF} \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) = -\frac{1}{F} \frac{\partial^2 (\ell F)}{\partial \xi \partial \eta} \quad (IX)$$

(We merken nog op, dat direct is in te zien

$$\frac{2}{F} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2},$$

waar r_1 en r_2 de hoofd-kromtestralen zijn).

---

[1]) BIANCHI, l.c. pag. 91. Bij het gebruik der coördinaten ξ en η zijn de CHRISTOFFEL'sche symbolen alle nul, behalve $\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{matrix} \right\}$ en $\left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\}$. Door gebruik te maken van $D' = -\frac{H}{2} F$, blijkt het in den tekst gezegde.

[2]) Zie b.v. V. en K. KOMMERELL, Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen, II, pag. 21.

[3]) BIANCHI, l.c. pag. 68.

Leiden we thans uit (VI) de waarde van F af, dan vinden we:

$$F = -\frac{2}{Q^2(v-u)^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial v}{\partial \xi}$$

of:

$$F = \frac{8}{H^2(v-u)^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

Deze waarde van F substituëeren we in (IX), door middel van de volgende omrekeningen. Uit (VII) volgt:

$$\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}}{\frac{\partial u}{\partial \eta}} + \frac{2}{v-u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}}{\frac{\partial u}{\partial \eta}} - 2\frac{\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial v}{\partial \xi}}{(v-u)^2}.$$

Dit moet gelijk zijn aan:

$$-\frac{H^2}{4}F + \frac{f_1(\xi)\cdot f_2(\eta)}{F} = -\frac{2}{(v-u)^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{H^2(v-u)^2 f_1(\xi) f_2(\eta)}{8\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial v}{\partial \xi}}$$

en we vinden dus:

$$H^2\cdot f_1(\xi)\cdot f_2(\eta)\cdot(v-u)^2 = 8\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial v}{\partial \xi}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}}{\frac{\partial u}{\partial \eta}} + \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}}{v-u}\right\}$$

Het tweede lid kan nog eens herleid worden door gebruik te maken van (VII), en we vinden:

$$\frac{H^2 f_1(\xi) f_2(\eta)(v-u)^2}{8\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial v}{\partial \xi}} = \frac{2}{(v-u)^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Dus is:

$$H^2 f_1(\xi) f_2(\eta) = \frac{16}{(v-u)^4}\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial v}{\partial \eta} \quad . \quad . \quad . \quad (X)$$

§ 6. Keeren we thans terug tot de vergel. (VII). We zien direct dat een oplossing, die $F = \frac{8}{H^2(v-u)^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}$ niet nul maakt, gegeven is door:

$$u = \varphi(\eta) \quad , \quad v = \psi(\xi),$$

waar φ en ψ respect. functie's van η en ξ alleen zijn.

Duidelijk is, dat aan vergel. (IX) voldaan wordt, wanneer $f_1(\xi) = f_2(\eta) = 0$, dus wanneer $D = D' = 0$ (§ 4).

Het verdient opmerking, dat, wanneer $u = \varphi(\eta)$ en $v = \psi(\xi)$ gesubstitueerd worden in de vergel. voor F, deze vorm een oplossing wordt van

$$-\frac{H^2}{4}F = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{F}\cdot\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)$$

en dit klopt dus volkomen, omdat we hier met de diff. vergel. van LIOUVILLE te doen hebben. Trouwens het vraagstuk der oppervl. met const. gem. kromming leidt altijd tot een uitgebreide vergelijking van LIOUVILLE, zooals (IX), hoe het ook wordt aangepakt.

Dat we bij deze oplossing werkelijk met een bol te doen hebben, moet uit (VI) volgen. Deze vergelijkingen geven voor $u = \varphi(\eta)$ en $v = \psi(\xi)$,

$$z = \frac{1}{Qi}\frac{v+u}{v-u}$$

$$x = \frac{1}{Qi}\frac{uv-1}{v-u}$$

$$y = -\frac{1}{Q}\frac{uv+1}{v-u},$$

de welbekende formules voor den bol in minimaal coördinaten.

We vinden:

$$x^2 + y^2 + z^2 = -\frac{1}{Q^2} = \frac{4}{H^2},$$

d. i. een bol met straal $\frac{2}{H}$, zooals noodzakelijk is.

Nu het bijzondere geval $f_1(\xi) = f_2(\eta) = 0$ beschouwd is, kunnen we beide functie's $= 1$ stellen door het invoeren van nieuwe functie's

$$f_1(\xi) = \xi_1 \quad \text{en} \quad f_2(\eta) = \eta_1,$$

die we weer door ξ en η zullen aanduiden. Dit is van groot belang, indien eventuëel de oplossing der vergel. (VII) zou gevonden worden.

§ 7. We kunnen thans de vraag stellen, of de vergel. (*VII*) opgelost kunnen worden door $u = f(v)$ te stellen, waar f voorloopig willekeurig is.

Uit (*VII*) laat zich afleiden:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}}{\dfrac{\partial v}{\partial\xi}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial\eta}} + \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}}{\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\eta}} = 0.$$

Voor $u = f(v)$, leidt dit tot

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f'(v) \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = f''(v) \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} + f'(v) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Dus:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{f''(v) \cdot \dfrac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial \eta} + f'(v) \cdot \dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}}{f'^2(v)}}{\dfrac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial \eta}} = 0,$$

of

$$\{f'^2(v) + f'(v)\} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + f''(v) \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0.$$

Verder is, volgens (*VII*), $\dfrac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = \dfrac{v-u}{2} \cdot \dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}$.

Dus:

$$f'^2(v) + f'(v) + \frac{v - f(v)}{2} f''(v) = 0.$$

Eén integraal hiervan is voldoende om den aard der gevonden oppervlakken te herkennen. Voldaan wordt door:

$$f(v) = -v\ ^1).$$

---

[1]) Prof. KAPTEYN was zoo vriendelijk, me opmerkzaam te maken op de volgende algemeene oplossing der diff. vergel.

Stel

$$f(v) = y$$

dan is

$$\frac{v-y}{2} \frac{d^2y}{dv^2} + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \frac{dy}{dv} = 0.$$

Stel thans

$$y = v + w,$$

dus

$$\frac{dy}{dv} = 1 + \frac{dw}{dv}, \quad \frac{d^2y}{dv^2} = \frac{d^2w}{dv^2},$$

zoodat

$$-\frac{w}{2} \frac{d^2w}{dv^2} + \left(\frac{dw}{dv}\right)^2 + 3\left(\frac{dw}{dv}\right) + 2 = 0.$$

Zij nu $\dfrac{dw}{dv} = p$, dus $\dfrac{d^2w}{dv^2} = p \dfrac{dp}{dw}$,

dan is:

$$-\frac{w}{2} p \frac{dp}{dw} + (p+1)(p+2) = 0,$$

waaruit volgt, $\dfrac{(p+2)^2}{p+1} = kw^2$ (k = const.).

Voor $k = 0$ geeft deze oplossing die, welke in den tekst gebruikt is.

De vergel. (VII) worden:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \text{ en } \frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

welke door een functie en haar tegengestelde voldaan worden. We leiden hieruit af:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial (lu)}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Dus is b.v.:

$$u = e^{\psi(\eta)+\varphi(\xi)}, \quad v = -e^{\psi(\eta)+\varphi(\xi)}.$$

Door quadraturen vinden we uit (VI):

$$2Qiz = -\psi(\eta) + \varphi(\xi)$$
$$4Qix = e^{\psi(\eta)+\varphi(\xi)} + e^{-\psi(\eta)-\varphi(\xi)}$$
$$4Qy = -e^{\psi(\eta)+\varphi(\xi)} + e^{-\psi(\eta)-\varphi(\xi)}$$

Het oppervlak is een omwentelingscylinder. Zijn doorsnede met het xy-vlak is een cirkel, daar we vinden:

$$y^2 + x^2 = -\frac{1}{4Q^2} = \frac{1}{H^2}.$$

De straal van den cirkel is dus $\frac{1}{H}$, zooals moet.

We kunnen verder gemakkelijk aantoonen, dat onze oplossing in overeenstemming is met de diff. verg. (IX), wanneer we

$$f_1(\xi) = f_2(\eta) = 1$$

stellen. We vinden n.l., dat het tweede lid nul wordt, zoodat is:

$$\frac{1}{F} = \frac{H}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Daar verder, zooals we opmerkten, $\frac{1}{F} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ is dus $r_2 = \infty$.

§ 8. We kunnen thans onderzoeken, wat, in de vergel. (VII), de beteekenis zou zijn van een oplossing $u = \chi(\xi)$, indien deze mogelijk is.

Aan de vergelijking:

$$2\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta} + (v-u)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

wordt voldaan door $u = \chi(\xi)$.

Er blijft dus te integreeren:

$$2\frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial v}{\partial \eta} - (v-u)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

als $u = \chi(\xi)$.

Gevonden wordt:

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(v - \chi(\xi))^2 \cdot f(\xi),$$

met $f(\xi)$ als willekeurige functie van ξ.

De oplossing $u = \chi(\xi)$ geeft (zie (VI)) de waarde nul voor $\frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}$ en $\frac{\partial z}{\partial \eta}$, terwijl voor $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}$ en $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ de welbekende formules voor de minimaal-krommen teruggevonden worden.

Geheel hetzelfde (met verwisseling van u en v, ξ en η) vinden we, door te stellen $v = \chi_1(\eta)$.

Deze oplossing laat dus zien, welke betrekkingen er zijn tusschen de minimaal-oppervlakken en de thans beschouwde. Voor de eerstgenoemde hebben we alleen de twee oplossingen, die gevonden zijn, samen te voegen, om de volledige oplossing, met twee willekeurige functies te vinden. We zien dus, dat de minimaal-oppervlakken zijn translatie-oppervlakken, die ontstaan door een kromme uit een stel minimaal-krommen te bewegen langs de verschillende punten van een kromme uit het tweede stel. M. a. w., we hebben teruggevonden de integratie van de minimaal-oppervlakken en wel in den gewonen vorm.

Dat in dit geval niet gevreesd behoeft te worden voor $F = 0$, vindt dus zijn oorzaak in het nul worden van H.

§ 9. Nu de bijzondere gevallen van bol (plat-vlak), cylinder en minimaal-oppervlakken zijn uitgesloten, zou overblijven de integratie der vergelijkingen (VII). Ik heb dit niet verder kunnen brengen dan tot het verlagen van de orde der beide diff. vergel., wat misschien een stap vooruit beteekent tot een volledige oplossing of tot oplossingen voor bepaalde reeksen van oppervlakken.

Daartoe stellen we:

$$\frac{\partial v}{d\xi} \cdot \frac{1}{(v-u)^2} = \frac{w_1}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{1}{(v-u)^2} = -\frac{w_2}{2},$$

waar w_1 en w_2 functies van ξ en η zijn.

Hieruit leiden we af, respect. door differentiatie naar ξ en η,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = (v-u) \cdot w_1 \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{2}(v-u)^2 \cdot \frac{\partial w_1}{\partial \eta}$$

en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = -(v-u) \cdot w_2 \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \frac{1}{2}(v-u)^2 \cdot \frac{\partial w_2}{\partial \xi}.$$

Door middel der beide niet gedifferentieerde vergelijkingen en door vergel. (VII), leiden we uit onze laatste vergel. af:

$$w_1 \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} = w_1 \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{d\eta} \right) + \frac{1}{2} (v-u) \cdot \frac{\partial w_1}{\partial \eta}$$

$$\text{en } -w_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} = w_2 \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{2} (r-u) \cdot \frac{\partial w_2}{\partial \xi},$$

of:

$$w_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{2} (v-u) \cdot \frac{dw_1}{\partial \eta} \text{ en } w_2 \frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} (v-u) \cdot \frac{\partial w_2}{\partial \xi},$$

waaruit volgt:

$$-w_1 w_2 (v-u) = \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \text{ en } -w_1 w_2 (v-u) = \frac{\partial w_2}{\partial \xi}.$$

We mogen dus stellen:

$$w_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi} \text{ en } w_2 = \frac{\partial f}{\partial \eta},$$

waar f een functie van ξ en η is, die evenwel te voldoen heeft aan een nieuwe diff. vergel.

We hebben dus:

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{(r-u)^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \xi} \text{ en } \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{(r-u)^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \eta},$$

terwijl bovendien:

$$v - u = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}}{\dfrac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \eta}}$$

Uit (VII) volgt:

$$r - u = 2 \frac{\dfrac{\partial r}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial r}{\partial \eta}}{\dfrac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \eta}} \text{ en } r - u = -2 \frac{\dfrac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial \eta}}{\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}}.$$

Door substitutie van $v - u$, $\dfrac{\partial r}{\partial \xi}$ en $\dfrac{\partial v}{\partial \eta}$ vinden we dus:

$$1 = \frac{(r-u) \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial r}{\partial \eta}}{\dfrac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \eta}} \qquad 1 = -\frac{(r-u) \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}}$$

$$1 = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \dfrac{\partial r}{\partial \eta}}{\dfrac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \eta}} \qquad 1 = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \dfrac{\partial f}{d \xi}}.$$

$$\frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}}{\dfrac{\partial v}{\partial\eta}} = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}}{\dfrac{\partial f}{\partial\eta}} \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}}{\dfrac{\partial u}{\partial\xi}} = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}}{\dfrac{\partial f}{\partial\xi}}.$$

Na integratie vinden we dus:

$$\frac{\partial v}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial f}{\partial\eta} = F_2(\eta) \text{ en } \frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial f}{\partial\xi} = F_1(\xi).$$

Deze vergel. combineerende met de waarden voor $\dfrac{\partial v}{\partial\xi}$ en $\dfrac{\partial u}{\partial\eta}$, vinden we:

$$\frac{\partial v}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta} = -\frac{1}{2}(v-u)^2 F_2(\eta) \text{ en } \frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi} = \frac{1}{2}(v-u)^2 F_1(\xi).$$

Deze vergel. moeten beschouwd worden als de intermediaire integralen; ze bevatten de willekeurige functie's F_2 en F_1, en men bewijst gemakkelijk, dat ze door differentiatie weer terugvoeren tot de beide vergelijkingen (VII) van de tweede orde.

Het spreekt bijna wel van zelf, dat de F_2 en F_1, die hier optreden, in nauw verband staan tot de f_1 en f_2, die voorkomen in de vergel. (VIII).

Uit de laatst gevonden vergelijkingen volgt:

$$\frac{\partial v}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\xi} = -\frac{1}{4}(v-u)^4 . F_2(\eta) . F_1(\xi),$$

of

$$F_2(\eta) . F_1(\xi) = -\frac{4\dfrac{\partial v}{\partial\eta}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial\xi}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\xi}}{(v-u)^4}.$$

Vergelijken we dit met (X), dan is:

$$-4 F_2(\eta) . F_1(\xi) = H^2 f_1(\xi) f_2(\eta).$$

De gevonden eerste integralen voldoen dus geheel aan alle voorwaarden.

We hebben onze oorspronkelijke coördinaten zoo getransformeerd, dat $f_1(\xi)$ en $f_2(\eta)$ beide $= 1$ werden, en kunnen dus in overeenstemming daarmee thans kiezen:

$$F_2(\eta) = \frac{H}{2i} \text{ en } F_1(\xi) = \frac{H}{2i},$$

zoodat de eerste integralen worden:

$$\frac{\partial v}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta} = -\frac{H}{4i}(v-u)^2 \text{ en } \frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi} = \frac{H}{4i}(v-u)^2,$$

of

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial v}{\partial \eta}=\frac{Q}{2}(v-u)^2 \text{ en } \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial r}{\partial \xi}=-\frac{Q}{2}(r-u)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Door nog te vervangen $r-u$ door s_1 en $v+u$ door s_2, worden de eindvergelijkingen

$$\left(\frac{\partial s_1}{\partial \eta}\right)^2=\left(\frac{\partial s_2}{\partial \eta}\right)^2-2\,Q\,s_1^2 \text{ en } \left(\frac{\partial s_1}{\partial \xi}\right)^2=\left(\frac{ds_2}{\partial \xi}\right)^2+2\,Q\,s_1^2 \quad . \quad (B)$$

Deze moeten nog worden opgelost.

Wiskunde. — De Heer KLUYVER doet eene mededeeling: *„Over het cyclische minimaalvlak"*.

ENNEPER (Zeitschr. Math. Phys. **14**), toonde het bestaan aan van een minimaalvlak, dat een stelsel in evenwijdige vlakken gelegen cirkels bevat, wier middelpunten op eene vlakke kromme gelegen zijn. Onderstel, dat deze kromme gaat door den oorsprong der rechthoekige coördinaten, dat zij gelegen is in het XZ-vlak, en dat de veranderlijke cirkel met het middelpunt $(\xi, 0, \zeta)$ en den straal R, die het oppervlak voortbrengt, steeds ligt in een vlak evenwijdig aan het XY-vlak.

De rechthoekige coördinaten x, y, z van een punt van het oppervlak zijn dan gegeven door de vergelijkingen

$$x=\xi+R\cos\alpha \quad , \quad y=R\sin\alpha \quad , \quad z=\zeta,$$

zoodat zij zijn uitgedrukt in de beide parameters α en ζ. Men vindt, dat aan de differentiaalvergelijking der minimaalvlakken is voldaan, wanneer

$$R^2(\xi''R\cos\alpha+RR'')-R^2(1+\xi'^2+R'^2+R'^2+2\,\xi'R'\cos\alpha)=0$$

is, in welke vergelijking de accenten differentiaties naar ζ beteekenen.

De vergelijking splitst zich in

$$\xi''R=2\,\xi'R'$$

en in

$$RR''=1+\xi'^2+R'^2.$$

De eerste vergelijking geeft

$$\xi'=\frac{AR^2}{b^2}$$

waarin A eene positieve constante en b de minimumwaarde van R beteekent.

De tweede vergelijking gaat nu over in

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{R'}{R}\right)=\frac{1}{R^2}+\frac{A^2R^2}{b^4}$$

en de integratie geeft

$$R'^2 = \frac{1}{b^2}(R^2 - b^2)\left(1 + \frac{A^2R^2}{b^2}\right),$$

zoodat men ten slotte, ξ en ζ met behulp van elliptische integralen in R kan uitdrukken.

Men vindt

$$\xi = \frac{A}{B}\int_b^R \frac{dR}{\sqrt{(R^2-b^2)\left(1+\frac{A^2R^2}{b^2}\right)}}, \quad \zeta = b\int_b^R \frac{R^2dR}{\sqrt{(R^2-b^2)\left(1+\frac{A^2R^2}{b^2}\right)}}.$$

Hier kan een elliptisch argument worden ingevoerd. Men stelt

$$R = \frac{b}{cn\,u},$$

$$k = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+A^2}},$$

en vindt

$$\xi = bk'\int_0^u \frac{dw}{cn^2w}, \quad \zeta = bku.$$

Door u te laten veranderen van $-K$ tot $+K$ beschrijft het middelpunt M met de coördinaten ξ, ζ in het XZ-vlak volledig de meetkundige plaats der middelpunten, en de vergelijking

$$R = \frac{b}{cn\,u}$$

geeft aan, hoe de straal van den cirkel gedurende de beweging verandert.

Men merkt op, dat het minimaalvlak van twee constanten, b en k afhangt, dat de kleinste cirkel ($u = 0$) in het XY-vlak wordt gevonden, dat er ten opzichte van den oorsprong symmetrie bestaat, en dat voor $u = K$, $\zeta = bkK$ de straal R oneindig is geworden, terwijl tegelijkertijd het middelpunt M oneindig ver weg valt.

Daar echter

$$\lim_{u=K}(\xi - R) = b \lim_{u=K}\left[k'\int_0^u \frac{dw}{cn^2w} - \frac{1}{cn\,u}\right] = \frac{b}{k'}(k'^2K - E)$$

is, en $\xi - R$ derhalve eene eindige waarde behoudt, bevat het oppervlak twee rechte lijnen

$$z = \pm bkK,$$

$$x = \pm \frac{b}{k'}(k'^2K - E)$$

Voor $k = 1$ ontaarden de elliptische integralen. Men heeft

$$\xi = 0, \quad \zeta = bu, \quad R = bCh\, u,$$

en het oppervlak is in de catenoïde overgegaan. Hoe kleiner k is, hoe meer het oppervlak van de catenoïde afwijkt en hoe scheever het wordt. Immers men vindt voor den richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de meetkundige plaats der middelpunten M

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = -\frac{k\, cn^2\, u}{k'}$$

en de grootste waarde van dezen coëfficient $k : k'$, die in den oorsprong wordt bereikt, nadert tot nul, als k tot nul nadert. Het oppervlak valt dan geheel in het XY-vlak.

Ik wil nu in het volgende trachten na te gaan, wanneer het mogelijk is om door twee gelijke in evenwijdige vlakken geplaatste cirkels een cyclisch minimaalvlak te brengen, en daarna de grootte van het tusschen die cirkels gespannen deel van het minimaalvlak berekenen.

Wanneer voor beide cirkels de straal $R = 1$ wordt genomen, de middelpunten $M(\xi, \zeta)$ en $M'(-\xi, -\zeta)$ symmetrisch ten opzichte van den oorsprong in het XZ-vlak gelegen zijn, en hunne vlakken evenwijdig aan het XY-vlak loopen, is het de vraag of de twee vergelijkingen

$$\xi = k'\, cn\, u \int_0^u \frac{dw}{cn^2\, w}, \quad \zeta = ku\, cn\, u.$$

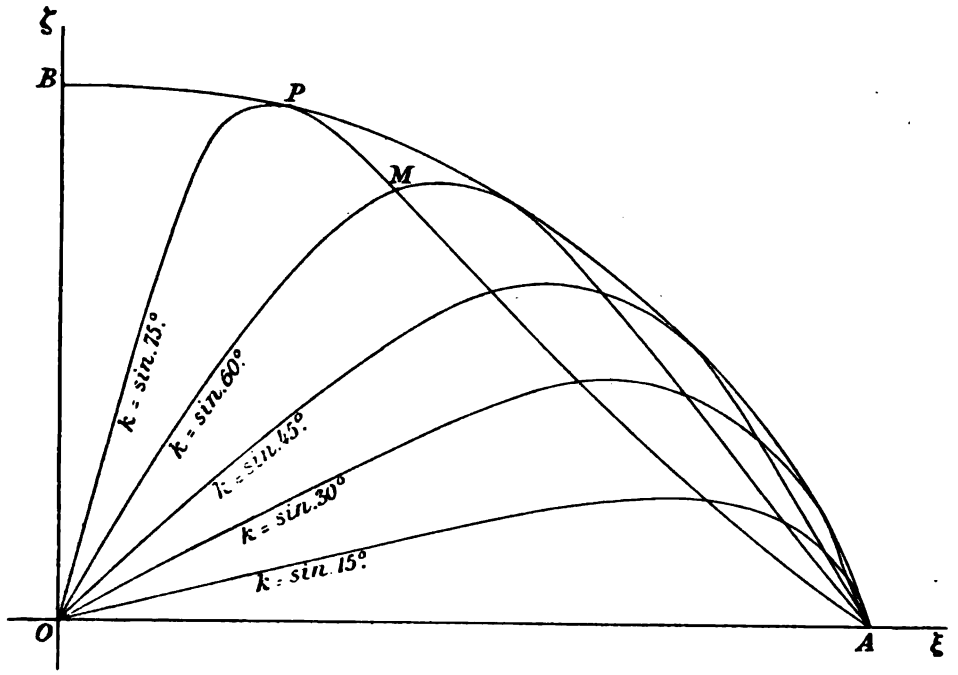
voor k en u bruikbare oplossingen toelaten. Zijn deze gevonden, dan heeft men $b = cn\, u$, en de beide parameters b en k van het minimaaloppervlak zijn bekend.

Om de bedoelde vergelijkingen te onderzoeken, worden in het $\xi\zeta$-vlak voorloopig ξ en ζ als veranderlijken beschouwd, en gaat men na de kromme, die beschreven wordt door het punt (ξ, ζ), als bij constante k de veranderlijke u het vak 0 tot K doorloopt.

Men heeft

$$\xi(0) = 0 \quad , \quad \zeta(0) = 0,$$
$$\xi(K) = 1 \quad , \quad \zeta(K) = 0.$$

De kromme zal dus voor alle waarden van k van den oorsprong O naar het punt A op de ξ-as loopen (zie de figuur).



Verder is

$$\xi = k' \, cn \, u \int_0^u \frac{d\,(tn\, w)}{dn\, w} < k' \, cn \, u \int_0^u \frac{d\,(tn\, w)}{dn\, u},$$

$$\xi < \frac{k' \, sn \, u}{dn \, u},$$

zoodat uit

$$\frac{d\xi}{du} = \frac{1}{cn\, u}\,(k' - sn\, u\, dn\, u\, \xi)$$

volgt

$$\frac{d\xi}{du} > k' \, cn \, u.$$

Men besluit, dat bij toenemende u de veranderlijke ξ geregeld van 0 tot 1 aangroeit. De kromme OA wordt dus door eene lijn $\xi =$ constant slechts eens gesneden.

Tegelijk is

$$\frac{d\zeta}{du} = k\,(cn\, u - u\, sn\, u\, dn\, u) = k\, cn\, u \left(1 - u\, \frac{sn\, u}{sn\,(u + K)}\right)$$

Voor kleine u is $\frac{d\zeta}{du}$ positief, neemt verder steeds af, wordt éénmaal nul en is daarna negatief. De veranderlijke ζ bereikt dus ergens een maximum, en de kromme OA wordt door eene lijn

$\zeta =$ constant in geen enkel of in twee punten gesneden. Het beloop der kromme $k =$ constant is derhalve zooals in de figuur schematisch is aangegeven. Ten einde de krommen behoorende bij verschillende waarden van k te kunnen vergelijken, kan men de waarden bepalen, die het differentiaalquotient $\frac{d\zeta}{d\xi}$ aanneemt in de punten O en A.

Men heeft

$$\left(\frac{d\xi}{du}\right)_{u=0} = k' \ , \ \left(\frac{d\zeta}{du}\right)_{u=0} = k,$$

$$\left(\frac{d\xi}{du}\right)_{u=K} = E - k'^2 K \ , \ \left(\frac{d\zeta}{du}\right)_{u=K} = - kk'K,$$

waaruit volgt

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_{\xi=0} = \frac{k}{k'} \ , \quad \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_{\xi=1} = - \frac{kk'K}{E - k'^2 K} = - \frac{k'K}{k\int_0^K cn^2 w dw} \ . \qquad (O)$$

Hieruit blijkt, dat in O de waarde van $\frac{d\zeta}{d\xi}$ met k toeneemt, dat daarentegen in A bij toenemende k de volstrekte waarde van $\frac{d\zeta}{d\xi}$ afneemt. Immers, als k grooter wordt, neemt $k'K$ af, maar de noemer $k\int_0^K cn^2 w\, dw$ groeit aan.

In aanmerking genomen het zooeven geschetste beloop eener kromme OA, behoorende bij eene bepaalde waarde van k, volgt, dat eene tweede dergelijke kromme, behoorende bij hetzij eene grootere, hetzij eene kleinere waarde van k, de eerste kromme zeker ergens zal snijden. Zoodra dus door twee in evenwijdige vlakken geplaatste gelijke cirkels een cyclisch minimaalvlak gaat, zal men een tweede cyclisch minimaalvlak door deze cirkels kunnen brengen.

Onderzocht moet worden, wanneer de beide cyclische minimaalvlakken samenvallen, met andere woorden de omhullende der krommen OA moet worden gezocht.

Stellende $c = k^2$, $c' = k'^2$, is het stelsel krommen gegeven door de vergelijkingen

$$\xi = \sqrt{c'}\, cn\, u \int_0^u \frac{dw}{cn^2 w} \ , \ \zeta = \sqrt{c}\, u\, cn\, u \ ;$$

c wordt beschouwd als de parameter der kromme, $\varphi = am\, u$ als de parameter, die op eene gegeven kromme een punt bepaalt, zoodat de

coördinaten (ξ, ζ) van een punt der omhullende voldoen aan de voorwaarde

$$\frac{D(\xi, \zeta)}{D(c, \varphi)} = 0 .$$

Wanneer men hier en in het vervolg ter bekorting stelt

$$A(u) = \int_0^u \frac{dw}{cn^2 w} \quad , \quad B(u) = \int_0^u \frac{dw}{dn^2 w} ,$$

en in aanmerking neemt, dat men bij constante $\varphi = am\, u$ heeft

$$\frac{\partial u}{\partial c} = \frac{1}{2c} (B(u) - u),$$

vindt men

$$\frac{\partial \xi}{\partial c} = - \frac{1}{2\sqrt{c'}} cn\, u\, B(u) \quad , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial c} = \frac{1}{2\sqrt{c}} cn\, u\, B(u) ,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = \sqrt{c'}\, sn\, u\, (c\, B(u) - Q(u)) \quad , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} = - \sqrt{c}\, sn\, u\, (c'\, B(u) + Q(u)) ,$$

waarin $Q(u)$ gegeven is door de vergelijkingen

$$Q(u) = u - E(u) - \frac{dn\, u\, cn\, u}{sn\, u} ,$$

$$= K - E - \int_u^K \frac{dw}{sn^2 w} ,$$

$$= \frac{1}{sn^2 u} (u - cn^2 u\, A(u) - dn^2 u\, B(u)) ,$$

$$= A(u) + k^2 B(u) - \frac{1}{sn\, u\, cn\, u\, dn\, u} .$$

Hieruit volgt

$$\frac{D(\xi, \zeta)}{D(c, \varphi)} = - \frac{1}{2\sqrt{cc'}} cn\, u\, sn\, u\, B(u)\, Q(u) ,$$

en de punten der omhullende van de krommen $O.1$ zijn dus bepaald door de vergelijkingen

$$Q(u) = K - E - \int_u^K \frac{dw}{sn^2 w} = 0 \ ^1).$$

Daar het eerste lid der vergelijking bij gegeven c regelmatig toeneemt van $-\infty$ voor $u = 0$, tot $K - E$ voor $u = K$, laat de ver-

[1]) G. Juga. (Ueber die Constantenbestimmung bei einer cyklischen Minimalfläche, Math. Ann. Bd. 52) geeft deze vergelijking in den vorm

$$cnu\, dnu + (E(u) - u)\, snu = 0.$$

gelijking $Q(u) = 0$ één oplossing u_0 toe. Door differentieeren vindt men

$$\frac{du_0}{dc} = \frac{1}{2c_0}\int_0^{u_0} du \left[\frac{dn^2 u_0}{dn^2 u} - 1\right],$$

d. i. eene negatieve waarde; derhalve hoe grooter c is, des te kleiner is het argument u_0, dat ik het kritische argument noem. Dit argument beweegt zich ten slotte tusschen vrij enge grenzen. Voor $c = 0$ is $K = E = \frac{\pi}{2}$ en dus ook $u_0 = \frac{\pi}{2} = 1.5708$, voor $c = 1$ wordt

$$Q(u) = u - E(u) - \frac{dn\, u\, cn\, u}{sn\, u} = u - \frac{1}{sn\, u} = u - \frac{Ch\, u}{Sh\, u}.$$

Het kritisch argument u_0 voldoet dus aan de vergelijking

$$u_0 = \frac{Ch\, u_0}{Sh\, u_0}.$$

Hieruit volgt

$$u_0 = 1.1997,$$
$$\varphi_0 = am\, u_0 = 56^\circ\, 28'.$$
$$cot\, \varphi_0 = u_0\, cn\, u_0 = 0.6627.$$

Voor waarden van c tusschen 0 en 1 is u_0 uit de vergelijking

$$Q(u_0) = K - E - \int_{u_0}^{K} \frac{du}{sn^2 u} = 0$$

met behulp van de tafels van LEGENDRE gemakkelijk op te lossen. Als u'_0 eene benaderde waarde van het kritisch argument is, levert de rekening van NEWTON

$$u'_0 - Q(u'_0)\, sn^2\, u'_0$$

als volgende benadering. Op deze wijze is in het volgende tafeltje voor eenige waarden van $k^2 = c$ het kritisch argument berekend,

$k = \sqrt{c}$	$\varphi_0 = am\, u_0$	u_0	$b = cn\, u_0$	ξ_0	η_0	γ'_0	ξ'_0	η'_0
sin 0°	90°	1.5708	0.	1.	0.	90°	1.	0.
15°	87° 1'	1.5442	0.0520	0.9966	0.0208	87° 0'	0.9954	0.0245
30°	79°17'	1.4701	0.1859	0.9498	0.1367	79°23'	0.9427	0.1423
45°	70° 3'	1.3708	0.3412	0.7930	0.3308	70°16'	0.7916	0.3325
60°	62°31'	1.2801	0.4614	0.5573	0.5116	62°35'	0.5549	0.5133
75°	57°57'	1.2198	0.5306	0.2813	0.6251	57°57'	0.2776	0.6265
90°	56°28'	1.1997	0.5524	0.	0.6627	56°28'	0.	0.6627

en zijn daarin tevens aangegeven de coördinaten ξ_0, ζ_0 van het punt P, waarin de bij elke waarde van k behoorende kromme OA de omhullende van dat stelsel krommen aanraakt.

Door de vergelijkingen

$$\xi_0 = \sqrt{c}\, cn\, u_0\, A(u_0) \quad , \quad \zeta_0 = \sqrt{c}\, x_0\, cn\, u_0$$

zijn nu in verband met de voorwaarde

$$Q(u_0) = 0$$

ξ_0 en ζ_0 als functies van c alleen gegeven. Men kan er uit afleiden

$$\frac{d\xi_0}{dc} = -\frac{1}{2\sqrt{c}}\, dn\, u_0\, B(u_0)\,[cn\, u_0\, dn\, u_0 + u_0\, c\, sn^2\, u_0],$$

$$\frac{d\zeta_0}{dc} = \frac{1}{2\sqrt{c}}\, dn\, u_0\, B(u_0)\,[cn\, u_0\, dn\, u_0 + u_0\, c\, sn^2\, u_0],$$

$$\frac{d\zeta_0}{d\xi_0} = -\frac{k'}{k}.$$

Hieruit blijkt, dat voor aangroeiende k of $\sqrt{c}$ de coördinaat ζ_0 regelmatig af- en de coördinaat ζ_0 regelmatig toeneemt. In verband met de getallen in het tafeltje opgenomen, volgt er, dat de omhullende der krommen OA ongeveer de gedaante heeft van een ellipskwadrant BA; waarvan de halve groote as $OA = 1$ en de halve kleine as $OB = 0.6627$ is.

Tevens volgt, dat de raaklijn aan eenige kromme $k =$ constant in het punt P, waar deze de omhullende raakt, loodrecht staat op de raaklijn in den oorsprong O aan dezelfde kromme getrokken. De voorafgaande berekeningen leiden nu tot de gevolgtrekking, dat door de twee gelijke evenwijdig en symmetrisch ten opzichte van den oorsprong geplaatste cirkels met straal $R = 1$ twee cyclische minimaalvlakken zullen gaan, wanneer het middelpunt $M(\xi,\zeta)$ van den bovensten cirkel binnen de kromme BA van de figuur is gelegen, dat de beide oppervlakken samenvallen, als M op de kromme BA is gekomen, en dat de cirkels niet door een minimaalvlak verbonden kunnen worden, als M buiten de kromme BA valt.

Ligt M binnen de kromme BA, dan gaan er door M twee krommen OA. Een dezer raakt de omhullende in P, een punt op de kromme OA gelegen tusschen O en M. Het argument u bij M behoorende is dus grooter dan het kritische argument u_0 in P, en het bijbehoorende minimaalvlak gespannen tusschen de cirkels M en M' zou dus bevatten, de beide cirkels, langs welke dit minimaalvlak door een tweede oneindig weinig verschillend minimaalvlak wordt gesneden. Dit minimaalvlak is dus instabiel. Op het tweede door de cirkels gebrachte minimaalvlak komt met M een argument u overeen

kleiner dan het kritische argument u_0; dit oppervlak is dus stabiel en kan bij eene proef van PLATEAU worden verwezenlijkt.

Zoo er twee oppervlakken door de cirkels gebracht kunnen worden, is dus steeds het meest scheeve oppervlak (het oppervlak behoorende bij de kleinste waarde van k en met de grootste waarde van den straal b der middendoorsnede) stabiel, het andere instabiel.

Het verdient vermelding, dat terwijl hier de grootheden φ_0, ξ_0, ζ_0 op vrij ingewikkelde wijze van $k = \sin\theta$ afhangen, men bij benadering uit eenvoudige formules zeer nauwkeurige waarden voor deze grootheden kan vinden.

Noemt men de kritische amplitude 56°28′ van de catenoïde β, dan zal men met groote nauwkeurigheid kunnen aannemen de onderstaande betrekkingen:

$$\cos\varphi_0 = \cos\beta \sin^2\theta \left(1 + \frac{4}{9}\cos^2\theta\right),$$

$$\xi_0^2 = 1 - \left(\frac{\cos\varphi_0}{\cos\beta}\right)^2,$$

$$\zeta_0 = \cot\beta \left(\frac{\cos\varphi_0}{\cos\beta}\right)^{\frac{7}{5}},$$

waaruit voor de vergelijking der omhullende BA volgt

$$\zeta_0^2 + \left(\frac{\zeta_0}{\cot\beta}\right)^{\frac{10}{7}} = 1.$$

In het tafeltje zijn in de drie laatste kolommen de aldus berekende waarden van φ_0, ξ_0 en ζ_0 bijgevoegd ter vergelijking.

Ten slotte moge volgen eene oppervlakte-berekening voor het deel van een gegeven cyclisch minimaalvlak met gegeven parameters b en k, gelegen tusschen twee even groote cirkels, beantwoordende aan de argumenten $+u$ en $-u$.

De coördinaten x, y, z van een punt op het oppervlak zijn weder bepaald door de vergelijkingen:

$$x = bk' A(u) + \frac{b}{cn\,u}\cos\alpha, \quad y = \frac{b}{cn\,u}\sin\alpha, \quad z = bk\,u,$$

waarnit men voor het lijnelement op het oppervlak kan vinden de uitdrukking

$$\frac{ds^2}{b^2} = \frac{P du - i\,cn\,u\,du + i\,k'\sin\alpha\,du}{cn^2\,u} \times \frac{P du + i\,cn\,u\,du - i\,k'\sin\alpha\,du}{cn^2\,u},$$

in welke P bepaald is door de vergelijking

$$P^2 = (k'\cos\alpha + sn\,u\,dn\,u)^2 + k^2\,cn^4\,u.$$

In de plaats van α wordt een imaginair argument v ingevoerd.

Men substitueert

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,\alpha = i\,\frac{tg\,\frac{1}{2}\,am\,v}{tg\,\frac{1}{2}\,am\,(u-K)}$$

en heeft dan

$$sin\,\alpha = \frac{i\,sn\,v\,sn\,(u-K)}{cn\,v - cn\,(u-K)},$$

$$cos\,\alpha = \frac{1-cn\,v\,cn\,(u-K)}{cn\,v - cn\,(u-K)},$$

$$\frac{d\alpha}{sin\,\alpha} = \frac{dn\,v}{sn\,v}\,dv - \frac{dn\,(u-K)}{sn\,(u-K)}\,du,$$

$$P = \frac{cn^2\,u\,dn\,v\,dn\,(u-K)}{k'\,(cn\,v - cn\,(u-K))},$$

en eindelijk

$$\frac{ds^2}{b^2} = \frac{dn^2\,v\,dn^2\,(u-K)}{k'^2\,(cn\,v - cn\,(u-K))^2}\,(du-dv)\,(du+dv).$$

Hieruit volgt, dat $u+v$ en $u-v$ de parameters zijn der lijnen van lengte nul, en dat v dus is de parameter van de lijnen van de grootste helling.

Volgens de algemeene eigenschappen der minimaalvlakken heeft men voor het oppervlakte-element $d\Omega$ de uitdrukking

$$\frac{d\Omega}{b^2} = \frac{dn^2\,v\,dn^2\,(u-K)}{k'^2\,(cn\,v - cn\,(u-K))^2}\,du\,\frac{dv}{i},$$

en vindt men voor het deel van het oppervlak, begrensd door de beide cirkels met de argumenten $+u$ en $-u$.

$$\frac{\Omega}{4\,b^2} = \int_0^u du \int_0^{2iK'} \frac{dv}{i}\,\frac{dn^2\,v\,dn^2\,(u-K)}{k'^2\,(cn\,v - cn\,(u-K))^2}.$$

Ter uitvoering van de integratie gaat men uit van de identiteit

$$f(u) = -\int_0^{2iK'} \frac{dv}{i}\,\frac{sn\,(u-K)\,dn\,(u-K)}{cn\,v - cn\,(u-K)} = 2K'\,Z(u-K) + \frac{\pi u}{K} =$$

$$= 2u\,(E'-K) + 2k'^2\,K'\,B(u),$$

welke vooreerst oplevert

$$\int_0^{2iK'} \frac{dv}{i}\,\frac{dn^2\,(u-K)}{cn\,v - cn\,(u-K)} = \frac{k'\,f(u)}{cn\,u}.$$

Verder is

$$\int_0^{2iK'} \frac{dv}{i}\,\frac{dn^2\,v - dn^2\,(u-K)}{cn\,v - cn\,(u-K)} = k^2 \int_0^{2iK'} \frac{dv}{i}\,cn\,v + 2\,k^2\,K'\,cn\,(u-K).$$

Door een accent vóór het integraalteeken is aangegeven, dat de integratieweg niet door het punt $v = iK'$ gaat.

Uit de beide laatste vergelijkingen volgt door optelling

$$\int_0^{2iK'} \frac{dv}{i} \cdot \frac{dn^2\, v}{cn\, v - cn\,(u-K)} = \frac{k' f(u)}{cn\, u} + k^2 \int_0^{2iK'} \frac{dv}{i}\, cn\, v + 2k^2 K'\, cn\,(u-K),$$

eene vergelijking, die als men differentieert naar u en daarna door $k'\, cn\, u$ deelt, overgaat in

$$\int_0^{2iK'} \frac{dv}{i} \cdot \frac{dn^2\, v\, dn^2\,(u-K)}{k'^2\,(cn\, v - cn\,(u-K))^2} = \frac{1}{cn\, u} \frac{d}{du}\left(\frac{f(u)}{cn\, u}\right) + \frac{2k^2 K'}{dn^2\, u}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{du}\left(\frac{f(u)}{cn^2\, u}\right) + \frac{2k^2 K'}{dn^2\, u} + \frac{k'^2 K'}{cn^2\, u\, dn^2\, u} + \frac{E'-K'}{cn^2\, u}.$$

Alsnu integreerende naar u tusschen de grenzen 0 en u, vindt men ten slotte

$$\frac{\Omega}{4b^2} = \frac{u}{cn^2\, u}(E' - K') + E' A(u) + K' \frac{dn^2\, u}{cn^2\, u} B(u).$$

Hebben de gegeven cirkels den straal $R = 1$, dan is $b = cn\, u$, en men kan schrijven

$$\frac{\Omega}{4} = uE' + \xi\, cn\, u \frac{E' - K'}{k'} - sn^2\, uK' Q(u),$$

waarin ξ weder de x-coordinaat van het middelpunt M van den bovensten cirkel voorstelt.

Beweegt dit middelpunt M zich op de omhullende BA uit de figuur, dan wordt u gelijk aan het kritische argument u_0, $Q(u)$ wordt gelijk aan nul, en men heeft verkregen het bij de gegeven waarde van k grootst mogelijke minimaalvlak Ω_0. Aldus wordt

$$\frac{\Omega_0}{4} = u_0 E' + \xi_0\, cn\, u_0 \frac{E' - K'}{k'}.$$

De vraag kan nu nog worden gesteld, waar men M op de omhullende BA moet plaatsen, d.i. welke waarde men aan k heeft te geven, opdat Ω_0 eene zoo groot mogelijke waarde verkrijgt. Om die vraag te beantwoorden, wordt weder $c = k^2$ en $\varphi_0 = am\, u_0$ ingevoerd; Ω_0 is dan functie van c, terwijl φ_0 en ξ_0 aan c zijn verbonden door de vergelijkingen

$$Q(u_0) = K - E - \int_{u_0}^{K} \frac{dw}{sn^2\, w} = 0,$$

$$\xi_0 = \sqrt{c}\, cn u_0\, A(u_0).$$

Door differentiatie vindt men

$$\frac{d\varphi_0}{dc} = -\frac{1}{2} sn^2 u_0 \, dn \, u_0 \, B(u_0),$$

$$\frac{du_0}{dc} = -\frac{1}{2c} cn^2 u_0 \, A(u_0),$$

$$\frac{d\xi_0}{dc} = -\frac{1}{2\sqrt{c'}} dn \, u_0 \, B(u_0) (cn \, u_0 \, dn \, u_0 + u_0 \, c \, sn^2 u_0),$$

en met behulp dezer uitkomsten ten slotte

$$\frac{d}{dc}\left(\frac{\Omega_0}{4}\right) = \frac{K'-E'}{c'} cn \, u_0 \, dn \, u_0 \, B(u_0) (cn \, u_0 \, dn \, u_0 + u_0 \, c \, sn^2 u_0).$$

Daar het rechter lid der laatste vergelijking steeds positief is, groeit Ω_0 met c of met k aan. Het grootst mogelijke oppervlak tusschen de beide cirkels wordt verkregen door M in B te plaatsen; men heeft dan een stuk van de catenoïde, waarvan de halve hoogte gelijk is aan $cot \beta = 0.6627$.

Thans is $K' = E' = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = u_0 = 1.1997.$$

De kleinste waarde verkrijgt Ω_0 voor $k = 0$. Alsdan is $\xi_0 = 0$, $\xi_0 = 1$: het minimaalvlak bestaat alleen uit het gezamenlijk oppervlak der naast elkander in het XY-vlak geplaatste cirkels M en M'. Men heeft

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = 1.$$

Ook het oppervlak Ω_0 blijft zich dus tusschen vrij enge grenzen bewegen. Hoewel de waarde van Ω_0 weder op tamelijk ingewikkelde wijze van k afhangt, kan men, zoo eens het kritische argument u_0, of de amplitude φ_0 berekend is, vrij nauwkeurig stellen

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{sn \, u_0}.$$

Dit blijkt uit het volgende tafeltje, waarin voor eenige waarden van k de bijbehoorende waarden van $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ en van $\frac{1}{sn \, u_0}$ zijn opgenomen.

k	$\frac{\Omega_0}{2\pi}$	$\frac{1}{sn\ u_0}$
Sn 0°	1.	1.
15°	1.0002	1.0001
30°	1.0111	1.0176
45°	1.0556	1.0639
60°	1.1241	1.1271
75°	1.1795	1.1795
90°	1.1997	1.1997

Daar men heeft $b = cn\ u_0$, waarbij b weder voorstelt den straal van de middendoorsnede, kan men dus met groote benadering in alle gevallen stellen

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{1-b^2}},$$

en verkrijgt men zoodoende voor het grootst mogelijk juist nog stabiele stuk van een willekeurig cyclisch minimaalvlak, dat tusschen twee cirkels met straal $R = 1$ kan worden gespannen, dezelfde uitdrukking als voor de catenoïde.

De Heer VAN DER STOK biedt aan de Akademie een portret in gips aan van wijlen den Oud-Voorzitter der Afdeeling Prof. C. H. D. BUYS BALLOT.

Voor de Boekerij der Akademie wordt aangeboden uit naam van den Heer J. W. MOLL, eene verhandeling van Mej. TINE TAMMES: *„Der Flachsstengel, eine statistisch-anatomische Monographie"*. (Natuurkundige verhandelingen van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen, 3de Verzameling, Dl. VI, Stuk 4).

De vergadering wordt gesloten.

ERRATA.

In Zittingsverslag van 24 Mei 1907:

p. 49 r. 4 v. o. en p. 51 r. 6 v. b. inpl. van ϱ_l/ϱ_v leze men ϱ'_l/ϱ_v.
p. 50 r. 15 v. b. inpl. van 6 + 6 maal 6 sec. leze men 6 + 6 maal 4 sec.
p. 53 r. 5 v. o. inpl. van 13^{n}36 leze men 12^{n}36.

In Zittingsverslag van 26 Januari 1907:

p. 671 r. 14 v. b. inpl. van VII. 1. H_2. 1 leze men VII H_2 2.

In Zittingsverslag van 30 November 1907:

p. 412 r. 8 v. o. inpl. van 28.955 leze men 29.030.
p. 423 r. 10 v. b. inpl. van 97^{c} leze men 95^{c}.
p. 427 r. 9 v. o. inpl. van „door interpolatie uit B_{A_0} en $B_{A_{100}}$" leze men „door interpolatie uit B_{A0} en $B_{A100.20}$".

In Zittingsverslag van 29 December 1906:

p. 534 r. 3 v. o. inpl. van 46.419 leze men 46.491.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 29 Februari 1908.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 566.

J. CARDINAAL: „Eenige constructiën afgeleid uit de beweging van een vlak stelsel", p. 566.

W. KAPTEYN: „Over vermenigvuldiging van trigonometrische reeksen", p. 571.

D. H. BRAUNS: „Een gekristalliseerd *d.* fructosetetracetaat". (Aangeboden door de Heeren A. P. N. FRANCHIMONT en P. VAN ROMBURGH), p. 577.

W. DE SITTER: „Over de massa's en de baanelementen der satellieten van Jupiter". (Aangeboden door de Heeren J. C. KAPTEYN en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 579.

J. C. KAPTEYN: „Over de gemiddelde stersdichtheid op verschillenden afstand van het zonnestelsel", p. 600.

P. ZEEMAN: „Nieuwe waarnemingen over asymmetrisch door magnetisme gesplitste tripletten", p. 610. (Met één plaat).

P. ZEEMAN: „Verandering van golflengte van de middelste lijn van tripletten in een magnetisch veld", (1ste gedeelte), p. 618.

P. H. SCHOUTE: „Over vierdimensionale netten en hun ruimte doorsneden", (2de gedeelte), p. 623. (Met 2 platen).

H. E. J. G. DU BOIS en G. J. ELIAS: „De invloed van temperatuur en magnetisatie op selectieve absorptiespectra", p. 635. (Met één plaat).

S. H. KOORDERS: „Bijdrage N°. 1 tot de kennis der Flora van Java. Stuk 1. Over de standplaatsvoorwaarden, verspreidingsmiddelen en geographische verspreiding van de in Java, vooral in het hooggebergte, wildgroeiende soorten der Myriaceae, p. 645. Stuk 2. Over Oreiostachys, Gamble, een door Dr. A. PULLE in Java op 1600 meter zeehoogte verzameld nieuwe geslacht der Gramineae-Bambuseae, p. 653.

H. KAMERLINGH ONNES en W. H. KEESOM: „Over de toestandsvergelijking van eene stof in de nabijheid van het kritisch punt vloeistof-gas. I. De storingsfunctie in de nabijheid van den kritischen toestand", p. 659. (Met 1 plaat). II. Spectrophotometrisch onderzoek van de opalescentie van eene stof in de nabijheid van den kritischen toestand", p. 667. (Met 1 plaat).

JEAN BECQUEREL en H. KAMERLINGH ONNES: „Over de absorptie spectra van de verbindingen der zeldzame aarden bij de temperaturen, die met vloeibare waterstof te verkrijgen zijn en hunne verandering door het magnetische veld", p. 678. (Met 5 platen).

H. KAMERLINGH ONNES: „Over de verdichting van het helium", p. 690.

H. KAMERLINGH ONNES: „Isothermen van één-atomige gassen en hunne binaire mengsels. II. Isothermen van helium bij ongeveer —253° C. en —259° C" p. 690.

H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „Over het meten van zeer lage temperaturen. XVII. Invloed van de afwijking van de wet van Boyle-Charles op de temperatuur, gemeten met de schaal van den gasthermometer van constant volume volgens de waarnemingen met dit werktuig", p. 690.

Aanbieding eener verhandeling van den Heer J. SCHMUTZER: „Bijdrage tot de kennis der oude eruptiefgesteenten en amphiboolschisten aan de rivieren Sébibit en Tébaoeng in Centraal-Borneo", p. 690.

Aanbieding van een boekgeschenk, p. 690.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Missive van den Minister van Waterstaat d.d. 28 Febr. 1908, bericht gevende dat op de betaling van het subsidie voor het loopende jaar voor de kosten van geologische onderzoekingen orde gesteld is.

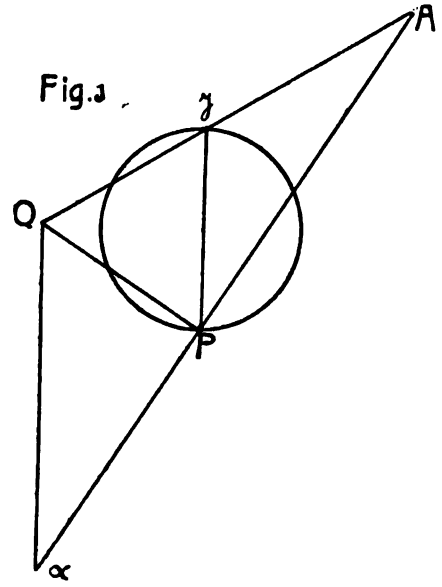
2°. Circulaire van het 4e Internationale Congres voor Wiskundigen van 6—11 April a.s. te Rome te houden.

3°. Dankzegging van de Geological Society te Londen voor de betoonde belangstelling bij gelegenheid van het 100-jarig bestaan in September 1907. Voor kennisgeving aangenomen.

Wiskunde. — De Heer CARDINAAL doet eene mededeeling over: *„Eenige constructiën afgeleid uit de beweging van een vlak stelsel"*.

1. We laten twee bekende bewegingsbeginselen voorafgaan.

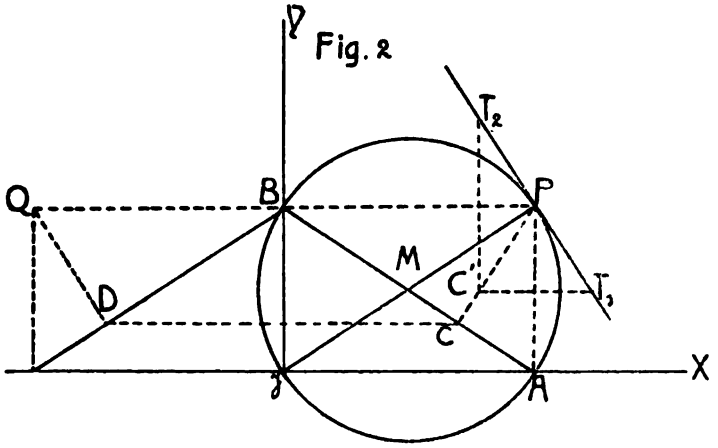
a. De beweging ontsta door rolling van een kromme K (poolkromme), met welke het stelsel S is verbonden, over een kromme K' (poolbaan). Zijn $A, B, C, \ldots\ldots$ bewegende punten van S en $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ de kromte-middelpunten der banen, die zij op een bepaald oogenblik beschrijven, dan bestaat er tusschen het stelsel S en het stelsel $\alpha, \beta, \gamma \ldots . (\Sigma)$ een kwadratische verwantschap, en wel zoodanig, dat als $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ bewegende punten waren, $A, B, C \ldots$ de kromte-middelpunten hunner banen zouden zijn. De kegelsneden van S, met de rechten van Σ overeenkomende, raken de raaklijn van poolbaan en poolkromme in de pool en osculeeren elkander. De buigcirkel behoort er toe. De omgekeerde stelling is licht af te leiden.



b. Zij P de pool (fig. 1), I de buigpool (gemeenschappelijk punt der raaklijnen in de buigpunten); de buigcirkel is dus bekend. Zij A een bewegend punt, dan wordt α als volgt bepaald: Trek AI en AP; bepaal het snijpunt Q van AI met de loodlijn door P op AP gericht. Trek uit Q de evenwijdige aan IP, deze snijdt P in α.

2. Toepassing op de elliptische beweging. Zij AB (l) de rechte, die met haar punten A en B langs de rechthoekige assen IX en IY glijdt en laat worden gevraagd, de met l overeenkomende kegelsnede λ^2 te construeeren (fig. 2).

De omgeschreven cirkel (M) van $\Delta\, ABI$ is de buigcirkel; P is



ook dadelijk bekend; de constructie van het bij een punt van AB behoorende kromte-middelpunt kan dus volgens (1*b*) geschieden en alzoo kan elk punt van λ^2 worden bepaald. Evenwel zijn eenige punten van λ^2 dadelijk bekend. Het middelpunt M van AB beschrijft een cirkel met I tot middelpunt, de kromtemiddelpunten α en β, bij A en B behoorende, liggen op oneindigen afstand in de richtingen IB en IA; λ^2 raakt verder cirkel (M) in P; λ^2 is dus een gelijkzijdige hyperbool, gaande door I, met asymptootrichtingen IB en IA en rakende in P aan cirkel (M).

Het middelpunt C van λ^2 kan op de volgende wijze worden bepaald. We denken ons λ^2 geconstrueerd door de projectieve bundels gevormd door stralen evenwijdig aan IX en IY. Waren de beide in het raakpunt P vereenigde punten gescheiden, dan zouden de twee paren evenwijdige stralen door deze punten op IX twee punten A_1 en A_2 en op IY twee punten B_1 en B_2 bepalen en het middelpunt ware het snijpunt van A_1B_1 en A_2B_2. Nu vallen wel is waar A_1 en A_2 samen in A, zoo ook B_1 en B_2 in B; maar uit het voorgaande volgt toch, dat het middelpunt C op AB ligt. Trekt men in P de raaklijn aan λ^2 loodrecht op de normaal PI, dan ligt een punt van iedere asymptoot op gelijken afstand van P. Men mete alzoo $PT_1 = PT_2$ uit en trekke, $T_1C' // IX$, $T_2C' // IY$; C' zoude het middelpunt van λ^2 zijn, als C' op AB viel. Uit de figuur blijkt evenwel, dat C' gelegen is op een rechte lijn, die symmetrisch is met T_1T_2 ten opzichte van PA en dus loodrecht staat op AB. Het middelpunt C van λ^2 is alzoo het voetpunt der loodlijn uit P op AB neergelaten.

Beschouwt men verschillende standen van AB en construeert men de opvolgende standen van het voetpunt C, dan is de meetkundige

plaats een astroide op de assen IA en IB. De hyperbool λ^2 blijft rakende aan den onveranderlijken cirkel, die IP tot straal heeft; de astroide is dus de meetkundige plaats der middelpunten van de gelijkzijdige hyperbolen met asymptootrichtingen IA en IB, gaande door I en rakende aan laatstgenoemden cirkel.

De beide middellijnen IA en IB van cirkel I vormen met de rechte in het oneindige een pooldriehoek van den cirkel; de punten C hebben alzoo de beteekenis van polen van een der zijden van dien pooldriehoek. Het is te bewijzen, dat de meetkundige plaats der polen van de beide andere zijden ten opzichte van λ^2 eveneens de nu gevonden astroide is. We construeeren daartoe de pool van IX.

Nemen we als middelpunten van de projectieve stralenbundels, die λ^2 doen ontstaan, het punt I en het oneindig ver verwijderd punt van IX, dan ligt op grond der vroegere redeneering de pool van IX op de evenwijdige door B aan IP getrokken; tevens ligt deze pool op een evenwijdige uit C aan IX getrokken, het snijpunt D der laatstgenoemde rechten is dus de gevraagde pool. Daar D symmetrisch is met C ten opzichte van IY, behoort D alzoo tot de astroide. Op dezelfde wijze bewijst men, dat de pool van IY eveneens een punt der astroide is.

Door projectieve transformatie kan het bovenstaande vraagstuk in het volgende worden omgezet:

Gegeven zijn een kegelsnede en een daarbij behoorende pooldriehoek. De meetkundige plaats bepalen der polen van de zijden van dien driehoek ten opzichte van het stelsel kegelsneden, gaande door de hoekpunten en rakende aan de oorspronkelijke kegelsnede.

Beschouwt men dit als een op zich zelf staand vraagstuk, dan verkrijgt men de volgende stelkundige oplossing:

Neem den pooldriehoek als coördinatendriehoek, dan kan de vergelijking van de gegeven kegelsnede worden geschreven:

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en die van de kegelsnede om dien pooldriehoek beschreven:

$$p_1x_2x_3 + p_2x_3x_1 + p_3x_1x_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Voert men de voorwaarde in, dat (2) aan (1) raakt, dan moeten de coefficiënten der laatste voldoen aan de betrekking:

$$(a_1p_1^2 + a_2p_2^2 + a_3p_3^2)^2 = 27a_1a_2a_3p_1^2p_2^2p_3^2.$$

De pool van een der fundamenteele zijden, b.v. van $x_3 = 0$, vindt men door in te voeren:

$$p_1 = -p_3\frac{x_1}{x_3}\ ;\ p_2 = -p_3\frac{x_2}{x_3}.$$

Daardoor wordt de vergelijking van de meetkundige plaats dezer polen :

$$(a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2)^3 = 27a_1a_2a_3x_1^2x_2^2x_3^2 ,$$

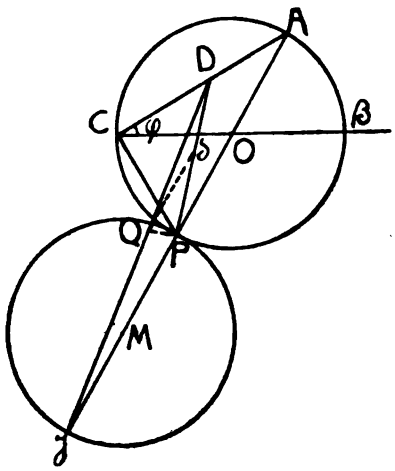
welke ook kan worden geschreven :

$$a_1^{\frac{1}{3}}x_1^{\frac{2}{3}} + a_2^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{2}{3}} + a_3^{\frac{1}{3}}x_3^{\frac{2}{3}} = 0 .$$

Men herkent hierin den vorm der astroïde op scheeve coördinaten gebracht ; de kromme zelf is een projectieve transformatie der gewone astroide. De meetkundige plaats der polen van de andere zijden geeft hetzelfde resultaat.

3. Toepassing op de cardioidebeweging. Zij AC de rechte l, die door het vaste punt C van cirkel (O) gaande, met een harer punten A langs den omtrek glijdt; laat ook nu worden gevraagd de met l overeenkomende kegelsnede λ^2 te construeeren (fig. 3).

Fig. 3



Cirkel (O) is de keercirkel ; de pool P ligt diametraal tegengesteld aan A en de buigcirkel (M) is symmetrisch met (O) ten opzichte der raaklijn in P. Ook nu is λ^2 volgens het voorgaande puntsgewijze te construeeren ; dit geschiedt op de navolgende wijze:

Zij D een punt van l, trek DP en DI; de loodlijn in P op DP snijdt DI in Q, de evenwijdige uit Q aan PI snijdt DP in δ.

Even als bij de elliptische beweging kan men weder eenige bijzondere punten construeeren. Past men de algemeene constructie toe op het punt C, dan blijkt γ op de helft van CP te liggen ; O is blijkbaar een punt van λ^2 en β is het kromtemiddelpunt van het oneindig ver verwijderd punt van l ; de kegelsnede λ^2 gaat dus door γ, O, β, en raakt cirkel (O) in P. Deze raking is een osculatie.

Terwijl alzoo de constructie van λ^2 geen bezwaren biedt, is het ontstaande stelsel kegelsneden ingewikkelder dan het voorgaande.

Enkele eigenschappen zijn langs meetkundigen weg te vinden; zoo blijkt op deze wijze spoedig, dat het stelsel twee parabolen bezit.

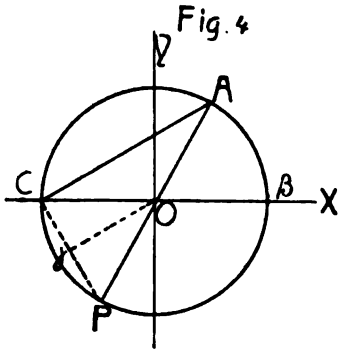
Voor een parabool is noodig, dat AC een raaklijn is aan den buigcirkel (M). Denkt men zich de twee rakende cirkels (O) en (M) en trekt men uit het eindpunt A van de gemeenschappelijke middellijn de raaklijnen aan cirkel (M), dan ziet men, dat men aan

(M) twee standen kan geven, zoo dat een dezer raaklijnen door C gaat, alzoo zijn er twee parabolen bij het stelsel. Uit de figuur blijkt, dat de hoek van AC met AO een waarde moet hebben:

$$\sin\varphi = \frac{1}{3}.$$

Hieruit volgt: Voor alle waarden van $\angle ACO$, welke gelegen zijn tusschen de waarden $\varphi = bg\sin\frac{1}{3}$, zoowel aan de eene als aan de andere zijde van CO, wordt λ^2 een hyperbool, voor alle waarden buiten die grenzen wordt λ^2 een ellips, de overgang tusschen de ellipsen en de hyperbolen wordt door twee parabolen gevormd.

De meetkundige plaats der middelpunten van dit kegelsnedenstelsel wordt geen eenvoudige kromme. Eenvoudiger worden de meetkundige plaatsen der polen van de middellijn $O\beta$ en de loodlijn uit O daarop gericht, die we bij de berekening als assen kunnen aannemen.



Zij alzoo (fig. 4) $O\beta$ de X-as, de loodlijn OY daarop de Y-as, dan vindt men de vergelijking van λ^2 als volgt:

Stel $OA = a$, $\angle AC\beta = \varphi$, alzoo $\angle AO\beta = 2\varphi$. Daar λ^2 door O,β, gaat en cirkel (O) raakt in P, zoo kan haar vergelijking worden geschreven:

$$y(x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi + a) + m(y - x\,tg\,2\varphi)(y - x\,tg\,\varphi + a\,tg\,\varphi) = 0;$$

de coefficient m wordt bepaald door de voorwaarde, dat het punt γ $(-a\cos^2\varphi, -a\cos\varphi\sin\varphi)$ op λ^2 ligt. Bij substitutie van de coordinaten van γ voor x en y en na herleiding verkrijgt men:

$$m = \cos\varphi\cos 2\varphi\sin\varphi;$$

en de vergelijking van λ^2 wordt:

$$\sin^2\varphi\sin 2\varphi\,.\,x^2 + (\cos 2\varphi - \cos\varphi\sin\varphi\sin 2\varphi - \sin^2\varphi\cos 2\varphi)\,xy +$$
$$(\sin 2\varphi + \cos\varphi\sin\varphi\cos 2\varphi)\,y^2 + a(1 + \sin^2\varphi\cos 2\varphi)\,y - a\sin^2\varphi\sin 2\varphi\,.\,x = 0$$

of wel korter:

$$2\sin^3\varphi\,.\,x^2 + \cos\varphi(4\cos^2\varphi - 3)\,xy +$$
$$\sin\varphi(3 - 2\sin^2\varphi)\,y^2 - 2a\sin^3\varphi\,.\,x + a\cos\varphi(3 - 2\cos^2\varphi)\,y = 0$$

De drie afgeleide vergelijkingen worden:

$$4\sin^3\varphi\,.\,x + \cos\varphi(4\cos^2\varphi - 3)\,y - 2a\sin^3\varphi = 0. \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\cos\varphi(4\cos^2\varphi - 3)\,x + 2\sin\varphi(3 - 2\sin^2\varphi)\,y + a\cos\varphi(3 - 2\cos^2\varphi) = 0. \quad (2)$$

$$2\sin^3\varphi\,.\,x - \cos\varphi(3 - 2\cos^2\varphi)\,y = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Elimineert men uit deze vergelijkingen twee aan twee de waarde φ, dan verkrijgt men de drie meetkundige plaatsen.

We zullen ten slotte de eenvoudigste dezer meetkundige plaatsen afleiden t. w. de meetkundige plaats der polen van de as OX, die door eliminatie van φ uit (1) en (3) wordt verkregen.

Uit (1) en (3) leidt men door aftrekking de volgende twee eenvoudiger vergelijkingen af:

$$3\,y\cos\varphi = 2a\sin^3\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$2\sin^3\varphi\,.\,x - \cos\varphi\,(3 - 2\cos^2\varphi)\,y = 0, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

na substitutie der waarde $\sin^3\varphi$ uit (4) in (5) vindt men:

$$\cos^3\varphi = \frac{3\,(a-x)}{2a},$$

hieruit ten slotte voor de meetkundige plaats:

$$27\,y^3\,(a - x) = (3\,x - a)^3;$$

dit is alzoo een cissoïde, welker keerpunt op een afstand $x = \frac{1}{3}\,a$ van het punt O ligt, en welker asymptoot door β gaat.

OPMERKING. De stelsels kegelsneden, bij deze twee gevallen behandeld, zijn enkelvoudig oneindige stelsels, waarbij door een punt meer dan een kegelsnede gaat, en aan een rechte lijn meer dan een kegelsnede raakt; zij onderscheiden zich dus van de bundels en scharen.

Zoo gaan, in het algemeen, bij het eerst besproken stelsel door een punt 6 kegelsneden en raken aan een rechte lijn 12 kegelsneden.

Wiskunde. — De Heer W. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan: *„Over vermenigvuldiging van trigonometrische reeksen."*

1. Zijn $f(x)$ en $\varphi(x)$ twee functies van x die eindig en continu zijn van $x = 0$ tot $x = \pi$, dan gelden de ontwikkelingen

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\,a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2\,x + \ldots.$$

$$f(x) = b_1\sin x + b_2\sin 2\,x + \ldots.$$

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}\,a'_0 + a'_1\cos x + a'_2\cos 2\,x \ldots.$$

$$\varphi(x) = b'_1\sin x + b'_2\sin 2\,x + \ldots.$$

waarin

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\omega)\cos n\omega\,d\omega \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\omega)\sin n\omega\,d\omega$$

$$a'_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(\omega)\cos n\omega\,d\omega \qquad b'_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(\omega)\sin n\omega\,d\omega.$$

Daar nu ook het produkt der functies $f(x)$ en $\varphi(x)$ van $x=0$ tot $x=\pi$ eindig en continu is, heeft men op gelijke wijze

$$f(x).\varphi(x) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots.$$

en

$$f(x).\varphi(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots.$$

waarin

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\omega)\,\varphi(\omega)\cos n\omega\, d\omega, \qquad B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\omega)\,\varphi(\omega)\sin n\omega\, d\omega.$$

Wij stellen ons nu voor de coëfficienten A_n en B_n te berekenen in functie van de coëfficienten a en b_n.

Daartoe vervangen we in de beide laatste integralen $\varphi(\omega)$ door de gelijkwaardige reeksen; we kunnen dan voor A_n en eveneens voor B_n twee uitdrukkingen vinden.

Vooreerst heeft men

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\omega)\cos n\omega\,[\tfrac{1}{2}a'_0 + a'_1\cos\omega + a'_2\cos 2\omega + \ldots]\,d\omega$$

$$= \tfrac{1}{2}a'_0\,a_n + \sum_1^{\infty}\frac{a'_m}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\omega)\,[\cos(m+n)\omega + \cos(m-n)\omega]\,d\omega$$

$$= \tfrac{1}{2}a'_0\,a_n + \sum_1^{\infty}\frac{a'_m}{2}(a_{m+n} + a_{m-n}).$$

Merkt men op dat $a'_{-p} = a'_p$, dan heeft men

$$\sum_1^{\infty}\frac{a'_m}{2}a_{m-n} = \sum_1^{\infty}\frac{a'_m}{2}a_{n-m} + \tfrac{1}{2}\sum_{n+1}^{\infty}a'_m\,a_{m-n}$$

of zoo men in de laatste som m door $m+n$ vervangt

$$\sum_1^{\infty}\frac{a'_m}{2}a_{m-n} = \tfrac{1}{2}\sum_1^{n}a'_m\,a_{n-m} + \tfrac{1}{2}\sum_1^{\infty}a_m\,a'_{m+n}$$

Voert men dit in, zoo komt

$$A_n = \tfrac{1}{2}\sum_0^{n}a'_m\,a_{n-m} + \tfrac{1}{2}\sum_1^{\infty}(a'_m\,a_{m+n} + a_m\,a'_{m+n}) \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Vervangen we nu in A_n, $\varphi(\omega)$ door de tweede reeks, dan is

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\omega)\cos n\omega\,[b'_1\sin\omega + b'_2\sin 2\omega + \ldots]\,d\omega$$

$$= \sum_1^{\infty}\frac{b'_m}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\omega)\,[\sin(m+n)\omega + \sin(m-n)\omega]\,d\omega$$

$$= \sum_1^{\infty}\frac{b'_m}{2}(b_{m+n} + b_{m-n})$$

of daar $b'_{-p} = -bp$

$$A_n = -\tfrac{1}{2}\sum_1^n b'_m b_{n-m} + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty (b'_m b_{m+n} + b_m b'_{m+n}). \quad . \quad . \quad (II)$$

Op dezelfde wijze vinden wij

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\omega) \sin n\omega \,[\tfrac{1}{2} a'_0 + a'_1 \cos\omega + a'_2 \cos 2\omega + \ldots]\, d\omega$$

$$= \tfrac{1}{2} a'_0 b_n + \sum_1^\infty \frac{a'_m}{2}(b_{m+n} - b_{m-n})$$

dus

$$B_n = \tfrac{1}{2}\sum_0^n a'_m b_{n-m} + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty (a'_m b_{m+n} - b_m a'_{m+n}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

en

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\omega) \sin n\omega \,[b'_1 \sin\omega + b'_2 \sin 2\omega + \ldots]\, d\omega$$

$$= \sum_1^\infty \frac{b'_m}{2}(a_{m-n} - a_{m+n})$$

of

$$B_n = \tfrac{1}{2}\sum_1^n b'_m a_{n-m} + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty (a_m b'_{m+n} - b'_m a_{m+n}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$

2. Uit deze vier formules kan men gemakkelijk de coëfficienten afleiden van de ontwikkelingen van het quadraat der functie $f(x)$. Stelt men toch

$$f^2(x) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 \cos x + \mathfrak{A}_2 \cos 2x + \ldots$$
$$= \mathfrak{C}_1 \sin x + \mathfrak{C}_2 \sin 2x + \ldots$$

dan vindt men, door in deze formules $\varphi = f$ te stellen, terstond:

$$\mathfrak{A}_n = \tfrac{1}{2}\sum_0^n a_m a_{n-m} + \sum_1^\infty a_m a_{m+n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\mathfrak{A}_n = -\tfrac{1}{2}\sum_1^n b_m b_{n-m} + \sum_1^\infty b_m b_{m+n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\mathfrak{E}_n = \tfrac{1}{2}\sum_0^n a_m b_{n-m} + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty (a_m b_{m+n} - b_m a_{m+n}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

terwijl de formule (IV) hetzelfde oplevert als (III).

3. Ook kan men uit de vier eerste formules het bekende Theorema van PARSEVAL afleiden. Stelt men toch dat voor alle waarden op den omtrek van den cirkel $mod\, z = 1$ gelden de vergelijkingen:

$$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = \varphi(z)$$
$$\tfrac{1}{2}a'_0 + \frac{a'_1}{z} + \frac{a'_2}{z^2} + \ldots = \psi(z)$$

dan is, zoo men stelt $z = e^{i\omega}$ en $z = e^{-i\omega}$

$$F_1(\omega) + i F_2(\omega) = \varphi(e^{i\omega}) \quad G_1(\omega) - i G_2(\omega) = \psi(e^{i\omega})$$
$$F_1(\omega) - i F_2(\omega) = \varphi(e^{-i\omega}) \quad G_2(\omega) + i G_2(\omega) = \psi(e^{-i\omega}).$$

Hieruit volgt:

$$2[F_1(\omega) G_1(\omega) + F_2(\omega) G_2(\omega)] = \varphi(e^{i\omega})\psi(e^{i\omega}) + \varphi(e^{-i\omega})\psi(e^{-i\omega})$$

waarin

$$F_1(\omega) = F_1 = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos\omega + a_2 \cos 2\omega + \ldots$$
$$G_1(\omega) = G_1 = \tfrac{1}{2}a'_0 + a'_1 \cos\omega + a'_2 \cos 2\omega + \ldots$$
$$F_2(\omega) = F_2 = a_1 \sin\omega + a_2 \sin 2\omega + \ldots$$
$$G_2(\omega) = G_2 = a'_1 \sin\omega + a'_2 \sin 2\omega + \ldots$$

Stelt men nu $n = 0$ in (I) en (II) dan vindt men

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F_1 G_1 \, d\omega = \tfrac{1}{2}a_0 a'_0 + a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \ldots.$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F_2 G_2 \, d\omega = \qquad a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \ldots$$

dus

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{\varphi(e^{i\omega})\psi(e^{i\omega}) + \varphi(e^{-i\omega})\psi(e^{-i\omega})\} \, d\omega = \frac{1}{4}a_0 a'_0 + a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \ldots$$

wat overeenkomt met het Theorema van PARSEVAL.

4. Zijn de reeken voor $f(x)$ en $\varphi(x)$ bekend en is men in staat de integralen $\int_0^\pi f(\omega)\varphi(\omega)\cos n\omega \, d\omega$ en $\int_0^\pi f(\omega)\varphi(\omega)\sin n\omega \, d\omega$ te bepalen, dan kan men door middel van het voorgaande de reeksen sommeeren die in de tweede leden der gevonden formules voorkomen. Maken wij, om dit te laten zien, eene toepassing van de formules (1), (2) en (3).

Zij

$$f(x) = x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} - \ldots.\right)$$
$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots.\right)$$

dan is

$$\mathfrak{A}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \omega^2 \cos n\omega \, d\omega = 4\,\frac{\cos n\pi}{n^2}$$

$$\mathfrak{C}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \omega^2 \sin n\omega \, d\omega = -\frac{2\pi \cos n\pi}{n} - \frac{4\,(1 - \cos n\pi)}{\pi n^3}.$$

Volgens de vergelijking (1) heeft men nu, daar

$$a_2 = a_4 = a_6 = \ldots = 0$$

$$\mathfrak{A}_0 = \tfrac{1}{2}\,a_0^2 + a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + \ldots$$

$$\mathfrak{A}_2 = \tfrac{1}{2}\,a_1^2 + a_1a_3 + a_3a_5 + a_5a_7 + \ldots$$

$$\mathfrak{A}_4 = a_1a_3 + a_1a_5 + a_3a_7 + a_5a_9 + \ldots$$

$$\mathfrak{A}_6 = a_1a_5 + \frac{a_3^2}{2} + a_1a_7 + a_3a_9 + a_5a_{11} + \ldots$$

. . . . . .

waaruit volgen de betrekkingen

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\frac{1}{1^2.3^2} + \frac{1}{3^2.7^2} + \frac{1}{5^2.9^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1^2.5^2} + \frac{1}{3^2.7^2} + \frac{1}{5^2.9^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{64} - \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{1^2.7^2} + \frac{1}{3^2.9^2} + \frac{1}{5^2.11^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{144} - \frac{137}{4050}$$

. . . . . .

Volgens formule (2) is verder

$$\mathfrak{A}_0 = \sum_1^{\infty} b_m^2$$

$$\mathfrak{A}_1 = \sum_1^{\infty} b_m b_{m+1}$$

$$\mathfrak{A}_2 = -\tfrac{1}{2}\,b_1^2 + \sum_1^{\infty} b_m b_{m+2}$$

$$\mathfrak{A}_3 = -b_1b_2 + \sum_1^{\infty} b_m b_{m+3}$$

$$\mathfrak{A}_4 = -\tfrac{1}{2}\,(2b_1b_3 + b_2^2) + \sum_1^{\infty} b_m b_{m+4}$$

$$\mathfrak{A}_5 = -(b_1b_4 + b_2b_3) + \sum_1^{\infty} b_m b_{m+5}$$

$$\mathfrak{A}_6 = -\tfrac{1}{2}\,(2b_1b_5 + 2b_2b_4 + b_3^2) + \sum_1^{\infty} b_m b_{m+6}$$

. . . . . .

Hieruit leidt men af

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots=1$$

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\ldots=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.6}+\ldots=\frac{11}{18}$$

$$\frac{1}{1.5}+\frac{1}{2.6}+\frac{1}{3.7}+\ldots=\frac{25}{48}$$

$$\frac{1}{1.6}+\frac{1}{2.7}+\frac{1}{3.8}+\ldots=\frac{137}{300}$$

$$\frac{1}{1.7}+\frac{1}{2.8}+\frac{1}{3.9}+\ldots=\frac{49}{120}$$

. . . . . .

Op gelijke wijze vindt men uit vergelijking (3)

$$\mathfrak{C}_1=\tfrac{1}{2}a_0b_1+\tfrac{1}{2}(a_1b_2-b_2a_3+a_3b_4-b_4a_5+\ldots)$$

$$\mathfrak{C}_2=\tfrac{1}{2}(a_0b_2+a_1b_1)+\tfrac{1}{2}(a_1b_3-b_1a_3+a_3b_5-b_3a_5+a_5b_7-b_5a_7+\ldots)$$

$$\mathfrak{C}_3=\tfrac{1}{2}(a_0b_3+a_1b_2)+\tfrac{1}{2}(a_1b_4-b_2a_5+a_3b_6-b_4a_7+a_5b_8-b_6a_9+\ldots)$$

$$\mathfrak{C}_4=\tfrac{1}{2}(a_0b_4+a_1b_3+a_3b_1)+\tfrac{1}{2}(a_1b_5-b_1a_5+a_3b_7-b_3o_7+a_5b_9-b_5a_9+\ldots)$$

$$\mathfrak{C}_5=\tfrac{1}{2}(a_0b_5+a_1b_4+a_3b_2)+\tfrac{1}{2}(a_1b_6-b_2a_7+a_3b_8-b_4a_9+a_5b_{10}-b_6a_{11}+\ldots)$$

$$\mathfrak{C}_6=\tfrac{1}{2}(a_0b_6+a_1b_5+a_3b_3+a_5b_1)+$$
$$+\tfrac{1}{2}(a_1b_7-b_1a_7+a_3b_9-b_3a_9+a_5b_{11}-b_5a_{11}+\ldots)$$

. . . . . .

waaruit volgen deze betrekkingen

$$\frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{3^2.5^2}+\frac{1}{5^2.7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4.1^2}-\frac{1}{2.5^2}+\frac{1}{6.3^2}-\frac{1}{4.7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}-\frac{31}{54}$$

$$\frac{1}{5.1^2}-\frac{1}{1.5^2}+\frac{1}{7.3^2}-\frac{1}{3\,7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{16}-\frac{4}{9}$$

$$\frac{1}{6.1^2}-\frac{1}{2.7^2}+\frac{1}{8.3^2}-\frac{1}{4.9^2}+\ldots=\frac{7\pi^2}{60}-\frac{347}{900}$$

$$\frac{1}{7.1^2}-\frac{1}{1.7^2}+\frac{1}{9.3^2}-\frac{1}{3.9^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{24}-\frac{187}{675}$$

. . . . . .

Scheikunde. — De Heer A. P. N. FRANCHIMONT biedt eene mededeeling van den Heer D. H. BRAUNS aan: *„Over een gekristalliseerd d. fructosetetracetaat."*

(Mede aangeboden door den Heer P. VAN ROMBURGH).

Van d. fructose zijn tot nog toe slechts zeer weinig gekristalliseerde derivaten verkregen. Een pentacetaat werd beschreven als een gomachtige stof door ERWIGS en KOENIGS. Uit vele onderzoekingen schijnt echter te volgen dat de hooge temperatuur, waarbij de reacties meestal gebeurd zijn, omzetting of ontleding der fructose teweegbrengt. Daarom werd, nadat met azijnzuuranhydride en acetylchloride geen voldoende resultaten verkregen waren, acetylbromide aangewend, dat reeds bij betrekkelijk lage temperatuur reageert. De meest mogelijke voorzorgen werden genomen om vocht uit te sluiten en de reactie bij lage temperatuur langzaam te doen plaats hebben. De wijze waarop dit bereikt werd zal later uitvoerig gepubliceerd worden.

Afgekoelde d. fructose fijn gepoederd werd met iets meer dan vijf moleculen afgekoeld acetylbromide bij — 15 ongeveer te zamen gebracht en, nadat de reactie op één punt was ingeleid door een buisje dat gewone temperatuur had, werd gewacht tot dat de ergste broomwaterstof ontwikkeling voorbij en de reactie dus bijna afgeloopen was. Nu werd het niet verbruikte acetylbromide in een hoog vacuum afgedistilleerd en 't product, een taaie gele massa, met ijswater behandeld, daarna in alcohol opgelost en in een exsiccator met kali bij lage temperatuur neergezet. Er ontstond eene gekristalliseerde stof die, na uitpersen en omkristalliseeren bij lage temperatuur, broomvrij was en fraaie kristallen leverde.

Deze kristallen zijn kleurloos, reukloos, bitter van smaak en smelten bij 131°—132°. In een hoog vacuum kunnen zij gesublimeerd worden reeds bij 95°, sneller bij 105°; 't sublimaat heeft 't zelfde smeltpunt.

De elementairanalyse gaf 't volgende gemiddeld resultaat C 48,26%, H 5,86%.

De molecuulgewichtsbepaling door vriespuntsverlaging van benzol gaf 355 als gemiddelde.

De acetylbepaling werd verricht door verzeeping met 1/10 normaal natronloog bij lage temperatuur. Hierbij wordt, zooals controleproeven onder dezelfde omstandigheden genomen, leerden de fructose nog niet veranderd, althans niet in zuren omgezet. Na twee uur was de verzeeping reeds bijna afgeloopen, na 18 uur geheel en na 28 uur

was nog geen merkbare ontleding der fructose ingetreden en werden nagenoeg dezelfde cijfers verkregen als na 18 uur. Er ontstond gemiddeld 69,42% azijnzuur.

Het is dus een fructose tetracetaat, $C_{14}H_{18}O_{10}$, waarvoor de theorie verlangt C. 48,25%, H. 5,86% Molecuulgewicht 348. Azijnzuur 68,96%.

Deze verbinding is weinig oplosbaar in water, in aether, in benzol en in ligroïne, zeer in alcohol en chloroform.

De oplossing in chloroform diende om 't draaiend vermogen te bepalen. Zij is linksdraaiend en voor de specifieke draaiing van het d. fructose tetracetaat bij 20° werd gevonden $[\alpha]_D^{20} - 93°.23$.

Dr. F. M. JAEGER had de goedheid de kristallen te onderzoeken en gaf daaromtrent 't volgende verslag:

d. Fructose tetracetaat (BRAUNS).

$C_{14}H_{18}O_{10}$; Smeltpunt: °C.

Spec. Gew. der krist. bij 15°C. = 1,388; Mol. Volume = 250,72.

Uit aethylalkohol + aether bij langzame verdamping in fraaie, kleurlooze, zeer glanzende kristalletjes, welke goed meetbaar zijn, en een zuiveren geometrischen bouw bezitten.

De verbinding is *hemimorf*; hare symmetrie is die van de *monoklien-sphenoïdische* klasse. Zij bezit derhalve geen enkel symmetrievlak, noch een symmetrie-centrum meer, maar slechts ééne enkele unipolaire, tweetallige as. Alle kristallen, welke ik onderzocht, stelden denzelfden der twee mogelijke enantiomorfe vormen voor.

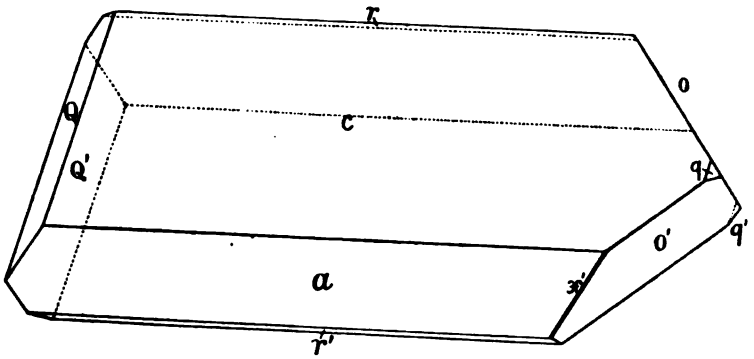


Fig. 1. d. Fructose tetracetaat (BRAUNS).

Behalve door den habitus der kristallen, werd hunne hier toegekende symmetrie bovendien ondubbelzinnig bewezen door 't onderzoek der met 95% alcohol te voorschijn geroepen etsfiguren; vooral op {100} en {001} waren deze zeer duidelijk.

Parameters: $a : b : c = 1,3463 : 1 : 1,5733$
$\beta = 52°.12'$

Waargenomen vormen: $c = \{001\}$, breed en zeer glanzend; $a = \{100\}$, iets smaller; $o = \{\bar{1}11\}$, groot en scherpe reflexen leverend; $q = \{011\}$, klein maar goed reflekteerend; $Q = \{0\bar{1}1\}$, groot en glanzend; $r = \{\bar{1}02\}$, zeer smal en lichtzwak; $x = \{\bar{9}11\}$, uiterst smal, en moeilijk meetbaar. Een enkele maal werd één vlak van $\{\bar{1}\bar{1}1\}$ waargenomen, rudimentair, en parallel 't vlak $\{001\}$ gestreept.

Hoekwaarden:	*Gemeten*:	*Berekend:*
$c : a = (001) : (100)$	=* 52°.12′	—
$o : o = (\bar{1}11) : (11\bar{1})$	=* 75 .41	—
$c : o = (001) : (\bar{1}11)$	=* 79 .37	—
$a : q = (100) : (011)$	= 67 .21½	67°.24½′
$q : o = (011) : (\bar{1}11)$	= 43 .10½	43 .17¾
$x : o = (91\bar{1}) : (11\bar{1})$	= 60 .44 (cirka)	60 .53½
$x : a = (91\bar{1}) : (100)$	= 8 .36 (cirka)	8 .27¼
$a : o = (100) : (11\bar{1})$	= 69 .29½	69 .20¾
$q : q = (011) : (01\bar{1})$	= 77 .39	77 .37½
$c : q = (001) : (011)$	= 51 .10½	51 .11¼
$c : r = (001) : (\bar{1}02)$	= 35 .44	35 .43½
$r : a = (\bar{1}02) : (\bar{1}00)$	= 92 .4	92 .4½

Goed splijtbaar parallel a en c.

Het optisch assenvlak is $\{010\}$. Zeer zwakke, geneigde dispersie: $\varrho > v$; dubbelbreking negatief. Op c treedt ééne optische as onder kleinen hoek met den normaal uit.

Topische assenverhouding: $\chi : \psi : \omega = 7,1503 : 5,3109 : 8,3556$.

Sterrekunde. — De Heer J. C. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan van den Heer W. DE SITTER: *„Over de massa's en de baanelementen der satellieten van Jupiter."*

(Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN).

De in de volgende bladzijden medegedeelde bepaling der baanelementen en massa's der satellieten van Jupiter, en van de massa en de afplattingsconstante der planeet zelve, berust bijna uitsluitend op heliometrische en photographische waarnemingen, verricht aan de sterrenwachten te Kaapstad, Pulkowa en Helsingfors in de jaren 1891 tot 1904.

Behalve deze zijn ook de waarnemingen door BESSEL met den

heliometer te Königsberg verricht in de jaren 1832 tot 1839, en de waarden van den knoop van den tweeden en het perijovium van den vierden satelliet in 1750.0 (die aan DELAMBRE's bepaling zijn ontleend) in de discussie opgenomen. Deze laatste hebben evenwel, zooals blijken zal, slechts een zeer ondergeschikte rol gespeeld, zoodat feitelijk de bepaling van alle massa's en elementen geheel onafhankelijk van eclips-waarnemingen is.

Vóór 1891 zijn geen serieën waarnemingen der satellieten buiten de eclipsen gedaan met het doel de elementen der banen te bepalen. De reeksen van BESSEL, AIRY e.a., in de eerste helft der negentiende eeuw uitgevoerd, hadden tot bepaald uitgesproken doel de afleiding van de massa van Jupiter, en de satellieten werden dan ook door die waarnemers zooveel mogelijk alleen in elongatie gemeten. De door GILL in 1891 aan de Kaap de Goede Hoop gedane reeks waarnemingen, en de reeks photographische opnamen in hetzelfde jaar, op raad van BACKLUND, door DONNER begonnen, en door hem en door KOSTINSKY tot 1898 voortgezet, zijn de eerste serieën van waarnemingen der satellieten in alle punten van hun baan. De bewerking van de Kaapsche waarnemingen van 1891 door mij gaf dan aanleiding tot de in 1901 en 1902 door COOKSON uitgevoerde heliometer-waarnemingen en de photographische waarnemingen, aan de Kaapsche sterrenwacht verricht in 1902, 1903 en 1904.

Het zal tot het goed begrip van het volgende bijdragen, hier dadelijk de gebruikte notaties te vereenigen en in het kort te verklaren.

De theorie die met de waarnemingen is vergeleken, is die van SOUILLART [1]). Deze geeft de lengtes en breedtes der satellieten betrokken op het baanvlak van Jupiter van 1850.0. Zooals ik in *Cape XII.* 3, bladz. 96 [2]) heb uitgelegd is daarvoor echter het baanvlak van 1900·0 in de plaats gesteld.

---

[1]) *Théorie analytique des mouvements des satellites de Jupiter*, par M. SOUILLART, Memoirs R. A. S. XLV, 1880.

Théorie analytique des mouvements des satellites de Jupiter, seconde partie, par M. SOUILLART, Mémoires des savants étrangers, XXX, 1887.

[2]) *Annals of the Royal Observatory at the Cape of Good Hope*, under the direction of Sir DAVID GILL, K. C. B. Volume XII:

Part I. (Nog niet gepubliceerd).

Part II. *Determination of the mass of Jupiter and orbits of the satellites*, by BRYAN COOKSON M. A. (1906).

Part III. *A determination of the inclinations and nodes of the orbits of Jupiter's satellites*, by Dr. W. DE SITTER. (1906).

Part IV. *Determination of the elements of the orbits of Jupiter's satellites*, by BRYAN COOKSON. (1907).

De voerstralen en lengtes der satellieten in hun baan worden gegeven door de formules

$$r_i = a_i(1 + \varrho_i)$$
$$v_i = l_i + \text{ongelijkheden.}$$
$$l_i = n_i t + \varepsilon_i + \vartheta_i.$$

Men heeft de rigoureuse betrekkingen

$$\varepsilon_1 - 3\ \varepsilon_2 + 2\ \varepsilon_3 = 180°$$
$$n_1 - 3\ n_2 + 2\ n_3 = 0.$$

De grootheden ϑ_i zijn de libratie, die wordt bepaald door de volgende formules:

$$\vartheta = l_1 - 3l_2 + 2l_3 - 180° = k\ sin\ \frac{t-t_0}{T} = k\ sin\ \beta\,(t-t_0)$$

$$\vartheta_i = \frac{Q_i}{\beta^2}\,\vartheta\ ,\quad \beta^2 = Q_1 - 3Q_2 + 2Q_3.$$

De grootheden Q_i (en dus β^2 en T) hangen af van de massa's, en zijn in *Gron. Publ.* 17, Art. 18 gegeven tot en met de termen van de derde orde.

De ongelijkheden kunnen naar hunne perioden verdeeld worden in drie groepen, waarvan de eerste weer in drie onderafdeelingen gesplitst kan worden. Deze zijn:

Ia. Middelpuntsvergelijkingen. De osculeerende excentriciteiten en perijovia — zonder hunne periodieke storingen (die afzonderlijk in rekening gebracht worden als ongelijkheden der lengtes en voerstralen) — zijn gegeven door de formules:

$$h_i = 2E_i\ sin\ \Omega_i = 2\Sigma_j\ \tau_{ij}\ e_j\ sin\ \tilde{\omega}_j$$
$$k_i = 2E_i\ cos\ \Omega_i = 2\Sigma_j\ \tau_{ij}\ e_j\ cos\ \tilde{\omega}_j.$$

Hierin zijn e_i en $\tilde{\omega}_i$ de *eigen* excentriciteiten en perijovia der vier satellieten. De hoeken $\tilde{\omega}_i$ varieeren evenredig aan den tijd, en de coefficienten τ_{ij} zijn afhankelijk van de massa's, terwijl $\tau_{ii} = 1$ is. Men heeft dan

$$\delta v_i = -\ cos\ l_i\ h_i + sin\ l_i\ k_i$$
$$\delta\varrho_i = -\ \tfrac{1}{2}\ sin\ 1°\ (sin\ l_i\ h_i + cos\ l_i\ k_i).$$

Alleen bij de vierde satelliet is het quadraat van E nog merkbaar. De hiermee correspondeerende termen worden echter bij *Ic* ondergebracht.

Deze herhaaldelijk aangehaalde deelen worden op de in de text gebruikte wijze aangeduid. Behalve deze zal ik telkens moeten aanhalen:

Publications of the Astronomical Laboratory at Groningen, N°. 17. *On the Libration of the three inner satellites of Jupiter*, by W. DE SITTER, Sc. D. (1907).

Deze titel wordt afgekort tot: *Gron. Publ. 17.*

Ib. De groote ongelijkheden. Deze ontstaan door de onderlinge meetbaarheid der middelbare bewegingen van de drie eerste satellieten, en zijn :

$$\delta v_1 = x_1 \sin 2(l_1 - l_2) \qquad \delta\varrho_1 = -\tfrac{1}{2} \sin 1^\circ\, x_1 \cos 2(l_1 - l_2)$$
$$\delta v_2 = -x_2 \sin (l_1 - l_2) \qquad \delta\varrho_2 = \tfrac{1}{2} \sin 1^\circ\, x_2 \cos (l_1 - l_2)$$
$$\delta v_3 = -x_3 \sin (l_2 - l_3) \qquad \delta\varrho_3 = \tfrac{1}{2} \sin 1^\circ\, x_3 \cos (l_2 - l_3)$$

Ic. Kleinere kortperiodige ongelijkheden. Alle ongelijkheden der groep *I* hebben korte perioden (hoogstens 17 dagen).

II. Ongelijkheden ontstaande uit de onderlinge meetbaarheid der middelbare bewegingen, met perioden tusschen 400 en 500 dagen Deze bestaan alleen voor de satellieten *I*, *II* en *III* en komen in de voerstralen niet voor. Hun uitdrukking is

$$\delta v_i = \Sigma_j \varkappa_{ij} \sin \varphi_j$$
$$\varphi_i = l_3 - 2l_2 + \tilde{\omega}_i$$

De coëfficienten $\varkappa_{ij}$ zijn evenredig met e_j, en hangen ook van de massa's af.

III. Ongelijkheden met zeer lange perioden (langer dan 12 jaren). Ook deze komen in de voerstralen niet voor.

De breedtes boven het baanvlak van Jupiter worden gegeven door

$$s_i = I_i \sin (v_i - N_i).$$

De hellingen en knoopen worden in SOUILLART's theorie gegeven door de formules

$$I_i \sin N_i = \Sigma_j \sigma_{ij} \gamma_j \sin \theta_j + \mu_i \omega \sin \theta + \text{periodieke termen}$$
$$I_i \cos N_i = \Sigma_j \sigma_{ij} \gamma_j \cos \theta_j + \mu_i \omega \cos \theta + \text{periodieke termen}$$

In alle reducties door COOKSON en mij zelven verricht zijn de breedtes betrokken op een fundamentaalvlak, dat gedefinieerd is door zijn helling en knoop op de ecliptica, terwijl de lengtes geteld zijn van af het punt *O* in dit vlak, dat ongeveer samenvalt met den dalenden knoop van het fundamentaalvlak op het baanvlak van 1850. In het volgende zal ik echter alle lengtes tellen van af het punt Aries.

Stelt men de helling en den dalenden knoop van het fundamentaalvlak op het baanvlak voor 1850.0 voor door ω_0 en ψ_0, en rekent men de lengtes der knoopen Ω_i van af dezen dalenden knoop, dan heeft men

$$p_i = -i_i \sin \Omega_i = -I_i \sin (N_i - \psi_0)$$
$$q_i = \quad i_i \cos \Omega_i = \quad I_i \cos (N_i - \psi_0) + \omega_0$$

waaruit

$$p_i = \Sigma_j \sigma_{ij} \gamma_j \sin (\psi_0 - \theta_j) + \mu_i \omega \sin (\psi_0 - \theta) + \text{periodieke termen}$$
$$q_i = \Sigma_j \sigma_{ij} \gamma_j \cos (\psi_0 - \theta_j) + \mu_i \omega \cos (\psi_0 - \theta) + \omega_0 + \text{periodieke termen.}$$

γ_i en θ_i zijn de *eigen* hellingen en knoopen. De hoeken θ_i varieeren evenredig aan den tijd en de coëfficienten σ_{ij} hangen af van de massa's. Men heeft weder $\sigma_{ii} = 1$. ω en θ zijn de helling en knoop van den middelbaren equator der planeet op het baanvlak. In de discussies is ter afkorting gesteld

$$\psi_0 - \theta_i = \Gamma_i$$
$$x_0 = -\omega \sin(\psi_0 - \theta)$$
$$y_0 = -\omega \cos(\psi_0 - \theta) - \omega_0.$$

x_0 en y_0 bepalen derhalve de ligging van den equator. Het geadopteerde fundamentaalvlak verschilt slechts weinig van den equator, en de knoop ψ_0 heeft de theoretische beweging [1]) van den knoop θ, zoodat de hoek $\psi_0 - \theta$ constant is, en zeer nabij 180°.

In *Gron, Publ.* 17, Chapter IV, heb ik de grootheden Q_i, β^2, τ_{ij}, $\frac{d\tilde{\omega}_i}{dt}$, $\tilde{x_i}$, $\varkappa_{ij}$, σ_{ij}, μ_i $\frac{d\theta_i}{dt}$ uitgedrukt als functies van de massa's, en wel onder den vorm van reeksen opklimmende naar de machten van de kleine grootheden $\varkappa'$ en v_i, wier beteekenis is bepaald door:

$Jb^2 = 0.0219087 \quad (1 + \varkappa) \quad (b = 1$ voor $d = 39''.0)$
$= 0.0000\ 0000\ 530042\ (1 + \varkappa)$ (astronomische eenheden).
$\varkappa' = \varkappa + 0.055$
$m_1 = 0.0000\ 40\ (1 + v_1) \quad m_3 = 0.0000\ 80 \quad (1 + v_3)$
$m_2 = 0.0000\ 22\ (1 + v_2) \quad m_4 = 0.0000\ 424\ 751\ (1 + v_4).$

Van $\varkappa'$, v_2 en v_3 werd alleen de eerste macht medegenomen, van v_1 en v_4 daarentegen alle machten die nog uit SOUILLART's formules konden afgeleid worden.

Voor de reciproke waarde der massa van het geheele systeem is aangenomen

$$\mathcal{M} = 1047.40.$$

De uit de waarnemingen af te leiden gegevens kunnen gesplitst worden in drie groepen.

A. Hellingen en knoopen, gerepresenteerd door de grootheden p_i en q_i, d. i. de grootheden waarvan de breedtes afhangen.

B. De grootheden die de lengtes en voerstralen bepalen, nl. de middelbare lengtes, de middelpuntsvergelijkingen en coëfficienten der groote ongelijkheden der drie binnenste satellieten (l_i, h_i, k_i x_i)

C. De halve groote assen, a_i.

A. Bij de afleiding der elementen uit eclipswaarnemingen worden

[1]) In werkelijkheid heeft MARTH bij het vastleggen van zijn fundamentaalvlak enkele vergissingen begaan, zoodat de beweging van ψ_0 niet volkomen met die van θ overeenstemt. Het verschil is echter geheel te verwaarloozen.

de elementen van groep *B* bepaald uit het tijdstip van het midden der eclips, die van groep *A* uit den duur van de eclips. Deze laatste is echter in even groote mate als van die elementen afhankelijk van den vorm van den schaduwkegel, d. i. van de afplatting van de planeet. Daar nu deze niet met voldoende nauwkeurigheid bekend is, zijn eclipswaarnemingen voor de bepaling der breedtes ten eenenmale onvoldoende. De elementen der eerste groep moeten dus uitsluitend uit heliometrische of photographische waarnemingen der satellieten buiten de eclipsen worden afgeleid.

B. Voor de bepaling van de elementen van de groep *B* zijn de eclipswaarnemingen daarentegen van hooge waarde. De enkele eclipswaarneming, die een *tijds*-bepaling is, levert een zeer veel nauwkeuriger vastlegging van de lengte der satelliet dan de enkele extra-eclipswaarneming. Hier tegenover staat dat de laatste kunnen herhaald worden zoo dikwijls de weersgesteldheid en de beschikbare tijd van den waarnemer het toelaten, terwijl eclipsen zich slechts in beperkt aantal voordoen. Een voordeel van de eclipswaarnemingen is weder dat hunne nauwkeurigheid onafhankelijk is van den geocentrischen afstand van Jupiter, terwijl die der micrometrische waarnemingen met dien afstand omgekeerd evenredig is. De laatste zullen dus gewoonlijk in serieën binnen enkele maanden aan weerszijden van het tijdstip der oppositie vereenigd worden. Toch moet in dit verband niet vergeten worden dat ver van de oppositie de tijd gedurende welken Jupiter boven den horizon is, en dus het aantal waarneembare eclipsen, snel afneemt.

Voor de eerste satelliet, waarvan de eclipsen talrijk en de micrometrische waarnemingen het minst nauwkeurig zijn, is het voordeel hoogstwaarschijnlijk aan den kant der eclips-waarnemingen; voor de vierde, waarvan eclipsen zeldzaam zijn en de extra-eclips-waarnemingen het best, [1]) is de verhouding omgekeerd. Zoolang omtrent de resultaten afgeleid uit de reeks photometrische eclips-waarnemingen die in de jaren 1878 tot 1903 aan de Harvard-sterrenwacht verricht zijn, niets bekend is, is het onmogelijk een definitief oordeel uit te spreken over de relatieve waarde der beide soorten van waarnemingen. Maar in elk geval is de poging gerechtvaardigd om ook de elementen van groep *B* uitsluitend uit extra-eclips-waarnemingen af te leiden.

C. Wat eindelijk de halve groote assen betreft, deze vertegen-

[1]) Hiermede bedoel ik natuurlijk dat de bepaling van de jovicentrische plaats van de satelliet uit extra-eclipswaarnemingen voor IV het nauwkeurigst is. Dit ligt alleen aan de grootte der halve groote as, niet aan de waarneming zelve. Deze laatste, dus de bepaling der geocentrische plaats, schijnt voor II en III iets nauwkeuriger te zijn dan voor IV en I.

woordigen te zamen slechts één onbekende, daar de theoretische bepaling der onderlinge verhoudingen uit de middelbare bewegingen (ook de grootere onzekerheid der aan te brengen storingen in aanmerking genomen) zeer veel nauwkeuriger is dan de directe bepaling uit de waarnemingen. Deze ééne onbekende — de schaalwaarde van het systeem — waaruit de massa van de planeet wordt afgeleid, kan natuurlijk alleen uit micrometrische waarnemingen worden bepaald, en alle dergelijke waarnemingen vóór 1891 verricht hadden dan ook, zooals boven opgemerkt is, deze bepaling tot doel.

Het aantal onbekenden van het probleem is 32, n.l.:

A.	de „eigen" hellingen en knoopen	$\gamma_i, \theta_i \ldots$ 8	onbekenden.
	de ligging van den equator	$\omega, \theta \ldots$ 2	„
	de afplattingsconstante	$Jb^2 \ldots$ 1	„
B.	middelb. lengtes met één rigoureuse conditie	$\varepsilon \ldots$ 3	„
	„ bewegingen „ „ „	$n_i \ldots$ 3	„
	amplitude en phase der libratie	$k, t_0 \ldots$ 2	„
	de eigen excentriciteiten en perijovia	$e_i, \tilde{\omega}_i \ldots$ 8	„
	de massa van elk der satellieten	$m_i \ldots$ 4	„
C.	de reciproke van de massa v. h. systeem	$\mathcal{M} \ldots$ 1	„
		32	

De waarnemingen, die gebruikt zijn om de resultaten, hieronder medegedeeld, af te leiden zijn de volgende:

1. Heliometer-waarnemingen, in 1891 gedaan aan de Kaapsche sterrenwacht door GILL en FINLAY. Deze zijn door mij bewerkt en gepubliceerd in mijne dissertatie [1]). Na de publicatie zijn nog enkele vergissingen en rekenfouten aan het licht gekomen, die in de hier gebruikte resultaten reeds verbeterd zijn. De gecorrigeerde resultaten zullen binnenkort gepubliceerd worden in Cape Annals, Vol XII, Part. I.

Deze serie dankt hare groote nauwkeurigheid aan het door GILL ingevoerde principe slechts afstanden en positie-hoeken der satellieten onderling, in plaats van tusschen de satellieten en de planeet, te meten [2]). Hierdoor worden groote systematische fouten vermeden.

2. Heliometer-waarnemingen in 1901 en 1902 aan de Kaapsche sterrenwacht gedaan door BRYAN COOKSON, M. A., en door hemzelven

[1]) Reduction of Heliometer-observations of Jupiter's satellites, made by Sir DAVID GILL, K. C. B. and W. H. FINLAY, M. A., by W. DE SITTER. Groningen J. B. WOLTERS 1901.

[2]) Reeds vroeger toegepast door HERMANN STRUVE in zijne waarnemingen der satellieten van Saturnus.

bewerkt. Het resultaat werd gepubliceerd in Cape XII.2, en correcties tot de daar gevonden waarden werden later in Cape XII.4, *Appendix*, medegedeeld. Ook hier werden weder alleen de relatieve posities der satellieten onderling bepaald.

Uit deze drie serieën werden alle elementen afgeleid, en alle zijn in de einddiscussie opgenomen, zooals ze in de geciteerde definitieve publicaties opgegeven staan. De eenige uitzondering is voor 1902 de positie van het fundamentaal-vlak, waarvan de helling op de ecliptica is 2°8'38", niet 2°11'38", zooals Cape XII.2 bladz. 191 staat gedrukt [2]).

3. Photographische platen, genomen aan de Kaapsche sterrenwacht in 1891 en 1903, gemeten en bewerkt door mij en gepubliceerd in Cape XII. 3. Alleen de grootheden p_i en q_i voor elke epoque werden afgeleid. Deze zijn gebruikt zooals ze in Cape XII. 3. staan opgegeven.

4. Photographische platen, genomen aan de Kaap in 1904, gemeten en bewerkt door mij. Hieruit zijn afgeleid p_i en q_i, die gepubliceerd zijn in Cape XII. 3, en l_1, l_2, l_3, gepubliceerd in *Gron. Publ.* 17. De gepubliceerde resultaten zijn onveranderd overgenomen.

Ook in deze drie serieën werden alleen relatieve coördinaten der satellieten onderling gebruikt. De planeet werd door mij in het geheel niet gemeten.

5. Photographische platen van 1902, aan de Kaap genomen, gemeten en bewerkt door COOKSON, en gepubliceerd in Cape XII. 4. Deze vereischen eene nadere bespreking.

De Heer COOKSON, heeft op de platen verschillen van *RA* en decl. gemeten der vier satellieten *en Jupiter*. De instelling op de schijf van de planeet noemt hij zelf „not very acurate" (Cape XII. 4, bladz. 24), maar dit is volgens hem ook niet noodig, daar zij later toch geëlimineerd wordt. Deze eliminatie echter is zeer onvolkomen.

Zij wordt aldus uitgevoerd. Uit de gemeten coördinaten-verschillen $x_i - x_p$ wordt eene voorloopige oplossing gemaakt welke, in de conditie-vergelijkingen gesubstitueerd, de residus δx_i overlaat. Het gemiddelde van deze residus voor elke plaat, dat δx_0 genoemd moge worden, wordt dan beschouwd als de correctie δx_p, aan x_p aan te brengen, d. i. de fout in de instelling op de schijf der planeet met omgekeerd teeken, en wordt dus van de waargenomen coördinaten $x_i - x_p$ afgetrokken. Deze methode nu elimineert alleen het *toevallige*

[2]) De aldaar opgegeven helling en knoop op den equator zijn nog correct, in de reductie op de ecliptica moet echter een fout ingeslopen zijn. Het gevolg hiervan is dat aan de helling ω_0 van het fundamentaal vlak op de Jupitersbaan een correctie moet aangebracht worden van $-0°.0092$, inplaats van $+0°.0375$, zooals uit de in Cape XII.2 opgegeven getallen zou volgen.

deel van de correctie δx_p. Het systematische deel daarentegen wordt al dadelijk in de eerste oplossing in de waarden der onbekenden Δh_i, Δk_i, Δx_i opgenomen, en wordt daaruit ook door de volgende benaderingen niet weder verwijderd. De coëfficienten van deze onbekenden bestaan n.l., zooals ook door den Heer Cookson zelven (Cape XII. 4. bladz. 102) wordt opgemerkt, uit een constant en een periodiek gedeelte, waarvan het eerste gemiddeld driemaal zoo groot is als het tweede. Verwaarloost men dit periodieke gedeelte, dan zijn de drie onbekenden niet te scheiden, en vertegenwoordigen te zamen slechts één onbekende F_i voor elke satelliet. Wanneer men dus voor het systematische deel van δx_p een afzonderlijke onbekende ingevoerd had, zoodat de conditie-vergelijkingen waren geworden:

$$\frac{dx}{dF} F - \delta x_p + \ldots = O - C,$$

dan zouden F en δx_p niet te scheiden zijn geweest. Of nu de onbekende δx_p in de vergelijkingen opgeschreven wordt of niet, doet niets ter zake; in beide gevallen is de waarde die men voor F vindt niet F zelve, maar $F - \delta x_p \Big/ \frac{dx}{dF}$, en de residus δx_i, en dus ook hun gemiddelde δx_0, bevatten *niet* het systematisch deel van de instellingsfout op de schijf.

Veronderstelt men dat de waarden van F, die uit de gelijktijdige heliometer-waarnemingen zijn afgeleid (zie sub 2 hierboven), de ware zijn, dan zijn de verschillen $P—H$, door Cookson in Cape XII. 4. bladz. 102 medegedeeld (waar voor F_8 — 0.0295 moet gelezen worden in plaats van — 0.0395) evenredig aan deze systematische fout, en men heeft $\delta x_p = \frac{dx}{dF}(P—H)$. Men vindt zoo uit de vier satellieten

$$\left.\begin{aligned} \delta x_p = &- 0''.19 \pm 0''.04 \\ &- 0\ .15 \pm\ .06 \\ &- 0\ .17 \pm\ .05 \\ &- 0\ .33 \pm\ .04 \end{aligned}\right\} \text{gemiddeld } - 0''.21 = - 0'.0035.$$

De overeenstemming der vier waarden onderling is verrassend, vooral als men bedenkt dat de waarschijnlijke fouten alleen dan een betrouwbaren maatstaf van de nauwkeurigheid zouden zijn, als kon aangenomen worden dat het periodieke gedeelte der coëfficienten van Δh_i etc. op het eindresultaat geheel zonder invloed is geweest, wat natuurlijk vooral bij de vierde satelliet, waarvan slechts een klein aantal omloopen binnen het tijdsbestek der waarnemingen vallen, ver van juist is. De gemiddelde systematische instellingsfout

op de Jupiter-schijf is geheel van dezelfde grootte-orde als de door mij in de metingen van RENZ (zie beneden, onder 6) gevondene. Ik geloof derhalve deze verklaring van de groote verschillen tusschen de resultaten van de photographiën en den heliometer in 1902 als de juiste te mogen aannemen. Ik heb daarom van de resultaten van de photographische serie alleen de waarden van p_i en q_i gebruikt, die bijna uitsluitend op declinatie-verschillen berusten waarbij, omdat de onbekenden Δh_i, Δk_i, Δx_i in de conditie-vergelijkingen zeer kleine en niet constante coëfficienten hebben, de eliminatie van dx_p veel volkomener is. Ik heb de resultaten geadopteerd, afgeleid uit de oplossing waarbij de oriëntatie uit de *trails* is bepaald. De reden waarom deze boven de uit de standaard-sterren afgeleide oriëntatie de voorkeur verdient, is door mij Cape XII. 3. *Appendix* ontwikkeld. De waarden van Δq_i en Δp_i zijn onveranderd uit Cape XII. 4 overgenomen.

6. Photographische platen genomen op de sterrenwachten te Helsingsfors door Prof. DONNER, en te Pulkowa door Dr. KOSTINSKY, gemeten door RENZ, en gepubliceerd in de Mémoires de St. Petersbourg, VIII^{ste} serie, Vol. VII, N°. 4 en Vol. XIII, N°. 1.

Uit de metingen van RENZ heb ik correcties Δl_1, Δl_2, Δl_3 tot de middelbare lengtes afgeleid, en gepubliceerd in Gron. Publ. 17. De daar gevonden waarden zijn onveranderd behouden.

RENZ heeft de coördinaten van de satellieten ten opzichte van Jupiter gemeten. Ik ben mijne bewerking begonnen door de instelling op de planeet streng te elimineeren. Het blijkt dat deze instelling inderdaad aan zeer groote systematische fouten onderhevig is (Gron. Publ. 17, art. 9*b*).

7. Heliometer-waarnemingen door BESSEL verricht te Königsberg van 1832 tot 1839, gepubliceerd door hemzelven in „Astronomische Untersuchungen, Band II", nieuw bewerkt door SCHUR en gepubliceerd in Nova Acta Acad. Leopold. Carol., Deel 44, blz. 101—180. Alleen de waarden van h_3, k_3, h_4 en k_4 zijn in de discussie opgenomen en alleen h_4 en k_4 hebben tot het eindresultaat bijgedragen.

BESSEL heeft de satellieten aangesloten aan de planeet. Inderdaad heeft reeds SCHUR op het bestaan van groote systematische fouten gewezen, die oorzaak zijn dat de resultaten niet dat vertrouwen verdienen, waarop zij volgens hunne w. f. aanspraak maken.

8. De waarden der „eigen" knoopen en perijovia voor 1750. Deze zijn bepaald door DELAMBRE en door DAMOISEAU. Omtrent hunne betrouwbaarheid kunnen slechts gissingen gemaakt worden. De overeenstemming der beide resultaten, die zeer goed is, is geen maatstaf der nauwkeurigheid, daar niet bekend is in hoeverre DAMOISEAU

onafhankelijk is van zijn voorganger. De rol door deze gegevens in de afleiding der eindresultaten gespeeld, is een zeer ondergeschikte, zooals verderop blijken zal.

Om uit de combinatie der op de verschillende epoques voor de osculeerende elementen gevonden waarden niet alleen de waarden der integratie-constanten, maar ook die der massa's, te kunnen afleiden, is het noodig de uitdrukking der storingen in functie van de massa's te kennen. Daar de aan SOUILLART's theorie ten grondslag liggende massa's waarschijnlijk groote correcties behoeven, en tengevolge van de onderlinge meetbaarheid der middelbare bewegingen de storingen van hoogere orde zeer groot zijn — in enkele gevallen grooter dan die der eerste orde — is het niet voldoende de storingen als lineaire functies der massa's op te vatten. De noodige numerieke formules om de correcties tot de storingen correspondeerende met willekeurige correcties tot de massa's te berekenen, zijn door mij op grondslag van SOUILLART's numerieke theorie uitgewerkt, en zijn medegedeeld in *Gron. Publ.* 17, *art.* 17.

De gegevens, die voor de bepaling der massa's noodig zijn, zijn:

I. De bewegingen der knoopen, en wel vooral van θ_3. De helling van I is te klein om de beweging van den knoop met nauwkeurigheid te kunnen bepalen, en de bewegingen van θ_3 en θ_4 zijn te langzaam om naast die van θ_2 eenig gewicht in de schaal te leggen. De beweging van θ_3 is het gegeven dat dienen moet om de afplattingsconstante Jb^2 te bepalen.

II. De bewegingen der perijovia, en wel vooral van $\tilde{\omega}_4$. De excentriciteiten van I en II zijn weer te klein om een bepaling van de beweging van het perijovium mogelijk te maken, terwijl de beweging van $\tilde{\omega}_3$, zoo zij al scherp bepaald kon worden, door de kleine coëfficienten der massa's van weinig waarde zou zijn. De beweging von $\tilde{\omega}_4$, die ten gevolge van de groote excentriciteit scherp bepaald kan worden, dient voornamelijk ter bepaling van m_3.

III*a*. De groote ongelijkheden in de lengtes en voerstralen van de eerste en de derde satelliet. Deze hangen vooral van m_3 af en dienen ter bepaling van deze massa.

III*b*. De groote ongelijkheid van de tweede satelliet. Deze levert eene betrekking tusschen m_1 en m_3.

Deze gegevens zijn degene die ook LAPLACE reeds gebruikt heeft voor het bepalen der massa's. Hieraan heb ik toegevoegd:

IV. De periode der libratie, die afhangt van m_1, m_2 en m_3, en wel

voornamelijk van m_1 en m_2, en dus met III*b* samen deze beide massa's bepaalt. [1])

Ten slotte zij ter wille van de volledigheid nog opgenoemd:

V. De verhouding der beide excentriciteiten van satelliet III, waaruit de massa m_4 moet bepaald worden. Het is mij niet mogelijk geweest die verhouding uit het mij ter beschikking staande materiaal af te leiden, en ik heb dus m_4 onverbeterd moeten laten.

Het onderzoek kan dus gesplitst worden in de volgende onderdeelen:

I. De bepaling der hellingen en knoopen op de verschillende epoques, en daaruit van de knoopenbewegingen. De discussie hiervan moet tevens de ligging van het equatorvlak van de planeet geven, daar immers het grootste gedeelte van de knoopenbewegingen wordt voortgebracht door de afplatting der planeet, en de theoretische bewegingen derhalve op dat vlak betrokken zijn, terwijl de eigen hellingen op dat zelfde vlak constant blijven. Deze discussie is met voorloopige waarden van p_i en q_i uitgevoerd in *Cape XII*, 3, *Chapters XV—XXI*.

II. De bepaling der middelpunts-vergelijkingen en hunne seculaire veranderingen. Dit is uitgevoerd in *Gron. Publ.* 17, Art. 19.

III. De bepaling der grootc ongelijkheden. Deze zijn uit de Heliometrische waarnemingsreeksen van 1891, 1901 en 1902 onveranderd overgenomen.

IV. De bepaling der libratie. Deze is uitgevoerd in *Gron. Publ.* 17.

De bepaling der massa's uit de condities door deze verschillende onder-problemen geleverd is in *Gron. Publ.* 17 uitgevoerd zoover het mogelijk was met de mij toen ter beschikking staande gegevens. Ik vond daar de massa's:

$$\left.\begin{array}{ll} \varkappa' = +\ 0.025 & \nu_2 = +\ 0.050 \\ \nu_1 = -\ 0.360 & \nu_3 = +\ 0.025 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

De conditie-vergelijkingen waaruit correcties tot deze waarden zijn afgeleid, zullen verderop worden medegedeeld. Ik ga nu eerst over tot de bespreking der afzonderlijke onderdeelen I—IV van het onderzoek.

I. *Hellingen en knoopen.*

De gegevens zijn p_i en q_i voor de vijf epoques 1891.75, 1901.61,

[1]) Zie „*Over de libratie der drie binnenste satellieten van Jupiter, en eene nieuwe methode ter bepaling van de massa van satelliet I*," door Dr. W. DE SITTER. Handelingen van het 10e Ned. Nat. en Geneesk. Congres, (Arnhem 1905), bladz. 125—128.

1902.60, 1903.72, 1904.89. De onbekenden zijn γ_i, Γ_0, x_0, y_0 en de bewegingen der knoopen. Deze laatste hangen af van $\varkappa'$ en ν_i, waarvan alleen $\varkappa'$ als onbekende is ingevoerd. De discussie is uitgevoerd in Cape XII. 3, gebaseerd op de massa's van SOUILLART's theorie. Deze moet nu herhaald worden met de massa's (A), die ongetwijfeld veel dichter bij de waarheid zijn. Bovendien moeten de volgende correcties aangebracht worden:

a. De waargenomen waarden van p_i en q_i moeten voor alle eqoques op eenzelfde fundamentaalvlak betrokken worden. Toen de discussie van Cape XII. 3 uitgevoerd werd stonden mij daartoe de gegevens nog niet ten dienste, voor zoover 1901 en 1902 betreft.

b. In de discussie van Cape XII. 3 was ik genoodzaakt de waarnemingen der satellieten III en IV voor 1901 en 1902 te verwerpen. COOKSON had aan de breedte van IV een empirischen term toegevoegd, die ook op III teruggewerkt had, en die in de waarnemingen van 1891, 1903 en 1904 niet terug te vinden was. Sintsdien heeft de Heer COOKSON de ware verklaring voor dien schijnbaar periodieken term gevonden, en zijne resultaten in overeenstemming daarmede verbeterd. De verbeterde waarden moeten nu in de discussie ingevoerd worden. Het zal blijken dat thans niet alleen niets meer behoeft verworpen te worden, maar dat ook de voorstelling der waarnemingen over het algemeen veel beter is geworden.

Het schijnt overbodig de discussie hier in bijzonderheden mede te deelen. Zij zal gepubliceerd worden in *Cape* XII. 1, *Appendix*, en ik kan volstaan met hier de hoofdlijnen aan te geven.

Het moge in herinnering gebracht worden dat in Cape XII. 3 twee eind-soluties werden gemaakt, waarvan Sol. VI uitsluitend op moderne waarnemingen berust, terwijl in Sol. VII de beweging van θ_1 uit vergelijking met DELAMBRE (1750) werd afgeleid en de knoopenbewegingen der andere satellieten in overeenstemming [1]) hiermede werden aangenomen, zoodat $\varkappa'$ niet als onbekende werd ingevoerd. De overeenstemming tusschen de soluties VI en VII was zeer goed, behalve voor $\varkappa'$ en y_0. De waarden (A) van $\varkappa'$ en ν_i zijn zoodanig dat de daarmee berekende knoopenbewegingen ongeveer het gemiddelde zijn tusschen de in Sol. VI en Sol. VII gevondene.

Nadat nu de correcties (a) en (b) waren aangebracht, en de grootheden σ_{ij} en μ_i die voor de solutie noodig zijn, in overeenstemming gebracht waren met de massa's (A), werd eene oplossing gemaakt (Sol. VIII) waarin, even als in Sol. VI, als onbekenden werden

[1]) De overeenstemming was slechts benaderd, daar de uitdrukkingen der knoopenbewegingen in functie der massa's (*Gron. Publ.* 17, art. 17) toen nog niet berekend waren.

opgenomen γ_i, Γ_{i0}, x_0, y_0 en $\delta x'$. De methode van oplossing is geheel dezelfde als in Cape XII. 3, en is ook in deze Verslagen (Maart 1906) uitvoerig beschreven. De uit deze oplossing gevondene waarden van γ_i en Γ_{i0} waren zeer nabij gelijk aan de vroegere. De gevonden correctie tot x' was zeer klein, nl.

$$\delta x' = + 0.0026 \pm .0058.$$

De massa's worden dus nu

$$\left.\begin{aligned} x' &= + 0.0276 & \nu_3 &= + 0.050 \\ \nu_1 &= - 0.360 & \nu_4 &= + 0.025 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (B)$$

De knoopenbewegingen werden nu in overeenstemming gebracht met deze massa's, de gevonden waarden van γ_i en Γ_{i0} werden ingevoerd, en residus $\Delta\gamma_i$ en $\sin\gamma_i\ \Delta\Gamma_i$ werden gemaakt. Uit de laatste werden dan voor elke satelliet afzonderlijk correcties tot de knoopenbewegingen afgeleid, die hieronder zijn opgegeven onder I. Verder werden ook de waarden der knoopen voor 1750.0 berekend, en vergeleken met de door DELAMBRE bepaalde. Deze geven de correcties II tot de knoopenbewegingen.

Correcties tot de beweging van:	I *(modern)*	II (DELAMBRE)
θ_1	+ 0°.009 4 ± .0029	
θ_2	— 0 .000 01 ± .00009	— 0°.00042 ± °.00020
θ_3	— 0 .000 48 ± 23	— 0 .00034 ± 20
θ_4	— 0 .000 13 ± 11	+ 0 .00008 ± 50

Deze correcties hebben gediend als tweede leden van conditievergelijkingen, die te zamen met de uit de andere onder-problemen afgeleide condities voor het bepalen van correcties tot de massa's (B) gebruikt zijn. Deze vergelijkingen zullen verderop worden medegedeeld. De definitief geadopteerde waarden zijn:

$$\left.\begin{aligned} x' &= + 0.0326 \pm .0075 \\ \nu_1 &= - 0.350 \pm .030 \\ \nu_2 &= + 0.050 \pm .050 \\ \nu_3 &= + 0.005 \pm .020 \\ \nu_4 &= 0 \pm 0.25 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (C)$$

Deze werden nu in de grootheden σ_{ij} en μ_i ingevoerd, en eene nieuwe solutie (Sol. IX) werd gemaakt, waarin nu de knoopenbewegingen overeenkomstig de massa's (C) werden aangenomen, en dus $\delta x'$ niet meer als onbekende werd ingevoerd. Het resultaat is:

TAFEL I. HELLINGEN EN KNOOPEN.

Serie	Waargen. correctie	w. f.	Residu	Waargen. correctie	w. f	Residu	Waargen. correctie	w. f.	Residu	Waargen. correctie	w. f.	Residu
	p_1			p_2			p_3			p_4		
1891 *H*	+0°.0360	± °.0045	+ °.0023	+0°.0752	± °.0031	+ °.0025	—0°.0029	± °.0020	+ °.0032	+0°.0630	± °.0010	+ °.0022
„ *P*	+ .0372	± 50	+ 35	+ .0733	± 36	+ 6	— .0024	± 19	+ 37	+ .0638	± 12	+ 30
1901	+ .0338	± 71	+ 20	+ .1119	± 52	— 64	— .0105	± 33	+ 18	+ .0564	± 17	— 54
1902 *H*	+ .0091	± 65	+ 1	+ .0923	± 40	+ 19	— .0097	± 25	+ 18	+ .0636	± 13	+ 16
„ *P*	+ .0026	± 80	— 64	+ .0941	± 42	+ 37	— .0095	± 27	+ 21	+ .0612	± 14	— 8
1903	+ .0021	± 60	+ 75	+ .0526	± 33	— 33	— .0199	± 22	— 97	+ .0583	± 12	— 20
1904	— .0028	± 78	— 58	+ .0158	± 44	+ 8	— .0104	± 28	— 11	+ .0648	± 13	+ 27
	q_1			q_2			q_3			q_4		
1891 *H*	—0°.0273	± °.0049	— °.0063	+0°.0867	± °.0029	+ °.0015	—0°.0681	± °.0017	+ °.0016	—0°.0137	± °.0010	— °.0005
„ *P*	— .0258	± 61	— 48	+ .0813	± 35	— 39	— .0748	± 23	— 51	— .0117	± 11	+ 15
1901	— .0793	± 79	— 57	— .1658	± 45	+ 76	— .0369	± 30	+ 103	— .0191	± 16	0
1902 *H*	— .0769	± 59	— 37	— .1896	± 36	+ 41	— .0431	± 21	— 4	— 0.172	± 13	+ 22
„ *P*	— .0820	± 62	— 88	— .1904	± 37	+ 33	— .0384	± 22	+ 43	— .0170	± 13	+ 24
1903	— .0597	± 48	— 58	— .2120	± 32	— 29	— .0442	± 20	— 4	— .0209	± 11	— 6
1904	— .0336	± 77	— 34	— .2253	± 48	— 90	— .0177	± 26	— 54	— .0210	± 17	0

Solutie IX.

$\gamma_1 = 0.^\circ0272 \pm .^\circ0028 \qquad \theta_1 = 60.^\circ2 \pm 7.^\circ0 - \{0.^\circ13614 \pm .^\circ00100\}\, t$

$\gamma_2 = 0.4683 \pm 16 \qquad \theta_2 = 293.18 \pm 0.19 - \{0.032335 \pm .000240\}\, t$

$\gamma_3 = 0.1839 \pm 26 \qquad \theta_3 = 319.73 \pm 0.52 - \{0.006854 \pm .000180\}\, t$

$\gamma_4 = 0.2536 \pm 23 \qquad \theta_4 = 11.98 \pm 0.67 - \{0.001772 \pm .000030\}\, t$

De tijd t is gerekend in dagen van af 1900 Jan. 0 middelb. middag te Greenwich. De knoopen zijn gerekend van af het punt Aries, en hunne bewegingen bevatten de precessie, waarvoor NEWCOMB's waarde is aangenomen. De w. f. der knoopenbewegingen zijn berekend uit die der massa's (C). Voor de positie van den equator vind ik (betrokken op Leverrier's baanvlak van Jupiter van 1900.0):

$$\omega = 3.^\circ1153 \pm 0.^\circ0014$$
$$\theta = 315.803 \pm 0.025 \quad (1900 \text{ Jan. } 0.0)$$

Tafel I geeft de waargenomen correcties tot SOUILLART's theorie, de w. f. daarvan zooals die uit de bewerking van elke serie afzonderlijk zijn afgeleid, en de residus die na aanbrenging der gevonden correcties aan γ_i, θ_i, ω en θ overblijven.

De w. f. van de gewichtseenheid, uit de residus bepaald is:

$$\pm 0°.0097,$$

terwijl gewichten waren toegekend overeenkomend met eene w. f. voor de gewichtseenheid van:

$$\pm 0°.0100.$$

Vergelijkt men elk der 56 residus met de er naast staande w. f., dan vindt men de volgende verdeeling:

	werkelijk	*theoretisch*
kleiner dan ϱ	30½	28.0
tusschen ϱ en 2ϱ	16½	18.1
„ 2ϱ „ 3ϱ	6	7.5
grooter dan 3ϱ	3	2.4

Bedenkt men nu dat de correcties Δp_i en Δq_i telkens het resultaat zijn van een reeks waarnemingen, voor de verschillende epoques door verschillende waarnemers en met verschillende instrumenten uitgevoerd, en geheel onafhankelijk van elkaar bewerkt, dan is deze schoone overeenstemming der werkelijke verdeeling van de residus met de uit de foutenwet volgende zeker een sterk bewijs voor de groote mate van vrijheid der waarnemingen van systematische fouten. De waarschijnlijke fouten der gevonden hellingen en knoopen kunnen dus met gerustheid als een betrouwbare maatstaf voor de nauw-

keurigheid worden aangenomen. Hoeveel beter deze de waarnemingen bevredigen dan de in SOUILLART's theorie aangenomene, springt direct in het oog door de residus te vergelijken met de waargenomen correcties.

Voor 1750.0 vind ik nu:

	Sol. IX.	DELAMBRE	DAMOISEAU
θ_2	$264.^\circ7 \pm 13.^\circ2$	$283.^\circ3$	$282.^\circ0$
θ_3	335.2 ± 10.0	352.5	353.5
θ_4	109.1 ± 1.8	105.0	98.3

De overeenstemming met de waarden van DELAMBRE en DAMOISEAU is thans bevredigend. Neemt men voor de w. f. van θ_2 en θ_3 in 1750 aan $\pm 5°$, zooals ik ook in Cape XII. 3 (bladz. 111) deed, dan is de afwijking in beide gevallen nauwelijks grooter dan de som der waarschijnlijke fouten. Zooals reeds gezegd is, beschouw ik de aangegeven w. f. voor Sol. IX als een juiste maat voor de nauwkeurigheid. Maar dit blijft zij voor 1750 natuurlijk slechts onder de veronderstelling dat de theorie met behulp waarvan de elementen van 1900 op 1750 zijn overgedragen, juist is. Dit is echter niet zonder voorbehoud aan te nemen. Zooals bekend is, heeft SOUILLART de bewegings-vergelijkingen volgens twee verschillende methoden geïntegreerd. Voor de tweede satelliet bedraagt het verschil tusschen de beweging van den knoop in 150 jaren volgens de twee methoden ongeveer 1°.4. Het is derhalve volstrekt niet uitgesloten dat de in *beide* methoden verwaarloosde termen van hoogere orde in de massa's eveneens een zeer merkbaar bedrag bereiken. In den tijd van 150 jaren heeft θ_2 bijna vijf geheele omloopen volbracht, terwijl de beweging is afgeleid uit het tijdsinterval 1891—1904, waarin de knoop ongeveer 155° heeft afgelegd. Houdt men dit in het oog, dan is de overeenstemming tusschen de van 1900 tot 1750 teruggerekende waarden met de direct bepaalde zoo goed als met redelijkheid verwacht kon worden.

In Cape XII. 3. wees ik er op dat de soluties VI (uit moderne waarnemingen alleen) en VII (beweging van θ_2 uit vergelijking met DELAMBRE) zeer goed overeenstemden behalve voor de knoopenbewegingen en y_0. Ik sprak toen de verwachting uit dat de substitutie van betere massa's voor die van SOUILLART tot resultaat zou hebben de uitkomsten der beide soluties nader tot elkaar te brengen. Deze verwachting is geheel vervuld. Wat betreft de knoopenbewegingen (die in Sol. VIII en Sol. IX slechts zeer weinig verschillen) hebben wij juist gezien dat de overeenstemming met 1750 bevredigend is. Wat betreft y_0 toont de volgende vergelijking der verschillende solu-

ties, dat inderdaad het verschil tusschen Sol. VIII en IX veel kleiner is dan dat tusschen VI en VII, en nu niets meer te wenschen overlaat.

Waarden van y_0.

Sol. VI $+ 0°.0388 \pm °.0044$ Sol. VIII $+ 0°.0454 \pm °.0029$

Sol. VII $+ .0490 \pm 24$ Sol. IX $+ .0473 \pm 14.$

Voor de andere onbekenden is het verschil tusschen de oplossingen VIII en IX geheel te verwaarloozen. Naast de verbetering der massa's hebben vooral ook de reductie tot eenzelfde fundamentaalvlak, en de correcties door COOKSON aan de waarden voor 1901 en 1902 aangebracht een groot aandeel gehad in deze toenadering der beide soluties.

II. *Middelpunts-vergelijkingen.* De waarden der eigen excentriciteiten en perijovia zijn door mij afgeleid uit de heliometer-waarnemingen van 1891, 1901 en 1902, in *Gron. Publ.* 17, *Art.* 19. (Zie ook deze Verslagen, Juni 1907). De discussie werd daar uitgevoerd voor twee stellen coëfficienten τ_{ij}, met binnen de w. f. overeenstemmende resultaten. Het is dus niet noodig haar te herhalen met de bij de massa's (C) behoorende coëfficienten, die tusschen de daar gebruikte beide stellen in liggen. Boven zijn reeds de redenen opgegeven waarom de photographische bepalingen van 1902 verworpen moeten worden. De definitief geadopteerde waarden zijn derhalve, behoudens een enkele onbeduidende verandering, dezelfde als in *Gron. Publ.* 17, n.l.

$e_1 = 0°.0031 \pm °.0080 \quad \tilde{\omega}_1 = 155°.5 \pm \infty + \{0°.14703 \pm °.00144\}t$

$e_2 = 0\ .0172 \pm 40 \quad \tilde{\omega}_2 = 62\ .7 \pm 10°.0 + \{0\ .038955 = .000455\}t$

$e_3 = 0\ .0868 \pm 65 \quad \tilde{\omega}_3 = 338\ .3 \pm 3\ .0 + \{0.\ 007032 = .000180\}t$

$e_4 = 0\ .4264 \pm 20 \quad \tilde{\omega}_4 = 283\ .15 \pm 0\ .30 + \{0\ .001896 = .000021\}t$

De w. f. berusten op schattingen en zijn eerder te groot, dan te klein geschat. Voor de eerste satelliet zijn de waarden van e_1 en $\tilde{\omega}_1$ niet uit de waargenomen waarden van h_1 en k_1 afgeleid, maar uit de ongelijkheden van groep II, zooals bij de bespreking der libratie zal blijken. Als w.f. van e_1 is daarom de grootste waarde aangegeven, die nog geacht kan worden door de waargenomen h_1, k_1 niet onwaarschijdlijk gemaakt te worden. Daar deze grooter is dan de waarde van e_1 zelve, is de w.f. van $\tilde{\omega}_1$ niet aan te geven.

De opgegeven bewegingen zijn uit de massa's (C) berekend, en hunne w. f. zijn uit de w. f. dier massa's afgeleid.

Deze waarden van e_i en $\tilde{\omega}_i$, met de waarden van τ_{ij} die bij de massa's (C) behooren laten in de waarnemingen de residus over

die in Tafel II vermeld zijn, te zamen met de waargenomen correcties tot SOUILLART's theorie en hunne waarschijnlijke fouten. De residus zijn zeer bevredigend, vooral als de eerste satelliet buiten beschouwing wordt gelaten.[1])

Uit de waarden van $\tilde{\omega}_4$ in 1900, 1836 en 1750 is reeds in Gron. Publ. 17 de waarde van $\frac{d\tilde{\omega}_4}{dt}$ afgeleid. Deze behoeft echter eene kleine correctie. De waarden n.l. die BESSEL, en in navolging van hem SCHUR, opgeeft voor $E_4 \sin \Omega_4$ en $E_4 \cos \Omega_4$, d. i. voor h_4 en k_4 zijn in werkelijkheid die van $e_4 \sin \tilde{\omega}_4$ en $e_4 \cos \tilde{\omega}_4$. Dit was oorspronkelijk niet opgemerkt en moet dus nu veranderd worden.

Ik vind nu voor 1836

$$h_4 = -\,0°.704 \qquad k_4 = -\,0°.395.$$

Gebruikt men, evenals vroeger gedaan is, de definitief geadopteerde waarden van e_3, $\tilde{\omega}_3$ en τ_{43}, dan volgt hieruit

$$e_4 \sin \tilde{\omega}_4 = -\,0°.351 \quad e_4 \cos \tilde{\omega}_4 = -\,0°.208$$

$$\tilde{\omega}_4 = 239°.4 \pm 0°.8.$$

We hebben dus nu:

	$\tilde{\omega}_4$	*Residu*
1750.0	180°.4	+ 0°.1
1836.0	239. 4	0 .0
1900.0	283. 1	0 .0

waaruit:

$$\frac{d\tilde{\omega}_4}{dt} = 0°.001872 \pm 0°.000020 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

De waarschijnlijke fout uit de residus afgeleid zou veel kleiner zijn, en hetzelfde geldt voor de w.f. afgeleid uit de voor de enkele epoques opgegeven w.f. Vooral de dadelijk te vermelden mogelijkheid van systematische fouten bij BESSEL is aanleiding geweest voor de geschatte w.f. een betrekkelijk hooge waarde aan te nemen.

Door COOKSON werd reeds vroeger (Cape XII. 2. bladz. 197) uit de waarnemingen van 1836, 1879 (SCHUR) 1891, 1901. en 1902 afgeleid:

$$\frac{d\tilde{\omega}_4}{dt} = 0°.001892 \pm 0°.000024, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

wat binnen de w.f. met de hier gevonden waarde stemt. Vervangt men (α) door (β) dan kunnen dus de eindresultaten slechts binnen

[1]) Bij de berekening dezer residus zijn natuurlijk de lengtes der perijovia, evenals bij de berekening der waargenomen correcties, geteld van af het punt *O*.

TAFEL II. MIDDELPUNTSVERGELIJKINGEN.

Epoque	Waargen. correctie	w. f.	Residu	Waargen. correctie	w. f.	Residu	Waargen. correctie	w. f.	Residu	Waargen. correctie	w. f.	Residu
	h_1			h_2			h_3			h_4		
1891	+ 0°·031	± °·013	+ °·034	+ 0°.008	± °·008	+ °·001	+ 0°.060	± °·005	+ °·003	+0°·0617	± °·0026	+ °·0001
1901	+ ·091	± 28	+ 86	− ·015	± 19	+ 6	+ 007	± 14	+ 13	+ ·0653	± 51	− 108
1902	− ·008	± 34	− 41	− ·040	± 18	− 27	− ·022	± 11	− 13	+ ·0847	± 34	− 16
	k_1			k_2			k_3			k_4		
1891	− 0°·064	± °·021	− °·067	− 0°·055	± °·016	− °·005	− 0°·053	± °·008	+ °·003	+0°·0261	± °·0038	− °·0026
1901	− ·102	± 54	− 96	+ ·030	± 31	+ 1	− ·069	± 17	− 23	+ ·0390	± 59	+ 175
1902	− ·060	± 25	0	+ ·037	± 15	+ 4	− ·017	± 10	+ 28	+ ·0237	± 56	+ 35

hunne w.f. veranderd worden. Zij zouden dan geheel onafhankelijk zijn van eclipswaarnemingen.

De definitieve elementen geven voor de waarnemingen van BESSEL de volgende residus:

BESSEL 1836.0

	Waargenomen	*Residu*		*Waargenomen*	*Residu*
h_3	$-0°.033 \pm °.010$	$+°.008$	h_4	$-0°.704 \pm °.007$	$+°.028$
k_3	-0.188 ± 14	$+.020$	k_4	$-.395 \pm 9$	$+.026$

Hoewel dus $\tilde{\omega}_4$ zeer goed wordt voorgesteld vertoonen h_4 en k_4 groote afwijkingen. Het is verder opmerkelijk dat alle residus hetzelfde teeken hebben. Dit moet waarschijnlijk toegeschreven worden aan systematische fouten in de waarnemingen, die dan ook door SCHUR's discussie aangetoond zijn, en waarschijnlijk door zijne empirische correcties niet geheel geëlimineerd zijn.

De theoretische waarden van h_3 en k_3 zijn:

$$\tfrac{1}{2} h_3 = \tau_{31} e_1 \sin \tilde{\omega}_1 + \tau_{32} e_2 \sin \tilde{\omega}_2 + e_3 \sin \tilde{\omega}_3 + \tau_{34} e_4 \sin \tilde{\omega}_4$$

$$\tfrac{1}{2} k_3 = \tau_{31} e_1 \cos \tilde{\omega}_1 + \tau_{32} e_2 \cos \tilde{\omega}_2 + e_3 \cos \tilde{\omega}_3 + \tau_{34} e_4 \cos \tilde{\omega}_4.$$

De beide eerste termen zijn uiterst klein, $\tau_{34}\ e_4$ is echter groot, en deze term heeft LAPLACE gediend om de massa m_4, waarmede de coëfficient τ_{34} benaderd evenredig is, te bepalen. Een poging om τ_{34} af te leiden uit de vergelijking der middelpunts-vergelijkingen in 1836 en 1900 heeft, zooals de boven gegeven w. f. en residus reeds doen vermoeden, geen resultaat opgeleverd. Evenmin is eene vergelijking met 1750 uitvoerbaar, daar DELAMBRE en DAMOISEAU alleen de waarden der coëfficienten en der argumenten opgeven, en het niet mogelijk is hieruit tot de direct uit de waarnemingen afgeleide grootheden h_i en k_i op te klimmen. Ik heb er dus in moeten berusten de waarde van m_4 ongecorrigeerd te laten.

De waarden van $\tilde{\omega}_3$ en $\tilde{\omega}_4$ voor 1750, uit de definitieve waarden voor 1900.0 en de definitieve bewegingen berekend, zijn:

		DELAMBRE	DAMOISEAU
$\tilde{\omega}_3$	$313°.0 \pm 10°.3$	$309°.4$	$315°.0$
$\tilde{\omega}_4$	179.3 ± 1.2	180.3	180.4

De overeenstemming is zeer goed, en zelfs beter dan verwacht kon worden.

Sterrekunde. — De Heer J. C. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan *„Over de gemiddelde stersdichtheid op verschillenden afstand van het zonnestelsel."*

In de vergadering van 20 April 1901 werd behalve de z. g. *helderheidskromme* ook afgeleid de wet volgens welke de stersdichtheid, d. i. het aantal sterren per volume éénheid, afneemt als men zich verwijdert van het zonnestelsel [1]). Daarbij werd aangenomen, zooals ook nu zal gedaan worden, dat geen opslorping van licht plaats heeft in de ruimte. De aandacht werd er toen op gevestigd dat de helderheidskromme niet zeer merkbaar veranderd wordt als wij binnen aannemelijke grenzen de gegevens waaruit ze is afgeleid veranderen. Dat daarentegen de bepaling van de dichtheidsafname slecht zeer *voorloopig* is. Hare discussie werd uitgesteld tot een latere mededeeling, in welke nog andere gegevens van de waarneming dan die welke toen gebruikt werden, in rekening zouden kunnen worden gebracht (t. a. p. bladz. 731).

Die andere gegevens zijn in hoofdzaak : de totaal aantallen der sterren van verschillende grootte en hare gemiddelde parallaxen. Voor de eersten, de aantallen, heb ik onlangs (zie Publications of the Astr. Lab. at Groningen N°. 18) al het voor mij toegankelijk materiaal bewerkt en naar ik meen zeer betrouwbare uitkomsten verkregen voor de sterren helderder dan 11.5, tamelijk betrouwbare tot aan de 15e grootte toe. Ofschoon nu de gemiddelde parallaxen nog ontbreken, kan men toch reeds, uit de aantallen alleen, eene aanzienlijke verbetering der dichtheidsverdeeling, althans voor de grootere afstanden, afleiden. Eene zoodanige afleiding wordt in het volgende gegeven.

Eene afzonderlijke bepaling voor de verschillende galaktische breedten werd ook nu nog niet doorgevoerd, omdat het mij wenschelijk voorkomt, te gelijk daarmede, de al of niet houdbaarheid nader te onderzoeken van de hypothese welke aanneemt dat de helderheidskromme (mengingswet) in de verschillende deelen van het stelsel dezelfde is.

Reeds heb ik een vrij omvangrijk waarnemingsmateriaal voor dit doel verzameld, maar het zal toch nog eenigen tijd moeten duren eer dit onderzoek met vrucht zal kunnen worden ondernomen.

In hoofdzaak is het doel der volgende bepaling slechts het verkrijgen van een eerste denkbeeld omtrent de stersdichtheid, ook voor afstanden die bij het vroeger onderzoek niet rechtstreeks toegankelijk

---

[1]) Zie ook Publications of the Astr. Lab. at Groningen No. 11.

waren. De bepaling omvat ook wel de kleinere afstanden maar het zal nog nader vast te stellen zijn of voor deze al dan niet eene werkelijke verbetering is bereikt.

In *Astron. Journ.* N°. 566 heb ik analytische uitdrukkingen afgeleid, die de in bovengenoemde mededeeling gevonden getalwaarden bevredigend voorstellen.

Laat zijn :

$\delta = 2\,512\ldots = \dfrac{\textit{Schijnb. held. van een ster van de mag } m}{\text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad m+1}$ ($log.\ \delta = 0.4$)

ϱ = afstand tot zon ($\varrho = 1$ voor parallax = 0″1)

N_m = aantal sterren aan den geheelen hemel tusschen de schijnbare grootten $m - \frac{1}{2}$ en $m + \frac{1}{2}$

$\Delta(\varrho)$ = stersdichtheid = aantal sterren per éénheid van volume op afstand ϱ (éénheid van volume = kubus waarvan de zijde een lengte heeft correspondeerend met een parallax van 0″1)

h_m = Schijnbare helderheid van een ster van de grootte m ($h_{5.5} = 1$)

L = absolute helderheid = totaal hoeveelheid uitgestraald licht ($L = 1$ voor de zon)

$\varphi(L)\,dL$ = waarschijnlijkheid dat de absolute helderheid van een ster ligt tusschen de grenzen L en $L + dL$

$\psi(L) = \int_{\frac{L}{\sqrt{\delta}}}^{L\sqrt{\delta}} \varphi(z)\,dz$ = waarschijnlijkheid dat de absolute helderheid ligt tusschen de grenzen $L \pm \frac{1}{2}$ magnitude.

Als we nu aannemen, dat $\varphi(L)$ onafhankelijk is van den afstand ϱ, zoo zal :

$$N_m = 4\pi \int_0^\infty \varrho^4\,\Delta(\varrho)\,d\varrho \int_{\frac{h_m}{\sqrt{\delta}}}^{h_m\sqrt{\delta}} \varphi(h\varrho^2)\,d\varrho = 4\pi \int_0^\infty \varrho^2\,\Delta(\varrho)\,\psi(h_m\varrho^2)\,d\varrho \quad (1)$$

De in Astron. Journ. No. 566 afgeleide analytische uitdrukkingen zijn dan :

$$\psi(L) = \frac{\alpha^2 \,.\, mod.}{\sqrt{\pi}\,L}\, e^{-\alpha^2\,[\log L - T]^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\frac{\Delta(\varrho)}{\Delta(o)} = e^{-\beta\varrho} + \beta\varrho\, e^{-\gamma\varrho^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waarin

$$\left.\begin{aligned} T &= 1.400 \\ \alpha^2 &= 0.385 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\Delta\,(0) = 111.0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \beta &= 0.0220 \\ \gamma &= 0.0052 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

In het verder deel van genoemd opstel werd, uit de *aantallen* sterren door Pickering bepaald, afgeleid de nieuwe waarde

$$\Delta(o) = 136.9 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Het verschil met de bepaling (5) verklaart zich geheel uit het constant verschil tusschen de photometrische schaal van Potsdam die bij de bepaling (5) ten grondslag ligt en die van Harvard, welke bij de bepaling (7) gebruikt werd.

In de hier volgende afleiding zijn de stersgrootten eveneens op de Harvardschaal herleid. Ik heb nu de helderheids-kromme (2), waarin de constanten de waarde (4) hebben, onveranderd aangenomen, in de plaats echter van de dichtheidscurve (3), uit de totaal aantallen der sterren van verschillende schijnbare grootte, een nieuwe bepaling der dichtheids verdeeling afgeleid; m. a. w. ik heb met behulp van de formule (1) uit de *gegeven* N_m ($m = 2$ tot 15) en de gegeven ψ, de Δ als functie van ϱ afgeleid.

De invoering der analytische functies (2) en (3) heeft het voordeel de berekeningen veel gemakkelijker te maken. Men heeft echter natuurlijk in het oog te houden dat zij slechts vertrouwen verdienen voor het gebied waarover zich ook de waarnemingsgegevens uitstrekken. — Voor de helderheids-kromme kan, behalve voor de sterren van de zeer heldere schijnbare grootteklassen, het onbeperkt gebruik der formule niet licht tot merkbare fouten aanleiding geven omdat extrapolatie niet of slechts in geringe mate noodig is. Voor de dichtheidscurve daarentegen, die zooals reeds gezegd is op zich zelf niet zeer nauwkeurig bepaald werd, zullen de waarden gegeven door de formule, voor waarden boven $\varrho = 60$ geheel als *extrapolatie* te beschouwen zijn. — Het zal uit het volgende blijken dat de waarden vroeger voor de dichtheid gevonden, om in overeenstemming te komen met de uitkomsten van het nu gebruikte materiaal, voor afstanden kleiner dan 60, niet meer veranderd behoeven te worden dan vereenigbaar schijnt met hare onzekerheid, maar dat de door formule (3) voor $\varrho > 60$ *geextrapoleerde* waarden *véél* te klein zijn, zoozeer dat voor deze de formule (3) geheel ontoereikend is.

Ik ben begonnen met na te gaan hoe formule (3), met de waarden (6) en (7) der constanten, de N_m gevonden in Publ. 18 voorstelt. Van de daarbij voorkomende integralen is voor waarden van m

tusschen 0 en 11, een tafeltje gegeven in Astron. Journ. N°. 566 (tab. III)[1]). Voor $m = 14$ werden de waarden nu nog berekend. De uitkomst is als volgt:

m	Waarn. (Publ. 18)	Rek. I. (naar Form. (3))	Rek. II.	
4.5 tot 5.5	1 848	1 897	1 788	
6.5 „ 7.5	17 940	18 420	18 650	
8.5 „ 9.5	159 200	140 200	169 500	. . (8)
10.5 „ 11.5	1 275 000	808 200	1 335 000	
13.5 „ 14.5	23 680 000	6 500 000	20 800 000	

De afwijking neemt zeer sterk toe met de zwakte der sterren en is voor de grootte 14 buitensporig. Men besluit hieruit terstond dat voor de grootere afstanden de formule (3) de stersdichtheid veel te gering geeft. Berekening deed zien dat reeds een tamelijke overeenstemming bereikt wordt als het totaal aantal sterren tusschen $\rho = 140$ en $\rho = \infty$, 21 maal grooter werd genomen dan het door formule (3) wordt gevonden. Aangezien het dus duidelijk werd dat formule (3), voor groote waarden van ρ, onbruikbaar is, heb ik allereerst wel die formule behouden voor waarden van ρ kleiner dan 70, maar van af de waarde $\Delta = 0.214$ die men daardoor voor $\rho = 70$ verkrijgt, de dichtheid lineair laten afnemen.

Het bleek gemakkelijk dat, als men die afname zoodanig kiest dat de dichtheid verdwijnt bij $\rho = 557$, men reeds aanzienlijk nader bij de waarheid komt, althans als men neemt:

$$\Delta_0 = 125.$$

De aldus verkregen waarden zijn boven als Rek. II gegeven.

Ik heb nu als verdere benadering ook nog verbeteringen gezocht voor de stersdichtheid bij afstanden kleiner dan 70. Het bleek daarbij dat de uitkomsten bevredigender worden als men de lineaire afname der dichtheden reeds wat vroeger dan bij $\rho = 70$ laat beginnen.

Dit wetende heb ik de benaderingen langs dezen weg niet verder

[1]) In de berekening van de aldaar gegeven waarden van T_1 en T_3 is een vergissing ontdekt:

	T_1			T_3			
Voor $m =$ 8.0,	inplaats van	9.12	lees 9.13				
4.0	„ „	12.69	„ 12.71				
8.0	„ „	17.04	„ 17.10				
6.0	„ „	21.86	„ 21.99				
7.0	„ „	26.68	„ 26.88				
8.0	„ „	30.54	„ 30.96				
9.0	„ „	32.80	„ 33.42	Inplaats van	1.71	lees	1.72
10.0	„ „	32.84	„ 33.64	„ „	1 37	„	1.38
11.0	„ „	30.54	„ 31.51	„ „	1.04	„	1.05

voortgezet maar heb ik de formule (3) geheel losgelaten en de helderheidskromme in eens trachten te bepalen door aan te nemen dat voor de intervallen van $\varrho = 0$ tot $\varrho = 10$; $\varrho = 10$ tot $\varrho = 30$; $\varrho = 30$ tot 50; $\varrho = 50$ tot $\varrho = g$, de dichtheid lineair verloopt en wel zoodanig dat voor $\varrho = g$ deze dichtheid verdwijnt. Op deze wijze wordt het vraagstuk herleid tot het vinden van de 5 onbekenden:

$$\Delta(0) \; ; \; \Delta(10) \; ; \; \Delta(30) \; ; \; \Delta(50) \; ; \; g.$$

Om redenen aangegeven in het boven aangehaalde opstel van 1901, moet men aannemen dat $\frac{\partial \Delta}{\partial \varrho}$ verdwijnt voor $\varrho = 0$. Dientengevolge kan $\Delta(10)$ stellig nog maar weinig verschillen van $\Delta(0)$ en om het aantal onbekenden zoo gering mogelijk te maken, heb ik daarom, in overeenstemming met vroeger, genomen:

$$\Delta(10) = 0.97\, \Delta(0) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Het aantal onbekenden daalt daardoor tot 4.

Stelt men nog

$$\frac{\Delta(\varrho)}{\Delta(0)} = D_\varrho \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

zoo heeft men

$$D_\varrho = A_\varrho + B \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

waarin A en B voor de verschillende intervallen de navolgende waarden hebben:

	A	B
$\varrho =$ 0 *tot* 10	$\frac{1}{10} D_{10} - \frac{1}{10}$	1. —
10 „ 30	$\frac{1}{20} D_{30} - \frac{1}{20} D_{10}$	$\frac{3}{2} D_{10} - \frac{1}{2} D_{30}$
30 „ 50	$\frac{1}{20} D_{50} - \frac{1}{20} D_{30}$	$\frac{5}{2} D_{30} - \frac{3}{2} D_{50}$
50 „ g	$-\frac{1}{g-50} D_{50}$	$\frac{g}{g-50} D_{50}$

. . (12)

De voordeelen van den zoo gekozen vorm zijn, dat de uitdrukking (1) van N_m nu herleidbaar wordt tot de bekende integraal

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2} dx \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

zoodat numerische integratie wordt vermeden en verder dat men betrekkingen krijgt die lineair zijn, althans wat de onbekenden

D_{ss}, D_{ss} en $\frac{1}{\Delta(0)}$ betreft. Voor het gemak der berekening zijn dit niet te versmaden voordeelen.

Noemt men $(N_m)_0^\rho$ het aantal sterren van de schijnbare grootte $m - \frac{1}{2}$ tot $m + \frac{1}{2}$, dat zich bevindt tusschen de afstanden 0 en ρ van het zonnestelsel, zoo vind ik, door invoering van (2) (10) (11) in (1)

$$(N_m)_0^\rho = [G\,A + H\,B]\,\Delta_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

waarin $\mu = mod.$ der Nep-Log.

$$G = \frac{2\pi\alpha}{h_m} e^{-\frac{0.4\,m - 2.20 + T}{\mu} + \frac{1}{4\alpha^2\mu^2}} \Theta\left[\alpha(2.20 - T - 0.4m + 2log\rho) - \frac{1}{2\alpha\mu}\right] \quad (13)$$

$$H = \frac{2\pi\alpha}{h_m} e^{-\frac{0.4\,m - 2.20 + T}{2\mu} + \frac{1}{16\alpha^2\mu^2}} \Theta\left[\alpha(2.20 - T - 0.4m + 2log\rho) - \frac{1}{4\alpha\mu}\right] \quad (14)$$

en

$$log\ h_m = 2.20 - 0.4\,m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Zoodra men de $(N_m)_0^\rho$ kent, vindt men de $(N_m)_{\rho_1}^{\rho_2}$ door eenvoudige aftrekking.

Ik heb de oplossing doorgevoerd met de waarden 400, 600, 800 en 1000 voor g. Het bleek daarbij dat eerst deze laatste waarde tot bevredigende uitkomsten leidt.

Het schijnt overbodig al deze rekeningen mede te deelen. Ik zal slechts eenige getalwaarden mededeelen verkregen voor de ten slotte aangenomen waarde

$$g = 1000 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

en voor de schijnbare grootten 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Voor de G en de H werden de volgende waarden gevonden. (zie tabel p. 606).

Neemt men nu voor de aantallen sterren der grootte 2, 3, 4, 5, de getallen door PICKERING rechtstreeks voor den geheelen hemel gevonden n.l. resp. 58, 172, 577, 1848 [1]) en voor de overige grootten de aantallen welke men uit tafel 2 der Groningsche Publicatie No. 18 afleidt voor het geheel van den hemel d. i. voor 41 253 vierkante

---

[1]) In Publ. 18. blz. 8 vond ik door tellingen op PICKERINGS materiaal

$$N_{1.495}^{2.495} = 58;\ N_{2.495}^{3.495} = 171;\ N_{3.495}^{4.495} = 574;\ N_{4.495}^{5.495} = 1837.$$

Met behulp der in die zelfde publicatie gegeven berekende waarden leidt men daaruit gemakkelijk de waarden van $N_{1.5}^{2.5}$ enz. af. Men vindt de getallen aangegeven in den text.

TAFEL I.

	G.				H.			
	$\rho = 10$	30	50	1000	$\rho = 10$	30	50	1000
$m = 2$	0.9341	2.365	3.105	4.834	0.2463	0.3302	0.3496	0.3670
3	3.406	10.75	15.39	30.29	0.7842	1.203	1.324	1.461
4	11.22	44.74	70.58	188.1	2.314	4.179	4.847	5.813
5	33.29	169.5	296.8	1151.	6 275	13.66	16.94	23.12
7	210.9	1795.	3937.	39430.	34.79	116.5	171.0	361.9
9	850.9	12380.	34570.	1107000.	128.0	696.0	1254.	5425.
11	2163.	54580.	195700.	23250000.	304.6	2778.	6288.	72510.
13	3436.	151700.	703600.	340600000.	460.9	7203.	20780.	784150.
15	3387.	264000.	1589000.	3329000000.	438.6	11900.	44120.	6275000.

graden, zoo vindt men als voorwaarde vergelijkingen voor de afleiding der onbekenden Δ_0, D_{30}, D_{50}, vergelijkingen als deze:

$$58\frac{1}{\Delta_0} = 0.2962 + 0\ 0411\ D_{30} + 0\ 0244\ D_{50}$$

enz. welke geschikter vorm krijgen als men stelt $\frac{140}{\Delta} = Z$ en dan al de vergelijkingen deelt door den coefficiënt van Z. In dezen vorm worden de voorwaarde vergelijkingen als volgt:

$$\left.\begin{array}{llll}
(m=2) & 0.099\,D_{30} & +0.059\,D_{50} & -Z = 0.715 \\
(m=3) & 0.186 & +0\ 146 & -Z = 0.836 \\
(m=4) & 0.272 & +0.287 & -Z = 0\ 817 \\
(m=5) & 0.375 & +0.534 & -Z = 0.781 \\
(m=7) & 0.527 & +1.474 & -Z = 0.595 \\
(m=9) & 0.508 & +3.108 & -Z = 0.345 \\
(m=11) & 0.341 & +5.187 & -Z = 0.149 \\
(m=13) & 0.159 & +6.926 & -Z = 0.047 \\
(m=15) & 0.050 & +7.148 & -Z = 0.010
\end{array}\right\} \quad . \quad (17)$$

In de oplossing dezer vergelijkingen heb ik die, welke betrekking hebben op de grootten 2 en 3, verwaarloosd. De reden daarvan ligt hierin dat bij deze reeds sterren met zoo groote absolute helderheid hun invloed beginnen te doen gevoelen, dat daarvoor *extrapolatie* buiten het rechtstreeks bepaalde deel der helderheidskromme noodig wordt.

Uit deze sterren is dus eerder een bijdrage te verkrijgen voor de verbetering van deze helderheidskromme aan haar helderste uiteinde.

De overblijvende vergelijkingen heb ik in drie vergelijkingen samengetrokken door de vergelijkingen voor $m = 4$ en 5; die van 7, 9, 11 en die voor 13 en 15, bijeen te voegen. Daarna oplossende vind ik

$$\left.\begin{array}{l}
Z = 1.002 \quad \text{en dus } \Delta_0 = 139.7 \\
D_{30} = 0.460 \\
D_{50} = 0.1315
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

terwijl boven reeds werd aangenomen

$$D_{10} = 0\ 970 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Berekent men hiermêe de aantallen N_m, interpoleert daartusschen die voor $m = 6$, 8, 10, 12, 14, zoo verkrijgt men de volgende vergelijking tusschen theorie en waarneming:

TAFEL II. TOTAAL AANTALLEN STERREN.

m	Waarn.	Rek.	$W-R$ in fractie van waargen. aantal
2	58	44 5	+ 0.233
3	172	161 5	+ 0.061
4	577	564 3	+ 0.022
5	1 848	1 889	— 0.022
6	5 816	6 025	— 0.036
7	17 940	18 450	— 0.028
8	54 040	54 580	— 0.010
9	159 200	157 200	+ 0.013
10	457 900	448 000	+ 0.022
11	1 275 000	1 256 000	+ 0.015
12	3 453 000	3 490 000	— 0.011
13	9 157 000	9 419 000	— 0.028
14	23 680 000	24 100 000	— 0.018
15	60 225 000	58 500 000	+ 0.029

Behalve voor de reeds besproken allerhelderste grootten zijn de afwijkingen stellig beneden de onzekerheden in de bepalingen der aantallen sterren. Het eenigszins onregelmatig verloop der aantallen is wel te wijten aan de discontinuiteiten in de ten slotte aangenomen dichtheidskromme.

Het volgende tafeltje moge dienen om althans eenig inzicht te verkrijgen in de verdeeling der sterren van bepaalde grootte over de verschillende afstanden.

TAFEL III. AANTALLEN STERREN $(N_m)_{\rho_1}^{\rho_2}$

ρ	$m=3$	5	7	9	11	13	15
0 tot 10	108.	863	4770	17 500	42 000	63 000	60 000
10 » 30	45.5	779	8340	56 100	236 000	625 000	1 030 000
30 » 50	5.5	145	2350	23 400	144 000	543 000	1 250 000
50 » 100	2.5	103	3000	59 900	835 000	8 188 000	56 150 000

of uitgedrukt in deelen van de totalen :

TAFEL IV.

	3	5	7	9	11	13	15
0 tot 10	0.669	0.457	0.259	0.112	0.033	0.007	0.001
10 » 30	.282	.412	.452	.357	.188	.066	.018
30 » 50	.034	.077	.127	.150	.115	.058	.021
50 » 100	.015	.054	.162	.382	.665	.870	.960

Resumeerende, vinden wij, dat de totaal aantallen sterren van verschillende grootten (Harvardschaal) zooals die gevonden worden in *Publications of the Groningen Laboratory No.* 18, als wij voor de helderheidskromme aannemen den vorm (2) met de waarden (4) der constanten, door de volgende waarden voor de gemiddelde stersdichtheid goed worden voorgesteld.

TAFEL V. STERSDICHTHEID.

ρ	Δ	ρ	Δ
0	$1.000\Delta_0$	100	$0.125\Delta_0$
10	0.970	200	0.111
20	0.715	300	0.097
30	0.460	400	0.083
40	0.296	500	0.069
50	0.131	600	0.055
60	0.130	700	0.042
70	0.129	800	0.028
80	0.127	900	0.014
90	0.126	1000	0.000

waarin $\Delta_0 = 139.7$.

Het zou interessant zijn na te gaan welke veranderingen men aan deze waarden kan aanbrengen zonder dat zij ophouden de aantallen goed voor te stellen. Ik heb dit onderzoek nog uitgesteld omdat het goed zal zijn daarbij te gelijk alle andere gegevens te laten medespreken.

Natuurkunde. — De Heer P. ZEEMAN biedt eene mededeeling aan: *„Nieuwe waarnemingen over asymmetrisch door magnetisme gesplitste tripletten".*

Asymmetrie onderzocht met de methode van FABRY *en* PEROT.

1. In het tweede gedeelte mijner mededeeling „over magnetische splitsing der spectraallijnen en veldsterkte" heb ik [1]) door middel van eene methode, welke ik die van het niet-homogene veld heb genoemd, de asymmetrie onderzocht, welke volgens VOIGT's theoretische voorspelling [2]) bij tripletten zich kan voordoen.

Reeds een blik op Plaat II mijner bovengenoemde verhandeling laat VOIGT's uitkomst, dat van een triplet de naar rood verschoven component een weinig dichter bij de middellijn moet liggen dan de naar violet verschoven, door de waarneming bevestigd schijnen.

Ten einde echter allen twijfel aan de juistheid van het experimenteele resultaat uit te sluiten, scheen het mij wenschelijk langs een weg onafhankelijk van ROWLAND's methode het onderzoek voort te zetten.

Met de halfverzilverde parallelle platen van FABRY en PEROT gelukt het de splitsing der spectraallijnen in het magnetische veld waar te nemen [3]).

Bezigt men dien vorm van toestel, waarbij de afstand der verzilverde platen constant blijft, de étalon, dan kan men nog twee wegen inslaan om de golflengte der oorspronkelijke lijn te vergelijken met die der componenten, welke door het magnetische veld ontstaan.

Vooreerst kan men bij een gekozen veldsterkte de middellijnen der interferentie ringen meten. Combineert men dan metingen over ringen welke uit eenzelfden ring ontstaan zijn met die betreffende de oorspronkelijke lijn, dan is, zooals ik in mijne vorige mededeeling opmerkte, de berekening uiterst eenvoudig, daar zelfs eene kennis van de waarde van het ordegetal der ringen onnoodig blijkt.

2. Men kan echter ook van de coincidentie-methode gebruik maken en de magnetische kracht zoodanig regelen, dat een ring, welke zich bij het aangroeien der magnetische intensiteit uitzet, coïncideert met een ring die dan zich samentrekt.

---

[1]) ZEEMAN. Verslagen Akademie 30 November 1907.

[2]) VOIGT. Ann. d. Phys. 1. p. 376. 1900, zie ook de nieuwste mededeeling van VOIGT. Physik. Zeitschrift 9. p. 122. 1908.

[3]) ZEEMAN. Verslagen Akademie. 28 December 1907.

Bij die coïncidentie vallen dan de ringen welke aan een component naar den kant van het rood beantwoorden, samen met die, welke van een component naar den kant van het violet afkomstig zijn. De intensiteit der coïncideerende ringen is dan slechts weinig minder dan die der oorspronkelijke, wat voor de nauwkeurigheid der metingen bevorderlijk schijnt.

Noemt men λ_0 de golflengte van de middelste component van het triplet, λ_r die van de component naar den kant van het rood, λ_v die van de component naar den kant van het violet dan kan men de berekening, zonder de waarde van de ordegetallen der ringen te kennen, uitvoeren, door als volgt te werk te gaan.

In het algemeen is als met P_0, P_r, P_v de ordegetallen van ringen, met de diameters x_0, x_r, x_v (in hoekmaat uitgedrukt), worden aangeduid:

$$\lambda_r = \lambda_0 \frac{P_0}{P_r}\left(1 + \frac{x_0^2}{8} - \frac{x_r^2}{8}\right)$$

$$\lambda_v = \lambda_0 \frac{P_0}{P_v}\left(1 + \frac{x_0^2}{8} - \frac{x_v^2}{8}\right).$$

Bij toenemende magnetische kracht zal een inkrimpende ring aan λ_r beantwoorden, een zich uitzettende aan λ_v. Gelijk ik vroeger aangaf kan bij de splitsing in het magnetische veld $P_0 = P_r$ of $P_0 = P_v$ genomen worden, indien maar de ringen λ_r en λ_v uit een ring λ_0 ontstaan.

Bij de coïncidentiemethode handelt men dus het eenvoudigste door den ring, die door coïncidentie is ontstaan, te beschouwen eenmaal als een ring λ_v afkomstig van een kleineren ring λ_0, en een ander maal als een ring λ_r afkomstig van een grooteren ring λ_0.

Door drie ringen te meten nl. dien, waarin de ringen voor λ_r en λ_v zijn samengevallen (diameter $x_c = x_r = x_v$), verder den grooteren ring met den diameter x_0 en eindelijk den kleineren met den diameter x'_0, vindt men dan de uitkomst door de eenvoudige formules:

$$\lambda_r = \lambda_0\left(1 + \frac{x_0^2}{8} - \frac{x_c^2}{8}\right)$$

en

$$\lambda_v = \lambda_0\left(1 + \frac{x_0'^2}{8} - \frac{x_c^2}{8}\right).$$

3. Volgens de coïncidentie-methode heb ik met een étalon, waarbij de afstand der verzilverde platen 5 m.m. bedraagt, waarnemingen over de splitsing der gele kwikzilverlijnen 5791 en 5770 verricht.

Het ringsysteem werd gevormd in het focale vlak van eene kleine

achromatische lens van 18 m.m. middellijn en 12 cm. hoofdbrandpuntsafstand. Dit focale vlak viel nauwkeurig samen met het vlak van de spleet van een spectroscoop met 1 prisma. De spleet daarvan werd zoo nauw gemaakt dat de ringen van de beide gele kwiklijnen afzonderlijk konden worden waargenomen. Op de plaat zijn reproducties gegeven van negatieven, opgenomen, ten eerste zonder veld; ten tweede bij de eerste coïncidentie (samenvallen van de ringen voor λ_r en λ_v); ten derde bij de tweede coïncidentie, waarbij dus de ringen λ_r en λ_v met λ_0 samenvallen. Op de plaat is dit samenvallen ondersteld voor 5770, intusschen kan men op de negatieven nauwelijks een verschil zien, indien voor 5791 de coïncidentie bedoeld ware.

Door uitmeting van een 6-tal negatieven betreffende de eerste coïncidentie volgt, dat eene splitsing van 0.166 Angström-eenheden bij de lijn 5770 correspondeerde met eene splitsing bij de lijn 5791 naar rood van 0,160 A. E., naar violet van 0.177 A. E.

Nu beantwoordt eene splitsing van 0.166 A. E., volgens de gegevens genoemd in § 6 mijner sub [1]) hierboven in § 1 geciteerde mededeeling, aan eene veldsterkte van 9130 Gauss.

Beschouwt men de asymmetrie als de grootheid die men bepalen wil, dan volgt daarvoor uit de medegedeelde getallen 0.017 A. E. Uit eene discussie der te vreezen systematische waarnemingsfouten volgt dat de waarden 0.015 A. E. en 0.019 A. E. zeer goed mogelijk, de waarden 0.011 A. E. en 0.023 A. E. echter reeds zeer onwaarschijnlijk zijn.

Enkele metingen verricht met de methode der diameters wijzen er op, dat de nauwkeurigheid van uitkomsten daarmee verkregen wel iets grooter zou zijn dan die welke nu werd gevonden.

Intusschen komt de verkregen nauwkeurigheid op voortreffelijke wijze overeen met die welke door FABRY en PEROT in een geval als het onze wordt mogelijk geacht. [1])

Door onze proeven met de methode der verzilverde platen blijkt echter ondubbelzinnig tweeerlei, n.l. ten eerste dat de vroeger met ROWLAND's methode gevonden positieve resultaten over asymmetrische splitsing eene reëele beteekenis hebben, ten tweede dat ook in zwakke velden die asymmetrie blijft bestaan en een bedrag heeft hetwelk men, indien er ten naastenbij evenredigheid tusschen veldsterkte en de waarde der asymmetrie bestaat, zou verwachten.

Bepaling van de totale lading der electronen.

4. Neemt men het bestaan en het wezen der asymmetrische

[1]) FABRY et PEROT. Ann. de Chim. et de Phys. Janvier 1902.

splitsing als overeenkomstig de theorie van VOIGT als bewezen aan, dan is het zeker interessant de verkregen uitkomst in de taal der electronentheorie over te brengen.

LORENTZ [1]) heeft de vergelijkingen van VOIGT uit de electronentheorie afgeleid, of beter gezegd een systeem van vergelijkingen afgeleid die op hetzelfde neerkomen als die welke VOIGT bezigt. Noemt men H de intensiteit van het magnetische veld, λ de golflengte, $\delta\lambda_1$ en $\delta\lambda_2$ de verschillen in golflengte tusschen de middelste component en die naar violet en rood, V de lichtsnelheid in den aether, en $\frac{e}{m}$ de bekende verhouding tusschen lading en massa dan is volgens LORENTZ:

$$\frac{e}{m} = \frac{4\pi V}{H\lambda^2}\sqrt{\delta\lambda_1 . \delta\lambda_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Voor $\delta\lambda_1 = \delta\lambda_2$ gaat deze formule over in de bekende betrekking, waaruit $\frac{e}{m}$ voor het eerst bepaald werd. Hierbij wordt de verhouding $\frac{e}{m}$ in electro-magnetische eenheden gevonden.

Noemt men N het aantal molekulen in de volume-eenheid, dan volgt volgens LORENTZ verder .

$$Ne = \frac{H}{2\lambda V}\frac{\delta\lambda_1 - \delta\lambda_2}{\sqrt{\delta\lambda_1 . \delta\lambda_2}} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

welke formules door GEHRCKE en VON BAEYER [2]) reeds zijn medegedeeld.

Indien men mijne waarnemingen over de asymmetrie (§ 5 mijner vroegere verhandeling daarover [3]) en § 3 boven) hiervoor wil bezigen dan valt dadelijk eene moeielijkheid op. Daar ik gevonden heb, dat de asymmetrie met de veldsterkte verandert, zoo volgt uit (2) dat Ne dit evenzeer moet doen, omdat H en $\sqrt{\delta\lambda_1 . \delta\lambda_2}$ bijna evenredig zullen veranderen.

Eene toename van Ne, dus van het aantal lichtende deeltjes per volume-eenheid, zal zich echter in de lichtsterkte in de vacuumbuis moeten openbaren. Dit is nu, zooals uit Plaat II (verhandeling sub [3]) blijkt, inderdaad het geval geweest. Wij moeten dus besluiten, dat de omstandigheden van den lichtenden kwikdamp in de Geissler'sche buis niet overal dezelfde waren, terwijl hij zich in het niet-homogene magneetveld bevond.

---

[1]) LORENTZ. Rapports présentés au congrès international de physique 1900.

[2]) GEHRCKE u. v. BAEYER. Verhandl. deutsch. physik. Gesellsch. 7. p. 401. 1906.

[3]) ZEEMAN. Verslagen Akademie 30 November 1907.

Het schijnt dan ook zeer goed mogelijk, met Prof. VOIGT aan te nemen [1]), dat de verandering van het bedrag der asymmetrie toe te schrijven is aan de andere omstandigheden waarin de lichtende damp zich bevond.

5. Ik wil thans de uitkomsten meedeelen, waartoe de berekening volgens (1) en (2) van mijne waarnemingen over lijn 5791 voert.

KWIKLIJN 5791.

$\frac{e}{m}$	Ne	Gemiddelde splitsing 5770	H
1.92×10^7	8.10×10^{-4}	0.532 A. E.	29220
1.92	6.24	0.440 „	24140
1.90	5.97	0.399 „	21910
1.87	5.03	0.328 „	18020
1.87	4.33	0.270 „	14800
(2.07	4.58	0.166 „	9130)

Door deeling van de getallen in de tweede kolom door die van de eerste vindt men dat $4 \cdot 10^{-11}$ tot 1.10^{-11} gram per cm³ aan de beweging deelneemt. Neemt men voor e de waarde $1{,}1.10^{-20}$ electromagnetische eenheden, volgens J. J. THOMSON, dan kan men het aantal N vinden. Het aantal electronen in de volume-eenheid dat de straling van de kwik-lijn 5791 in eene Geisslersche buis veroorzaakt, blijkt dan naar gelang der magnetische kracht tusschen 8.10^{16} en 4.10^{16} per cm³ te liggen.

Indien men in aanmerking neemt dat de temperatuur van de vacuumbuis bij deze proeven te schatten is op 100° à 120°, beantwoordende volgens HERTZ aan drukken van den kwikdamp van 0.29 resp. 0.78 m.m. dan komt men tot de conclusie dat het aantal der electronen, dat aan de emissie voor lijn 5791 deelneemt van dezelfde orde van grootte is als het aantal der aanwezige atomen.

Dit resultaat kan natuurlijk zeer goed worden aanvaard en men zou het zelfs voor de hand liggend kunnen noemen, dat alle atomen gelijktijdig aan de lichtemissie deelnemen. Intusschen is het toch van belang met dit resultaat de uitkomsten te vergelijken, verkregen in het Amsterdamsche laboratorium door HALLO in zijn onderzoek over

[1]) VOIGT. Physik. Zeitschr. 9. S. 120. 1908.

Stof	Golflengte (λ)	Splitsing in mm. [— naar violet, + „ rood]	Intensiteit
Wolframium	2488.89	— .1474	4
		0	3
		+ .1155	4
	2522.14	— .1458	3
		0	2
		+ .1172	3
	2555.23	— .1524	3
		0	2
		+ .1140	3
	2580.63	— .1281	3
		0	2
		+ .1012	3
	2606.50	— .1487	3
		0	2
		+ .1553	3
	2633.24	— .1353	3
		0	1
		+ .1010	3
	2697.81	— .1695	5
		0	3
		+ .1498	5
	2774.12	— .1769	4
		0	2
		+ .1332	4
	2774.60	— .1530	4
		0	2
		+ .1364	4
	2792.85	— .1720 } 889	2
		— .0831 }	2
		0	2
		+ .0828 } 759	2
		+ .1586 }	2

Stof	Golflengte (λ)	Splitsing in mm [— naar violet, + „ rood]	Intensiteit
Wolframium	2856.20	— .1559	3
		0	1
		+ .1375	3
	3049.80	— .2892	6
		0	2
		+ .2519	6
	3311.53	— .1590	8
		0	10
		+ .1814	8
	3361.25	— .1239	3
		0	4
		+ .1394	3
	*3373.88	— .0780	6
		0	6
		+ .0923	4
	*3413.09	— .0844	6
		0	6
		+ .1080	6
	*3429.79	— .0687	6
		0	6
		+ .0837	3
	3448.96	— .0770	3
		0	3
		+ .0879	1
	4022.27	— .2324	3
		0	8
		+ .2032	3
	4298.55	— .5339	1
		— .1235	2
		0	2
		+ .1242	2
		+ .4561	1
Molybdeen	2672.93	— .2224	10
		0	5
		+ .1674	10

Schaduw aan violetkant van component n. violet maar geen andere lijnen die component kunnen geven

de magnetische draaiing van het polarisatievlak in natriumdamp[1])

[1]) Hallo. Dissertatie, Amsterdam 1902. Arch. Néerl. (2) T. 10 p. 148. 1905.

en door GEEST over de magnetische dubbele breking in dezelfde stof[1]) en met eene der uitkomsten van JEAN BECQUEREL in zijne merkwaardige proeven[2]) over het gedrag van tysoniet en andere kristallen bij lage temperaturen en in een magnetisch veld.

Deze natuurkundigen komen tot het resultaat, dat in de door hen onderzochten stoffen op een bepaald oogenblik slechts een klein gedeelte der atomen aan de emissie of absorptie deelnemen.

Er is natuurlijk niet het minste bezwaar tegen, aan te nemen dat in eene Geisslersche buis de omstandigheden andere zijn en dat in een vacuumbuis het aantal op een bepaald oogenblik trillende atomen nu eens heel groot zal zijn.

Asymmetrieën bij Wolframium en molybdeen. Waarnemingen van Mr. JACK.

6. Niet alleen de lijnen van kwikzilver en ijzer, welke door mij onderzocht zijn, maar ook andere stoffen vertoonen in het magnetische veld asymmetrische tripletten. Eenige voorbeelden van bijzonder sterke asymmetrieën, welke door Mr. JACK in het laboratorium te Göttingen zijn gevonden in de spectra van wolframium en molybdeen ben ik aan de vriendelijkheid van Prof. VOIGT verschuldigd. In de voorgaande tabel zijn de golflengten in ÅNGSTRÖM eenheden gegeven, de splitsingen echter in m.m. gelijk ze op de platen zijn gemeten. Voor de kennis van de relatieve asymmetrie is dat echter voldoende.

Enkele lijnen geven eene asymmetrie waarbij de component naar den kant van het rood verder afstaat. Men kan echter volgens de opmerkingen van Mr. JACK niet geheel zeker zijn of men niet in die gevallen met meer gecompliceerde lijnen te doen heeft.

Ook wil ik nog opmerken dat de opgegeven intensiteiten volgens mijne mededeeling in de Verslagen der Kon. Akademie van October 1907 slechts eene relatieve beteekenis kunnen hebben.

Waarneming in de richting der magnetische krachtlijnen.

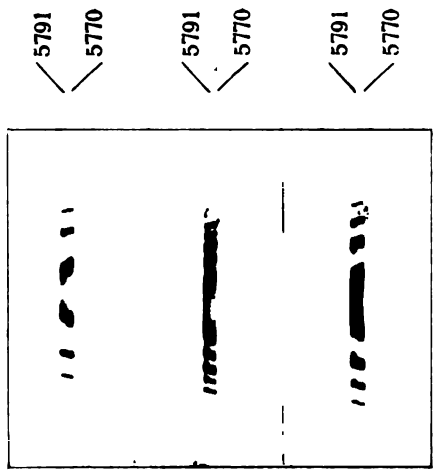
7. In de richting der magnetische kracht moeten de beide componenten van het doublet volgens de theorie symmetrisch gelegen zijn t. o. v. de oorspronkelijke lijn. Toen ik tot dit onderzoek, dat men haast overbodig kon achten wilde overgaan, deed ik onmiddellijk eene waarneming, die met eene symmetrische ligging der componenten van het doublet niet overeen te brengen viel.

---

[1]) GEEST. Dissertatie, Amsterdam 1904 Arch. Néerl. (2).

[2]) Zie in het bijzonder JEAN BECQUEREL. Influence des variations de Température sur la dispersion. Le Radium. 1907.

P. ZEEMAN. Nieuwe waarnemingen over asymmetrisch door magnetisme gesplitste tripletten.



zonder veld. 1e coincidentie 2e coincidentie.

Bij de waarneming van het doublet, waarvan de lijnen helder en scherp waren zag ik n.l. zoowel bij de lijn 5791 als bij 5770 een fijn en uiterst flauw lijntje tusschen de componenten in staan. Bij 5770 scheen dat lijntje juist midden tusschen de componenten van het doublet zich te bevinden, daarentegen bij 5791 meer naar den kant van het rood verplaatst te zijn.

Klaarblijkelijk ontstaan deze flauwe lijntjes door terugkaatsing van licht dat ongeveer loodrecht op de richting der magnetische kracht wordt uitgestraald en tegen den binnenwand der capillair van de Geisslersche buis is teruggekaatst. Door LOHMANN [1]) is bij het onderzoek der neon lijnen een dergelijk, maar daar volkomen symmetrische storing waargenomen. Het flauwe lijntje bleek mij lineair gepolariseerd te zijn.

Het geheele beeld had behoudens de intensiteitsverhoudingen en het karakter der polarisatie eene treffende overeenkomst met wat in een richting loodrecht op de magneetkracht wordt waargenomen. Het bleek niet mogelijk het uiterst flauwe lichtlijntje te gelijk met de twee lijnen van het doublet te photographeeren.

Ik besloot nu te gelijk met het doublet de oorspronkelijke buiten magnetischen invloed staande lijn in het gezichtsveld te brengen. Het is bekend dat bij spectroscopische metingen vooral indien groote nauwkeurigheid gewenscht wordt, tal van foutenbronnen het gebruik van een vergelijkingsspectrum aankleven. KAYSER [2]) beveelt daarom als meest te vertrouwen methode aan, de lijnen, welke men voor de vergelijking noodig heeft, in de bron zelf voort te brengen. Dit is in ons geval vanzelf onmogelijk.

Ook de zijdelingsche verplaatsing die de lichtlijn in de vacuumbuis door de magnetische kracht ondergaat, maakt dat, al blijft de vacuumbuis in onveranderden stand, eene opname zonder magnetisch veld reeds niet zonder meer met die in het veld kan vergeleken worden.

Het beste scheen daarom met behulp van een halfverzilverden spiegel het licht van een zijwaarts geplaatst vacuumbuisje gelijktijdig met dat van een buis, die tusschen de polen stond, te analyseeren. Intusschen gelukte deze vergelijking bij de groote nauwkeurigheid, die hier gewenscht is, slechts onvolkomen. Somtijds scheen het alsof het mogelijk was bij 5770 en 5791 gelijktijdig eene symmetrische plaatsing van de lichtlijn, welke door de oorspronkelijke lichtbron geleverd werd, te verkrijgen. Maar ik mag aan dit resultaat

[1]) LOHMANN, Beiträge zur kenntniss des ZEEMAN-Phänomens. Dissertation. Halle a. d. S. S. 62. 1907. Zeitschr. f. Wissensch. Photographie. Band 6. Heft 1 u. 2. 1908.

[2]) KAYSER, Handbuch der Spectroscopie. Band I. p. 732.

slechts een zeer bescheiden gewicht toekennen. Deze proeven deden echter met nadruk de vraag opkomen:

Heeft de middelste lijn van een triplet dezelfde golflengte als de oorspronkelijke lijn?

8. Men kan reeds van tevoren zeker zijn, dat de verandering in golflengte hier bedoeld ongetwijfeld zeer gering zal zijn, daar voor zoover mij bekend is, geen der natuurkundigen die zich met het onderzoek der straling in een magnetisch veld hebben bezig gehouden, op verschijnselen gekomen is, die de gestelde vraag in bevestigenden zin moeten doen beantwoorden.

Intusschen deden eenige waarnemiugen met een echelonspectroscoop mij zien, dat verscheidene spectraallijnen en daaronder de meermalen door mij onderzochte kwiklijnen door een zeer sterk magnetisch veld verplaatsingen van de orde van 6 à 10 duizendste deelen eener ÅNGSTRÖM eenheid, meestal naar den kant van het violet ondergaan. De zaak komt mij voor van voldoende gewicht te zijn om daaraan een afzonderlijk onderzoek te wijden, dat ik spoedig hoop te doen volgen.

Natuurkunde. — De Heer P. ZEEMAN biedt eene mededeeling aan: „*Verandering van golflengte van de middelste lijn van tripletten in een magnetisch veld.*" (eerste gedeelte.)

1. Het is tot dusver bijna stilzwijgend ondersteld geworden, dat de middelste lijn van tripletten of van andere symmetrische splitsingsfiguren in het magnetische veld op haar plaats blijft. Bij een onderzoek over de asymmetrische splitsing van enkele spectraallijnen (zie voorafgaande mededeeling) viel mij bij het onderzoek van het licht dat in de richting der krachtlijnen wordt uitgestraald op, dat waar symmetrie verwacht werd deze niet altijd bestond.

Dit bracht mij er toe de vraag te stellen of misschien ook een verschuiving van de oorspronkelijke lijn tijdens het magnetiseeren intreedt. Inderdaad blijkt dit het geval te zijn, zooals in het vervolg dezer mededeeling blijken zal. Ik wil echter niet beweren dat de asymmetrische stand van de als storing optredende uiterst flauwe lijn die ik bij lijn 5791 tusschen de doublet componenten waarnam (zie § 8 der onmiddellijk voorafgaande mededeeling) hierdoor verklaard wordt. Het tegendeel is het geval.

2. Het zij mij voor de verdere discussie vergund hier zeer in het

kort aan de formules te herinneren welke voor MICHELSON's echelon spectroscoop [1]) de verandering van de buiging met de golflengte en den afstand van twee opvolgende orden van de zelfde lijn bepalen.

Laat het invallende licht loodrecht op de glasplaten van den spectroscoop invallen, laat λ de golflengte van het doorvallende licht, μ den brekingsindex, θ den kleinen buigingshoek voorstellen, terwijl t de dikte der glasplaten, s de breedte der trappen van den echelon mogen aanduiden.

Dan is vooreerst

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{t}{s.\lambda}\left((\mu-1) - \lambda . \frac{d\mu}{d\lambda}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Noemt men den afstand van twee opvolgende orden A dan is

$$A = \frac{\lambda^2}{t\left((\mu-1) - \lambda . \frac{d\mu}{d\lambda}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

3. Het meest eenvoudig scheen het mij te onderstellen dat alleen bij de lijn 5791, die zich asymmetrisch splitst, en niet bij de lijn 5770 eene verschuiving van de middelste component zou optreden. Ik kwam er daardoor toe de echelon-spectroscoop zoodanig te gebruiken dat verschillende lijnen *tegelijk* konden worden waargenomen en vergeleken. Het is bekend dat bij de wijze waarop de echelon gewoonlijk gebruikt wordt slechts één lijn gelijktijdig kan worden onderzocht of ten hoogste lijnen die niet meer dan een klein onderdeel van een ANGSTRÖM-eenheid uit elkaar staan.

Men kan echter ook de treden van den echelon horizontaal plaatsen en evenwijdig daaraan de spleet van den bijbehoorenden collimator en alles dus 90° uit den gewonen stand draaien. De spleet van den hulpspectroscoop moge verticaal geplaatst blijven. Door deze handelwijze, welke in principe met de methode der gekruiste prisma's van NEWTON of met die der „Interferenzpunkte" van GERCKE overeenstemt bereikt men het voordeel dat gelijktijdig zeer verschillende spectraallijnen bezien kunnen worden. Iedere bepaalde golflengte teekent zich dan af in korte horizontale lijntjes, waarvan de lengte in horizontale richting door de breedte van de spleet van den hulpspectroscoop bepaald wordt. Verder zal het van den stand van den echelon afhangen of men één of twee opeenvolgende orden van een lijn zal waarnemen. De figuur 1 geeft schematisch weer dat deel van het waar-

[1]) MICHELSON. Journal de Physique, (3), Vol. 8, pag. 305, 1899.
Fürst B. GALITZIN. Zur Theorie des Stufenspectroscops. Bull. de l'Acad. Imp. des Sciences St. Pétersbourg 1905 (5) T. 23. N°. 1 et 2.

genomen beeld, hetwelk op de beide gele kwiklijnen betrekking heeft. De lijntjes a en b mogen de beide opeenvolgende orden voor de lijn 5770 voorstellen, en a' de lijn 5791 in de eenige daarbij duidelijk waarneembare orde; alles voor het geval dat de lichtbron, eene kleine vacuumbuis met lichtenden kwikdamp, zich buiten het magneetveld bevindt.

Wordt nu het magneetveld aangezet dan bewegen zich van al deze lijnen de bekende componenten naar boven en naar beneden toe. Buitendien echter zal indien de lijn 5791 van golflengte verandert, maar die der andere lijn constant blijft, eene verschuiving bepaald door de vergelijkingen (1) en (2) plaats vinden.

Neemt men na elkaar twee negatieven dan zal bij uitmeting blijken of de lijn a' op beide dezelfde plaats inneemt of niet. Het bleek al spoedig dat de lijn a' zich over een kleinen afstand, naar a'', verplaatst had.

4. Ik veroorloof mij in de volgende tabel de uitkomsten te geven van enkele uitmetingen van negatieven, welke volgens de methode van § 3 zijn opgenomen, op verschillende dagen en onder verschillende omstandigheden.

Plaat Nr.	Met veld			H in Gauss	Zonder veld		
	Afstand				Afstand		
	$a-b$	$a-a'$	$b-a'$		$a-b$	$a-a'$	$b-a'$
135	1.215	0.896	0.319	7830	1.219	0.898	0.321
139	1.200	0.891	0 309	10920	1.208	0.898	0.310
140	1.214	0.882	0.332	8580	1.221	0.905	0.316
141	1.147	0.861	0.286	7700	1.150	0.867	0.283
142	1.140	0.849	0.291	7180	1.147	0.862	0.285
144	1.140	0.855	0.285	15120	1.145	0.872	0.273
146	1 136	0.819	0.307	20340	1.143	0.861	0.282
150	1 093	0.746	0.347	23470	1.116	0.818	0.298

De gebruikte echelon, welken ik [1]) vroeger uitvoeriger beschreven

[1]) ZEEMAN. Verslag Akademie 30 November 1901.

heb, bestaat uit 30 platen van 7,8 m.m. dikte, terwijl de treden 1 m.m. breed zijn.

De afstand van de lijn a tot de lijn b is gemeten in m.m. en aangeduid als de afstand $a—b$ en zoo vervolgens. H geeft de veldsterkte in Gauss aan.

Uit deze tabel blijkt, dat inderdaad bij het magnetiseeren de lijn a' hare plaats t. o. v. a en b verandert, en dat die verplaatsing met de veldsterkte toeneemt.

Er blijkt echter tevens uit, dat de waargenomen verplaatsing niet alleen door eene golflengte-verandering van lijn 5791 is bepaald, maar eene superpositie is van veranderingen van trillingstijd in de beide beschouwde lijnen. Immers de afstand $a—b$, d. i. de afstand van twee orden van lijn 5771, is in de eerste afdeeling der tabel steeds kleiner dan in de tweede. Hieruit moet dus besloten worden dat de lijn 5771 eene verandering van golflengte ondergaat. Het bedrag ervan in A. E. kan gemakkelijk worden aangegeven. Voor het sterkste veld van 23470 Gauss bedraagt de verandering van $a—b$ 0,023 m.m. De helft van dit bedrag bepaalt de verandering in golflengte, en deze is dus, daar voor den gebruikten echelon de afstand van twee orden = 1.116 m.m. met 0,689 A. E. overeenkomt, gelijk aan 0,007 A. E.

5. Het blijkt dus duidelijk dat niet slechts lijn 5791 maar evenzeer lijn 5770 eene verandering van hare oorspronkelijke golflengten in het magnetische veld ondergaan. Daardoor wordt de eenvoudigheid der uitkomsten van de in § 4 toegepaste methode echter zeer verminderd. Hare gevoeligheid echter in het constateeren van *relatieve* golflengten-veranderingen blijkt zeer duidelijk uit eene vergelijking van de beide kolommen onder $a—a'$.

Ten einde echter eene eenvoudige interpretatie van de uitkomsten te verzekeren en ook wegens de meerdere lichtsterkte ben ik, nadat de realiteit van de golflengte-verandering gebleken is, teruggekeerd tot de gewone wijze van werken waarbij de spleet van den hulpspectroscoop evenwijdig loopt aan die van den echelon.

Voor de beide gele kwiklijnen werden de volgende uitkomsten verkregen. (Zie tabel p. 622).

Bij de drie laatste opnamen werd met andere orden van den echelon gewerkt. δ_r geeft in m.m. en gereduceerd op een afstand der orden gelijk aan 1.110 m.m. de verandering die deze afstand bij het magnetiseeren ondergaat. Op plaat 164 stijgt de verandering in golflengten in A. E. uitgedrukt tot 0.008.

De tabel bevestigt volkomen de reeds in § 4 verkregen uitkomsten.

De afzonderlijke opnamen vertoonen echter, evenals die welke in § 4 werden besproken, onregelmatigheden waarover eene nadere

Plaat Nr.	λ	Afstand-orden zonder veld in m.m.	Afstand-orden met veld in m.m.	H	δ_r in m.m.
160*a*	5770	1.081	1.067	20100	0.014
160*b*	5791	1 061	1.044	20100	0.017
160*c*	5791	1.058	1.050	8900	0.008
161*a*	5770	1.110	1.089	23800	0.021
161*b*	5770	1.110	1.106	9000	0.004
164	5770	0.855	0.834	24400	0.027
165*a*	5791	0 856	0.847	13750	0.012
165*b*	5770	0.859	0.843	16450	0.021

discussie noodzakelijk is. Voor ik echter daartoe overga, wensch ik er de aandacht op te vestigen, dat de verkregen uitkomst omtrent de verschuiving van de middelste lijn van het triplet niet een verschijnsel is, dat uitsluitend aan de ontlading in GEISLER'sche buizen eigen schijnt te zijn.

In eene dissertatie van W. HARTMANN [1]) komt de volgende zinsnede, waarop tijdens het neerschrijven van dit opstel mijne aandacht viel, voor: „Es mag schon an dieser Stelle erwähnt werden, dass der Abstand der Ordnungen beim Einschalten des Magnetfeldes sich mehrfach änderte, und zwar im allgemeinen mit wachsender Feldstärke kleiner wurde.

Dieser Änderung würde rein äusserlich betrachtet eine Verkürzung der Wellenlänge entsprechen, doch konnte eine wirkliche Gesetzmässigkeit nicht constatirt werden."

De proeven van HARTMANN werden genomen met een echelon spectroscoop, terwijl een vacuum onderbreker van MICHELSON als lichtbron diende. De meeste zijner opnamen over koper, ijzer, goud en chroom werden in velden van 8000 tot 12000 Gauss opgenomen. Misschien zou de schrijver zich minder gereserveerd hebben uitgelaten, indien door hem sterkere velden waren gebruikt, waarin het verschijnsel zooveel duidelijker optreedt. In het licht echter der door mij beschreven proeven mag men wel besluiten, dat ook bij andere metalen eene verandering van golflengte van de middelste component van denzelfden aard optreedt, als voor de kwikzilverlijnen werd aangetoond.

[1]) WALTHER HARTMANN. Das ZEEMAN-Phaenomen im sichtbaren Spectrum von Kupfer, Eisen, Gold und Chrom. Dissertation, Halle a. d. S. 1907. p. 10.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt een mededeeling aan: *„Over vierdimensionale netten en hun ruimtedoorsneden"*. (Tweede gedeelte).

Het net (C_8).

1. Het vraagstuk, de doorsnee van het net (C_8) met een gegeven ruimte te bepalen, splitst zich van nature in twee deelen. Het eerste deel houdt zich bezig met de vraag, hoe een reeks van ruimten evenwijdig aan de gegevene een bepaalde achtcel snijdt; in het tweede deel wordt aangegeven, hoe de doorsnee van elk der achtcellen, die door de gegeven ruimte gesneden worden, kan worden afgeleid uit die, welke deze ruimte in de in het eerste deel aangenomen achtcel bepaalt. Natuurlijk treden hierbij de vier reeksen van evenwijdige ruimten loodrecht op een as der achtcel op den voorgrond en worden dan in het eerste deel van het vraagstuk in de eerste plaats de zoogenaamde „overgangsvormen" onderzocht, waarbij de snijdende ruimte een of meer hoekpunten van de achtcel bevat, terwijl dan tusschen elk paar aan elkaar grenzende overgangsvormen een enkele intermediaire vorm wordt ingeschoven, n.l. die met de ruimte, welke den afstand tusschen de beide die overgangsvormen dragende ruimten middendoor deelt. Gewoonlijk is dit voor ons doel voldoende; bovendien is het niet moeilijk, waar dit noodzakelijk mocht blijken, andere tusschenvormen te interpoleeren.

In de vorige mededeeling onder denzelfden titel hebben we elk der cellen C_{16} van het net (C_{16}) en elk der cellen C_{24} van het net (C_{24}) verpakt in de kleinst mogelijke achtcel met ribben evenwijdig aan de coördinaatassen, in het voornemen om de ruimtedoorsneden der netten (C_{16}) en (C_{24}) aan die van het net (C_8) te binden door met elke C_{16} en elke C_{24} tevens de deze cellen insluitende doos C_8 te snijden. Met het oog op deze toepassing voegen we aan de boven aangegeven vier reeksen van evenwijdige snijruimten nog twee andere toe, n.l. die, welke loodrecht staan op een der beide lijnen, die den oorsprong van coördinaten met het punt (3, 1, 1, 1) en het punt (2, 1, 1, 0) verbinden; deze lijnen toch zijn — zie de laatste tabel der vorige mededeeling — assen van een of meer der in de cel C_8 besloten cellen C_{16} en C_{24}. Ook bij deze twee nieuwe reeksen bepalen we ons tot de overgangsvormen en de midden tusschen twee naburige overgangsvormen gelegen tusschenvormen.

Ten einde het overzicht der bij de zes reeksen van evenwijdige ruimten optredende doorsneden te vergemakkelijken geven we de uitkomsten, waartoe het eerste deel — de bepaling der doorsnee met één C_8 — voert, op twee verschillende wijzen aan. Vooreerst

projecteeren we alle hoekpunten, ribben, zijvlakken, grenslichamen der cel C_8 op de middellijn loodrecht op elk der zes reeksen van ruimten om hieruit de doorsneden tabellarisch af te leiden; ten tweede geven we de doorsneden zelf in evenwijdige perspectief in de achtcel aan. Aan elk dier twee nauw samenhangende handelwijzen is een uitslaande plaat gewijd.

Ter bevordering der eenvormigheid duiden we de assen OE, OK, OF, OR door haar uiteinden $(1,1,1,1)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,0,0,0)$ aan. We hebben dan achtereenvolgens met de zes reeksen $(1,1,1,1)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,0,0,0)$, $(3,1,1,1)$, $(2,1,1,0)$ te doen en moeten nu voor elk dier zes gevallen de beide deelen onderzoeken, waarin het vraagstuk zich boven splitste.

2. *Het geval* $(1,1,1,1)$. — Dit geval is, wat het eerste deel van het vraagstuk betreft, volledig opgelost in een vorige studie (*Verslagen*, December 1907, blz. 467). Vandaar, dat het eerste gedeelte der eerste plaat met het opschrift $(1,1,1,1)$ OE_8 een uitbreiding is van het eerste diagram $n = 4$ der toen gegeven plaat. Ten einde in de gelegenheid te zijn bij de projecties van alle grenselementen tevens de projecties der hoekpunten dezer elementen aan te wijzen, waardoor het inzicht in de ruimtefiguur aanmerkelijk wordt bevorderd, zijn hier de aantallen der ribben, zijvlakken, grenslichamen buiten het schema, ter rechter zijde, aangegeven. Bovendien zijn hier de doorsneden van de achtcel met de overgangsruimten en de intermediaire ruimten loodrecht op de diagonaal van projectie tabellarisch vermeld; daarbij is gebruik gemaakt van een vroeger (*Verhandelingen*, deel IX, n°. 4) ten voeten uit ontwikkelde methode, die ons van elke doorsnee niet alleen de kenmerkende getallen (e, k, f) maar ook den aard der zijvlakken kennen doet. Zoo is de centrale doorsnee een $(6, 12, 8)$, omdat ze 6 hoekpunten bevat en geen ribben snijdt, 12 zijvlakken snijdt en geen ribben bevat, 8 grenskuben snijdt en geen zijvlakken bevat; deze doorsnee is een regelmatig achtvlak, in verband waarmee elke kubus der beide viertallen van begrenzende lichamen volgens een gelijkzijdigen driehoek van dezelfde grootte gesneden wordt. Zoo is de naburige intermediaire doorsnee een $(12, 18, 8)$, omdat er 12 ribben, 18 zijvlakken, 8 grenskuben gesneden worden, en wel een regelmatig aan de hoekpunten afgeknot viervlak, n.l. het eerste der halfregelmatige Archimedische lichamen (*Verslagen*, blz. 470), omdat vier der grenskuben volgens regelmatige zeshoeken, de vier overigen volgens gelijkzijdige driehoeken gesneden worden. Hierbij wordt het aantal der ribben teruggevonden als de helft van het gezamenlijk aantal der zijden

van de zijvlakken, zoo 12 als het halve product van acht en drie, 18 als de halve som van vier maal zes en vier maal drie. Bovendien is bij het aangeven der in de zijvlakken liggende veelhoeken het cijfer van elke groep van regelmatige veelhoeken onderstreept.

De tweede plaat geeft de verkregen doorsneden in evenwijdige perspectief aan. De eerste figuur, links bovenaan, stelt een achtcel voor, die behalve de bij de verschillende reeksen van evenwijdige snijruimten optredende middellijnen loodrecht op die ruimten enkele andere bij de oplossing optredende lijnen aanwijst; voor ons geval (1, 1, 1, 1), waarop de vier volgende figuren der eerste rij slaan, is de as EE' deze middellijn. Ter kenmerking van dit geval is rechts onderaan in het vak het merk (1, 1, 1, 1) neergeschreven; bovendien wijzen de breuken $\frac{4}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}$ links bovenaan bij elke figuur geplaatst het met E aan dezelfde zijde der snijruimte gelegen gedeelte der as EE' aan. Gemakkelijk volgt men in deze figuren de vormveranderingen, die elk zijvlak van het regelmatig achtvlak, dat de centrale doorsnee vormt, ondergaat, als het snijpunt der snijruimte met de as OE zich van O naar E verplaatst. Zoo vervormt zich het in den bovenkubus der achtcel gelegen zijvlak, dat tevens het zichtbare bovenvlak van het op zich zelf beschouwde achtvlak uitmaakt, eerst tot een regelmatigen zeshoek, daarna tot een gelijkzijdigen driehoek van tegengestelde oriëntatie, enz.; is de achtcel een $C_8^{(2)}$, dan zijn de zijden van de driehoeken der eerste en derde figuur $2\sqrt{2}$, die van de zeshoeken en de driehoeken der tweede en vierde figuur $\sqrt{2}$, terwijl de reeks zich besluit met den overgangsvorm bestaande uit het enkele hoekpunt E, waaraan dan de breuk $\frac{0}{8}$ beantwoordt.

We komen nu tot de vraag, hoe in elk der beschouwde gevallen de eveneens door de snijruimte getroffen overige achtcellen gesneden worden. Daartoe denken we ons de boven gesneden achtcel als de centrale van het net en nemen we dus aan, dat het middelpunt van deze cel de oorsprong is van het coördinatenstelsel, ten opzichte waarvan we in het eerste gedeelte de coördinaten van de middelpunten der overige cellen in den symbolischen vorm $(2a_i)$ hebben bepaald. De vergelijking der centrale ruimte loodrecht op de as OE_8 naar het punt (1, 1, 1, 1) is $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$; de lengte der loodlijn uit het middelpunt $(2a_i)$ op deze ruimte neergelaten is dus Σa_i. Derhalve wordt de achtcel met het middelpunt $(2a_i)$ door de centrale ruimte $\Sigma x_i = 0$ gesneden, als $-2 \leqq \Sigma a_i \leqq 2$ is, en doen zich hierbij de vijf gevallen voor, waarbij Σa_i een der

waarden $-2, -1, 0, 1, 2$ heeft. Anders gezegd: vertoont zich bij de centrale cel de centrale doorsnee $\frac{4}{8}$, dan komen bij de overige cellen de doorsneden $\frac{0}{8}, \frac{2}{8}, \frac{4}{8}, \frac{6}{8}, \frac{8}{8}$ voor en geen andere. Wijl de doorsneden $\frac{0}{8}$ en $\frac{8}{8}$ punten zijn en dus buiten beschouwing blijven, vinden we dan als doorsnee van het net (C_8) een driedimensionale ruimtevulling bestaande uit twee grondvormen, achtvlak en viervlak, waarbij het viervlak optreedt in twee standen van tegengestelde oriëntatie. Uit een nauwkeurige overweging van deze uitkomst volgt nu *in het algemeen* genoegzaam, dat de breuksymbolen van de gesneden cellen met dat van de centrale cel verschillen van veelvouden van kwarten opleveren en dus, als het symbool der centrale cel $\frac{3}{8}$ of $\frac{1}{8}$ is, door $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$ worden voorgesteld. Men vindt dan weer een driedimensionale ruimtevulling bestaande uit twee grondvormen, die elk van beide in twee tegengesteld georiënteerde standen voorkomen, het eerste halfregelmatige Archimedische lichaam en het viervlak. Wijl we uitgaande van de doorsnee $\frac{2}{8}$ der centrale cel weer op het stelsel van achtvlak en viervlak terecht komen, zijn de genoemde twee gevallen voor deze reeks de eenige, waarbij de driedimensionale ruimtevulling uit twee grondvormen bestaat. In elk ander geval — zoo als bijv. het aan de breuken $\frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{9}{16}, \frac{13}{16}$ beantwoordende — vindt men vier verschillende grondvormen en nooit meer; we bevelen het teekenen van het juist genoemde viertal doorsneden als een goede oefening aan.

Vervangt men de oneindige verzameling van cellen $C_8^{(2)}$ door een eindig blok van k^4 cellen $C_8^{(2)}$, die gezamenlijk een $C_8^{(2k)}$ vormen, verdeelt men een diagonaal van dit blok in acht gelijke deelen en denkt men zich het blok gesneden door een ruimte in een der deelpunten loodrecht op de diagonaal staande, dan vindt men al naar omstandigheden òf een eindige verzameling van achtvlakken $O^{(2\sqrt{2})}$ en viervlakken $T^{(2\sqrt{2})}$ met ribben $2\,|\sqrt{2}$, òf een eindige verzameling van Archimedische lichamen $A^{(\sqrt{2})}$ en viervlakken $T^{(\sqrt{2})}$ met ribben $|\sqrt{2}$, besloten in een achtvlak, een viervlak of een Achimedisch lichaam van grootere afmetingen, n.l. in de doorsnee van het blok $C_8^{(2k)}$ met

de snijdende ruimte. In verband met de aanteekeningen toegevoegd aan de blz. 15, 16 en 24 der studie "On the sections of a block of eightcells, etc." (*Verhandelingen*, deel IX, n°. 7) geven we hier aan, hoe groot in elk dier gevallen het aantal der samenstellende deelen $O^{(2\nu 2)}$, $A^{(\nu 2)}$, $T^{(2\nu 2)}$, $T^{(\nu 2)}$ is. We bepalen ons daarbij tot het vermelden der uitkomsten en herinneren er slechts aan, dat de afleiding van deze berust op het daadzakelijke verband tusschen de coëfficienten der verschillende machten van x in de ontwikkeling van $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1})^4$ en de aantallen der cellen $C_8^{(2)}$ van het blok $C_8^{(2k)}$, die in projectie op een diagonaal met elkaar overeenstemmen. In de volgende tabel der uitkomsten zijn van elkaar afgescheiden de drie gevallen voerende tot doorsneden $\frac{1}{4} C_8^{(2)} = T^{(2\nu 2)}$, $\frac{1}{2} C_8^{(2)} = O^{(2\nu 2)}$ en de twee gevallen voerende tot doorsneden $\frac{1}{8} C_8^{(2)} = T^{(\nu 2)}$, $\frac{3}{8} C_8^2 = A^{(\nu 2)}$. Bovendien zijn de twee standen van tegengestelde oriëntatie, die bij T en A optreden, als T_μ, T_n en A_μ, A_n van elkaar onderscheiden en ontvangen dan die deelen $T^{(\nu 2)}$ en $A^{(\nu 2)}$ denzelfden voetindex, die niet alleen wat inhoud maar ook wat stand van samenvoeging betreft beantwoorden aan de betrekking

$$A^{(\nu 2)} + 4\, T^{(\nu 2)} = T^{(3\nu 2)},$$

terwijl deze aanwijzer bij $T^{(2\nu 2)}$ een p (positief) is, als dit viervlak in stand met $T^{(2k\nu 2)}$ en $A^{(2k\nu 2)}$ overeenkomt, en in het derde geval $O^{(2k+2)}$, waar de twee aantallen dan ook gelijk zijn, willekeurig gekozen kan worden.

In deze tabel stellen de symbolen $(k+2)_s$, enz. binomiaalcoëfficienten voor. Het op den voorgrond treden van den getallenfactor 23 staat in verband met de alleen voor het volume geldende betrekking

$$A^{(\nu 2)} = 23\, T^{(\nu 2)},$$

die onmiddellijk uit de boven gegevene volgt. Zij maakt een deel uit van

$$\frac{O^{(2\nu 2)}}{32} = \frac{A^{(\nu 2)}}{23} = \frac{T^{(2\nu 2)}}{8} = \frac{T^{(\nu 2)}}{1},$$

waarvan bij de samenstelling der tabel, 't zij als hulpmiddel ter berekening, 't zij als controle, gebruik gemaakt is.

3. *De gevallen* (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0). — Deze drie gevallen zijn zooveel eenvoudiger dan het voorgaande, dat we ze wel gezamenlijk kunnen behandelen, nu de toepassing van de hierbij optredende uitkomsten op de netten (C_{16}) en (C_{24}) eenmaal een korte behandeling noodzakelijk maakt. De projecties van de grenselementen

$\frac{1}{4} C_8^{(2k)} = T^{(2k\sqrt{2})}$	$T_p^{(2\sqrt{2})} \ldots (k+2)_3$ $T_n^{(2\sqrt{2})} \ldots (k)_3$	$O^{(2\sqrt{2})} \ldots (k+1)_3$
	$Som \frac{1}{2}k(k^2+1)$	
$\frac{3}{8} C_8^{(4k)} = A^{(2k\sqrt{2})}$	$T_p^{(2\sqrt{2})} \ldots \frac{1}{6}k(23k^2+6k-2)$ $T_n^{(2\sqrt{2})} \ldots \frac{1}{6}k(23k^2-6k-2)$	$O^{(2\sqrt{2})} \ldots \frac{1}{6}k(23k^2-1)$
	$Som \frac{1}{6}k(69k^2-5)$	
$\frac{1}{2} C_8^{(2k)} = O^{(2k\sqrt{2})}$	$T_p^{(2\sqrt{2})} \ldots 4(k+1)_3$ $T_n^{(2\sqrt{2})} \ldots 4(k+1)_3$	$O^{(2\sqrt{2})} \ldots \frac{1}{3}k(2k^2+1)$
	$Som\ k(2k^2-1)$	
$\frac{1}{8} C_8^{(4k+2)} = T^{(2k+1)\sqrt{2}}$	$T_p^{(\sqrt{2})} \ldots (k+3)_3$ $T_n^{(\sqrt{2})} \ldots (k)_3$	$A_p^{(\sqrt{2})} \ldots (k+2)_3$ $A_n^{(\sqrt{2})} \ldots (k+1)_3$
	$Som \frac{1}{3}(2k^3+3k^2+7k+3)$	
$\frac{3}{8} C_8^{(4k+2)} = A^{(2k+1)\sqrt{2}}$	$T_p^{(\sqrt{2})} \ldots \frac{1}{6}k(k+1)(23k+34)$ $T_n^{(\sqrt{2})} \ldots \frac{1}{6}k(23k^2+12k-11)$	$A_p^{(\sqrt{2})} \ldots \frac{1}{6}(k+1)(23k^2+19k+6)$ $A_n^{(\sqrt{2})} \ldots \frac{1}{6}k(23^2+27k+10)$
	$Som \frac{1}{3}(46k^3+69k^2+29k+3)$	

op de overeenkomstige assen OK, OF, OR worden onmiddellijk gevonden; ten einde rekening te houden met de tusschen OE en OR eenerzijds en tusschen OK en OF anderzijds optredende dualiteit

zijn op de eerste plaat de projecties op OR gesteld naast die op OE, terwijl de projecties op OK en OF er naast elkaar een plaats vinden. Een enkele blik op deze diagrammen wekt reeds de overtuiging, dat de doorsneden in de richting van OE over OK en OF naar OR steeds eenvoudiger moeten worden. Dat dit werkelijk het geval is — en om welke reden — blijkt duidelijk op de tweede plaat, die voor de gevallen OK en OF de doorsneden geeft. Zoo als de drie bij OK behoorende figuren met de breuksymbolen $\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$ doen zien, is hier een van de afmetingen der doorsnee, n.l. de afmeting in de richting van de ribbe met K tot midden, van standvastige lengte, waardoor de doorsneden prisma's worden met een hoogte 2 en wel een zeszijdig prisma $H^{(\sqrt{2})}$, een driezijdig prisma $P^{(2\sqrt{2})}$ en een driezijdig prisma $P^{(\sqrt{2})}$; bij deze symbolen H en P geven de aanwijzers $\sqrt{2}$ en $2\sqrt{2}$ de lengte der zijden van grond- en bovenvlak aan. Eigenlijk kan nu beweerd worden, dat bij deze prisma's, waarvan grond- en bovenvlak de bepalende veranderlijke elementen zijn, het vraagstuk der doorsnijding een afmeting verloren heeft; immers men behoeft ter bepaling van het prisma slechts te vragen, hoe de grondkubus gesneden wordt door een vlak loodrecht op een diagonaal van dit grenslichaam der achtcel, m. a. w. het vraagstuk is driedimensionaal geworden. Op dezelfde wijze vindt men in het geval OF rechthoekige prisma's, waarvan twee afmetingen standvastig blijven, wat voor de overgangsdoorsnee $\frac{2}{4}$ en de intermediaire doorsnee $\frac{1}{4}$ is aangegeven, terwijl de doorsnee in het geval OR een onveranderlijke kubus is, die natuurlijk niet is afgebeeld.

Het is bijna overbodig stil te staan bij de beide ruimtevullingen van het geval OK, die door $H^{(\sqrt{2})}$ en $P^{(\sqrt{2})}$ samen en die door $P^{(2\sqrt{2})}$ alleen, wijl ze in den grond der zaak als bekende vlakvullingen verschijnen. We volstaan met het aangeven der volgende betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned}
P^{(2k+1)\sqrt{2}} &= (k+2)_2\, P_p^{(\sqrt{2})} + (k+1)_2\, H^{(\sqrt{2})} + (k)_2\, P_n^{(\sqrt{2})} \\
H^{(2k+1)\sqrt{2}} &= 6(k+1)_2\, P_p^{(\sqrt{2})} + (3k^2+3k+1)\, H^{(\sqrt{2})} + 6(k+1)_2 P_n^{(\sqrt{2})} \\
P^{(k\sqrt{2})} &= (k+1)_2\, P_p^{(\sqrt{2})} + (k)_2\, P_n^{(\sqrt{2})} \\
H^{(k\sqrt{2})} &= 3k^2\, P_p^{(\sqrt{2})} + 3k^2\, P_n^{(\sqrt{2})}
\end{aligned}\right\}$$

4. *Het geval* (3, 1, 1, 1). Is het hoekpunt A der achtcel $C_8^{(2)}$ — zie het eerste diagram der tweede plaat — het punt (1, 1, 1, 1) dan wordt het punt $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ verkregen door de inwendige diagonaal AB van den in de ruimte $x_1 = 1$ gelegen kubus in drie gelijke deelen te verdeelen en dan het eerste deelpunt C te nemen [1]). De lijn OC is voor dit geval de as, waarop bij het bepalen der projectie van de grenselementen der cel geprojecteerd moet worden. Nu is het duidelijk, dat de projectie van den kubus met AB tot diagonaal verkregen wordt door dit grenslichaam eerst te projecteeren op de projectie AB van de as OC op zijn ruimte $x_1 = 1$, wat met betrekking tot de hoekpunten de stratificatie 1, 3, 3, 1 oplevert, om daarna de projectie te bepalen van deze nieuwe op AB gelegen punten op OC. Nu is hoek BOC echter recht, want uit de coördinaten (1, — 1, — 1, — 1) en $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ van B en C volgt onmiddellijk $OB^2 + OC^2 = BC^2$. Dus projecteert B zich op OC in O en is dit dan met het tegenover B gelegen hoekpunt (— 1, 1, 1, 1) der achtcel natuurlijk ook het geval. Zoo verkrijgt men dan — zie de eerste plaat onder het hoofd (3, 1, 1, 1) C_8 — de stratificatie der 16 hoekpunten door de met gelijke tusschenafstanden op de projectieas neergelegde puntengroep 1, 3, 3, 1 zoo door een tweede van denzelfden bouw te doen volgen, dat eerste 1 van deze tweede met de laatste 1 van de eerste samenvalt. Hieraan ontleent deze projectie, wat onderaan genoemd is haar type. Werkelijk vindt men zonder eenige moeite alles wat in het schema aangegeven is, door zich de twee in het typische beeld aangewezen grenskuben — hier de in de ruimten $x_1 = \pm 1$ gelegen — voor te stellen en zich hun overeenkomstige hoekpunten, ribben, zijvlakken door ribben, zijvlakken, grenslichamen vereenigd te denken.

Laten we het op zich zelf staande punt A weer buiten rekening, dan hebben we hier met zes verschillende vormen der doorsnee, drie overgangsvormen en drie tusschenvormen, te doen; deze worden met bijvoeging van de overeenkomstige breuksymbolen $\frac{6}{12}, \frac{5}{12}, \ldots, \frac{1}{12}$ op de tweede plaat aangetroffen. We wijzen eenigszins uitvoerig aan, hoe deze figuren onafhankelijk van de uitkomsten der eerste plaat door teekening worden afgeleid, en merken daartoe dan onmiddellijk op, dat de ruimte door A loodrecht op OC door $3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ voorgesteld wordt en deze na een kleine evenwijdige verplaatsing naar O toe van de door A gaande ribben der achtcel dus stukken

[1]) Bij vergissing is voor AC in de figuur $\frac{1}{3} AR$ genomen in plaats $\frac{1}{3} AB$.

afsnijdt, die tot elkaar staan als 1 : 3 : 3 : 3. Is nu de horizontaal geteekende ribbe AB' evenwijdig aan OX_1, dan begint men ter verkrijging van den eersten tusschenvorm op de overige ribben door A — zie de laatste der zes figuren — stukken AP_2, AP_3, AP_4 ter lengte van de halve ribbe, d. i. van de eenheid, op de ribbe AB' een stuk AP_1 ter lengte van een derde van de eenheid uit te zetten, waardoor het met het symbool $\frac{1}{12}$ overeenkomende viervlak $P_1P_2P_3P_4$ ontstaat. De ruimte $x_1 = 1$ bevat van dit viervlak den gelijkzijdigen driehoek $P_2P_3P_4$ met de zijde $\sqrt{2}$; de andere zijvlakken $P_1P_3P_4$, $P_1P_2P_4$, $P_1P_2P_3$ gelegen in de ruimten $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ zijn gelijkbeenige driehoeken met bases $\sqrt{2}$ en opstaande zijden $\frac{1}{3}\sqrt{10}$. Deze doorsnee is dus geen regelmatig *viervlak* doch een regelmatige *driezijdige pyramide*, waarvan de loodlijn uit den top P_1, op het grondvlak $P_2P_3P_4$ neergelaten, een as is met de periode drie; wijl het voetpunt van deze loodlijn op de diagonaal AB van den rechter kubus ligt op een afstand van A, die het zesde deel van AB uitmaakt, en AP_1 tevens een zesde is van AB_1, loopt deze as evenwijdig aan de diagonaal BB' der achtcel. Gemakkelijk leidt men nu de uit de verschuiving der snijruimte volgende veranderingen der doorsnee af door hetzij de evenwijdige verplaatsing van de ribben der doorsnee over de zijvlakken der achtcel, hetzij de evenwijdige verplaatsing van de zijvlakken der doorsnee door de grenskuben der achtcel heen na te gaan. Heeft de snijruimte zich tot op den dubbelen afstand van A verwijderd, dan is — zoo als uit beide beschouwingen blijkt — het viervlak van doorsnee eenvoudig van A uit met twee vermenigvuldigd geworden. Van deze doorsnee $\frac{2}{12}$ verder gaande verdient het nagaan van de ribben, naar het schijnt, de voorkeur. Zijn de ribben P_2P_3 en P_2P_1 van de doorsnee $\frac{2}{12}$, als de snijruimte op drievoudigen afstand van het uitgangspunt A gekomen is, in de standen P_2P_3 en $P_2'P_1$ van de doorsnee $\frac{3}{12}$ aangeland, dan blijkt voldoende, dat vereeniging der punten P_2P_3' een nieuwe ribbe leveren moet. Zoo ziet men langzamerhand het geheele rhomboëder, dat de doorsnee $\frac{6}{12}$ vormt, zich ontwikkelen. We wijzen er nog op, dat de doorsnee in elken stand van de zich evenwijdig verplaatsende snijruimte een as met de periode drie heeft, die met de diagonaal BB' evenwijdig is en op het laatst in deze lijn overgaat. Immers de

diagonaal AB van den in de ruimte $x_1 = 1$ gelegen grenskubus is een omwentelingsas met de periode drie voor dien kubus, dus is het vlak door AB en AB' een „omwentelingsvlak" met de periode drie voor de achtcel. Wijl nu de zich bewegende snijruimte loodrecht blijft op de in dit vlak gelegen lijn OC — zie de eerste der 20 figuren —, moet de lijn van doorsnee van dit vlak met de snijruimte, welke lijn dan natuurlijk loodrecht op OC staat, voor de doorsnee een as met de periode drie zijn. Zoo als boven reeds gevonden werd, staat nu werkelijk de lijn OB loodrecht op OC en is de verkregen as dus evenwijdig aan OB. Omdat het vlak door AB en B' de loodlijnen OC en OR uit O op de snijruimte en de ruimte $X_1 = 1$ van den rechtschen kubus bevat, moet elke lijn ervan en dus ook OB loodrecht staan op het vlak door de snijruimte in de ruimte $X_1 = 1$ bepaald; dus wordt, als men de snijruimte in tegengestelden zin beweegt en van $\frac{6}{12}$ over $\frac{5}{12}$, enz. naar $\frac{1}{12}$ terugkeert, het rhomboëder, dat de centrale doorsnee vormt en zich dan in de richting van de ribbe $B'A$ door de achtcel beweegt, door het in de ruimte van den rechtschen kubus bepaalde vlak loodrecht op de as afgeknot. Trouwens, in de boven aangehaalde verhandeling (deel IX, n°.7) is gevonden, dat de doorsnee steeds een rhomboëder of een afgeknot rhomboëder is, als de snijruimte loodrecht staat op een vlak door twee overstaande ribben, wat hier het geval is, daar het vlak door AB en B' de ribbe AB' en de tegenoverliggende ribbe bevat.

We duiden nu het aan het breuksymbool $\frac{n}{12}$ beantwoordende lichaam door D_n aan, waarbij de n dan een der waarden $1, 2, ..., 11, 12$ aannemen kan en D_n en D_{12-n} de twee tegengesteld georiënteerde standen van een zelfde lichaam voorstellen, om dan verder te onderzoeken, welke dier deelen bij een snijding van het net (C_8) door de centrale ruimte $3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ optreden. Uit de afstanden der punten met de coordinaten $(2a_i)$, die het middelpuntenstelsel van het net vormen, volgt onmiddellijk, dat de deelen D_2, D_4, D_6, D_8, D_{10} gezamenlijk verschijnen en de overeenkomstige driedimensionale ruimtevulling dus uit drie—en als men op de orientatie let zelfs uit vijf—verschillende grondvormen bestaat. Nu is, zoo als we weten, de vorm D_6 alleen reeds in staat de ruimte te vullen en zijn dit dus ook zoowel de vormen D_2 en D_8 als de vormen D_4 en D_{10} samen. Wat meer zegt, uit de voorwaarde, dat in de verkregen ruimtevulling met de drie of vijf verschillende grondvormen het zijvlak van een dier vormen zich in zijvlakken der omringende vormen voortzetten moet, volgt onmiddellijk, dat naast elke D_2 een aanvullende D_8, naast elke D_4

een aanvullende D_{10} liggen moet en samenvoeging dier elkaar tot een D_6 aanvullende deelen dus tot een net van rhomboëders D_6 leiden moet. Werkelijk doet men dit rhomboëdernet op meer overzichtelijke wijs ontstaan, als men alvorens het net (C_8) door de aangenomen ruimte te snijden, de reeks der ruimten $x_1 = 2a_1 + 1$ wegdenkt, iets waartoe het gebruik van het projectievlak door de twee ribben, hier AB' en de tegenoverliggende, ons in de het laatst aangehaalde verhandeling als van zelf heeft gebracht Hierdoor toch gaat het net (C_8) over in een drievoudig oneindig net van oneindig doorloopende rechthoekige prisma's, die een kubus met de ribbe twee tot grondlichaam hebben, en de doorsnee van dit net van prisma's is juist het rhomboëdernet. Dat de doorsneden, die bij een willekeurigen stand der snijruimte geheel onregelmatige parallelopipeda zijn, hier rhomboëders worden, is het gevolg hiervan, dat de snijruimte met elk der drie ruimten $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ gelijke hoeken maakt, hoeken met een cosinus ter waarde van $\frac{1}{6}\sqrt{3}$. Uit de teekening met het symbool $\frac{6}{12}$ blijkt nu verder, dat de uiteinden B, B' van de as van dit rhomboëder in twee opvolgende ruimten $x_1 = 2a_1 + 1$ liggen en de afstand van de evenwijdige vlakken van doorsnee der snijruimte met deze ruimten, welke vlakken in de snijruimte het rhomboëdernet aan stukken snijden, dus 4 bedraagt. Dit sluit; want de hoek tusschen de ruimten $3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ en $x_1 = 0$ heeft $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ tot cosinus en dus $\frac{1}{2}$ tot sinus, zoodat de afstand der vlakken $2 : \frac{1}{2}$ zijn moet.

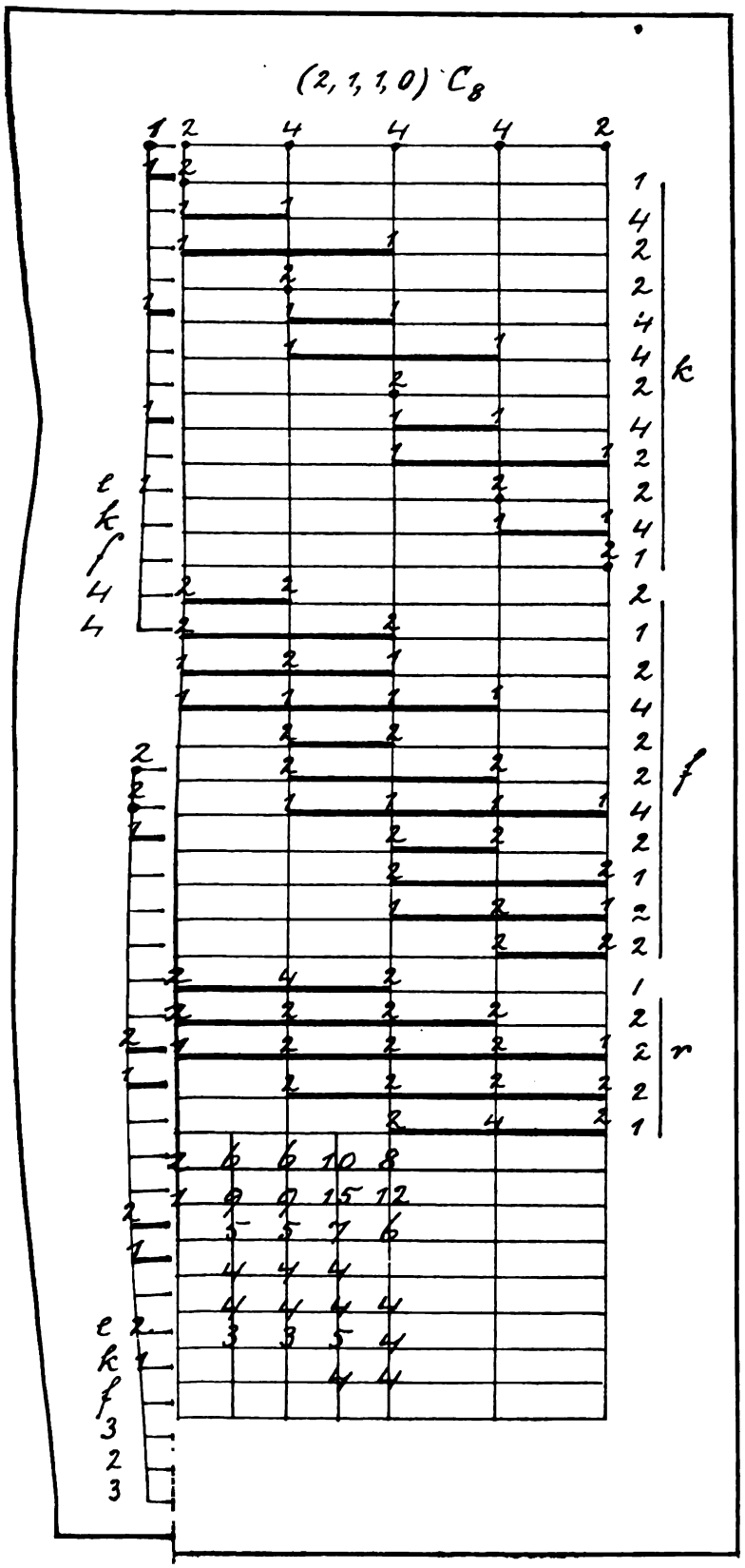
Uit het voorgaande volgt nu eveneens, dat de doorsnee met de ruimte $3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ een uit de deelen D_1, D_3, D_6, D_7, D_9, D_{11} bestaande ruimtevulling levert; natuurlijk kan ook deze uit drie elk in twee tegengestelde standen optredende grondvormen bestaande ruimtevulling door het stuk snijden van een rhomboëdernet verkregen worden. Ook is het duidelijk, dat het aannemen van een tusschenstand der snijruimte tot zes geheel verschillende grondvormen voert, die door $D_{\frac{1}{2}}$, $D_{3\frac{1}{2}}$, ... $D_{10\frac{1}{2}}$, of in tegenstelde oriëntatie door $D_{1\frac{1}{2}}$, $D_{3\frac{1}{2}}$, ... $D_{11\frac{1}{2}}$ zijn aan te geven.

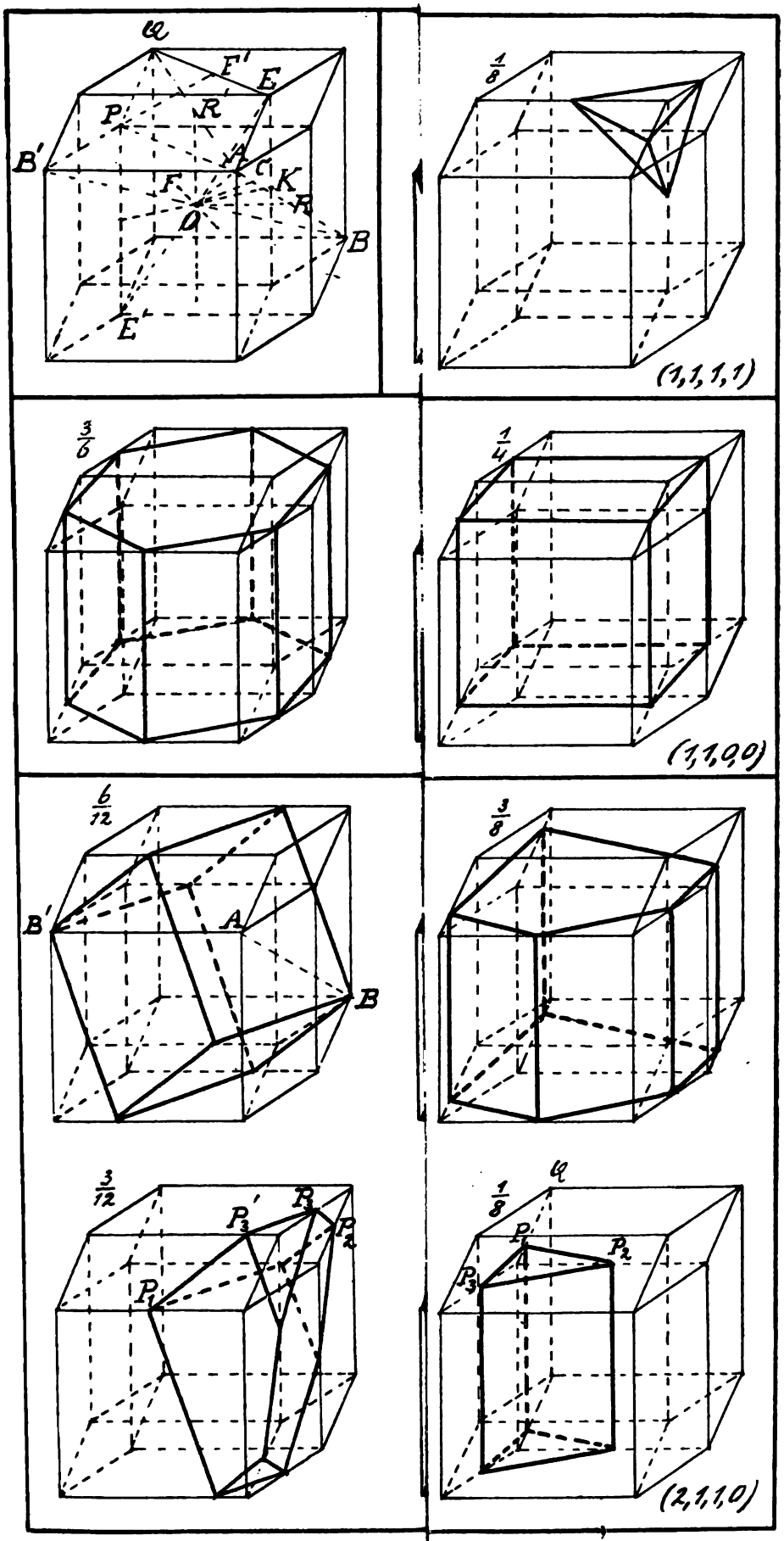
Door in plaats van een viervoudig oneindig net (C_8) een blok van k^4 cellen C_8 te snijden kan men ook weer afleiden, hoe men een der vormen $D_n^{(k)}$ van k-maal grooter lineaire afmeting uit de boven gevonden stukken D_n kan opbouwen. We laten dit echter na, om niet te uitvoerig te worden.

5. *Het geval* (2, 1, 1, 0). — Bij de behandeling van het geval (1, 1, 1, 0) hebben we gezien, dat het optreden der nul in het symbool prisma's met de standvastige hoogte 2 doet vinden, waardoor het vierdimensionale vraagstuk zich tot een driedimensionaal vraagstuk herleidt. Zoo komen we hier dan te staan voor de beschouwing van de doorsnee (2, 1, 1) van het net van kuben, wat in allerlei opzicht voor de driedimensionale ruimte het analogon vormt van die der doornee (3, 1, 1, 1) in R_4.

Stellen we ons voor, dat de ruimte, waarin het geval (2, 1, 1) zich afspeelt, den bovenkubus der achtcel bevat en het hoekpunt P — zie de eerste der 20 figuren — tot oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel met de door dit punt gaande ribben tot assen, de ribbe PQ tot met het cijfer 2 van (2, 1, 1) overeenkomende as wordt aangenomen, dan is het middelpunt F' van het bovenvlak [1]) van dien kubus het punt (2, 1, 1) en PF' dus de as loodrecht op de reeks der snijvlakken. Nu volgt uit den rechthoek $APQE$ met de zijden $AE = 2$, $AP = 2\sqrt{2}$, dat AQ loodrecht staat op PF' en de punten A en Q zich op PF' dus in hetzelfde punt projecteeren. Dus vindt men de projectie der acht hoekpunten van den beschouwden kubus op PF' door de projecties (1, 2, 1) van de zijvlakken met PA en QE tot diagonalen zoo naast elkaar te plaatsen, dat de laatste 1 van de eerste met de eerste 1 van de laatste samenvalt, waardoor de stratificatie 1, 2, 2, 2, 1 verkregen wordt, die door verdubbeling met het oog op boven- en grondkubus in 2, 4, 4, 4, 2 overgaat. Hieruit volgt dan het op de eerste plaat opgegevene. Zet men nu — tot de tweede plaat terugkeerende — op de drie door P gaande ribben van den kubus in de aangenomen onderstelling, dat PQ met de 2 van (2, 1, 1) overeenstemt, van P af stukken $\frac{1}{2}$, 1, 1 uit, dan ontstaat — zie de laatste figuur — de driehoek $P_1P_2P_3$, die het bovenvlak vormt van het met de breuk $\frac{1}{8}$ overeenkomende driezijdige prisma, en hieruit ontwikkelen zich dan de doorsneden $\frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}$ geheel als boven werd opgegeven. Van driehoek $P_1P_2P_3$ is de lijn, die P_1 met het midden van P_2P_3 verbindt, een as met de periode twee, of, om dit eenvoudiger uit te drukken, een lijn van symmetrie, en deze lijn is evenwijdig aan de diagonaal AQ van de eerste figuur. In elken stand van het snijvlak heeft de figuur van doorsnee de

[1]) Eigenlijk is het onjuist bij den bovenkubus van een bovenvlak te spreken; natuurlijk wordt hier bedoeld het vlak dat *voor ons oog* in de teekening als bovenvlak verschijnt.


(2, 1, 1, 0) C_8
k
f
r


ω
F'
E'
P
R
B'
A
C
K
F
Q
R
B
E
1/8
(1,1,1,1)
3/6
1/4
(1,1,0,0)
6/12
B'
A
B
3/8
3/12
P3
P2
P1
ω
1/8
P1
P2
P3
(2,1,1,0)

snijlijn van dit vlak met het vlak $APQE$ tot lijn van symmetrie; in verband hiermee wordt de voor het geval $\frac{4}{8}$ nog gave ruit, die zich bij het volgen van den omgekeerden weg naar het geval $\frac{1}{8}$ toe evenwijdig aan zich zelf zoo door den kubus beweegt, dat het hoekpunt Q de ribbe QP' doorloopt, door het grondvlak van den kubus volgens een loodlijn op de lijn van symmetrie gesneden. Denkt men zich in de gekozen ruimte van den bovenkubus der achtcel het drievoudig net van kuben en neemt men, alvorens tot de snijding door de reeks van evenwijdige vlakken over te gaan de aan grond- en bovenvlak evenwijdige tusschenschotten weg, dan verkrijgt men in het snijvlak een net van ruiten, dat door de weggenomen vlakken in stukken van den gevonden vorm versneden wordt, enz.

In de volgende deelen zullen we tot de bepaling van de ruimtedoorsneden der netten (C_{16}) en (C_{24}) overgaan.

Natuurkunde. — De Heer DU BOIS biedt, mede namens den Heer G. J. ELIAS, eene mededeeling aan uit het Bosscha-Laboratorium: *„De invloed van temperatuur en magnetisatie op selectieve absorptiespectra"*.

§ 1. Nadat de ongeëvenaarde paramagnetische eigenschappen der verbindingen van zg. zeldzame aardmetalen waren aangetoond [1]), werd er aldra op gewezen dat ook de magneto-optische verschijnselen hier vermoedelijk belangrijke eigenaardigheden vertoonen, en wel in onderstaande bewoordingen: „La polarisation rotatoire magnétique a le signe positif ou négatif pour les composés des différents métaux de cette série, comme d'ailleurs pour ceux de la série du fer. Je n'ai pas pu constater jusqu'ici un effet particulier de l'aimantation sur le spectre d'absorption très caractéristique d'une solution d'erbium fortement paramagnétique; d'ailleurs M. ZEEMAN lui-même l'avait dejà cherché en vain pour le spectre d'émission de l'erbine chauffée. Des expériences sont en préparation pour déterminer la rotation dans les raies d'absorption mêmes et aux alentours immédiats". [2])

[1]) H. DU BOIS & O. LIEBKNECHT, Ann. d. Physik (4) 1 p. 196, 1900; St. MEIJER, Ann. d. Physik (4) 1 p. 664, 1900.

[2]) H. DU BOIS, Rapp. Congr. de Phys, 2 p. 499, Paris 1900; Ann. d. Phys. (4) 7 p. 944, 1902.

Nadat intusschen door SCHMAUSS, BATES en WOOD uitkomsten waren medegedeeld, wier overeenstemming veel te wenschen overliet, konden de bedoelde proeven eerst in 1906 in dit laboratorium worden voortgezet en verkreeg een onzer inderdaad eene eigenaardige dispersiekromme van de magnetische draaiing binnen en nabij een smal absorptiegebied [1]). Tevens bleken dergelijke bepalingen met velerlei moeilijkheden gepaard te gaan, die slechts met bijzondere, ad hoc geconstrueerde hulpmiddelen kunnen worden overwonnen; ook zijn gelijktijdige metingen van andere optische eigenschappen der absorbeerende stoffen volledigheidshalve wenschelijk; dit meer uitgebreide onderzoek wordt thans met zulke verbeterde hulpmiddelen voortgezet.

Bij de hierboven aangehaalde eerste negatieve proeven kon eenige directe inwerking der magnetisatie in den vorm eener verplaatsing van de onscherpe absorptiebanden eener waterige erbiumoplossing, m.a.w. een ZEEMAN-effect in den gewonen zin visueel niet worden waargenomen; de toen gebruikte tralie was trouwens dezelfde als die bij het onderhavige onderzoek dienst deed. Uiteraard is de waarneming van laatstgenoemd effect veel eenvoudiger en gemakkelijker uitvoerbaar dan een behoorlijke en afdoende meting der draaiing. Intusschen is het verband tusschen deze beide uitingsvormen van éénzelfde verschijnsel zoo innig, dat het ééne onbepaald blijft zonder de kennis van het andere.

De heer JEAN BECQUEREL Jr. [2]) hervatte een dergelijk onderzoek met de smallere en scherpere absorptiebanden van zekere uiterst zeldzame en kleine kristalfragmentjes, over die wij niet konden beschikken — xenotiem, tysoniet, parisiet e. a., waarvan de spectra indertijd door HENRI BECQUEREL Sr. waren bepaald [3]). Tevens werd de reeds min of meer bekende invloed der temperatuur op zulke spectra nader onderzocht. De belangrijke hierbij verkregen uitkomsten mogen als bekend worden ondersteld.

§ 2. Bij eene vroegere poging tot rangschikking van alle elementen volgens hunne magnetische eigenschappen en die hunner verbindingen werd het volgende opgemerkt:

„Les éléments nouvellement reconnus: hélium, argon [4]), néon, „krypton, xénon, n'ont pas encore été déterminés; il n'est guère

---

[1]) G. J. ELIAS, Physik. Zeitschr. **7** p. 931, 1906 (Erbiumchloried).

[2]) J. BECQUEREL, Compt. Rend **142** pp. 775, 874, 1144, 1906. **143** pp. 769, 890, 962, 1133, 1906. **144** pp. 132, 420, 592, 682, 1032, 1336, 1907. **145** pp. 413, 795, 916, 1150, 1412. Verg. ook Physik. Zeitschr. **8** pp. 632, 929, 1907.

[3]) H. BECQUEREL, Ann. Chim. & phys. (6) **14** p. 170, 1888.

[4]) Onlangs bevestigd door P. TÄNZLER, Ann. d. Physik. (4) **24** p. 931, 1907.

„probable qu'ils soient autres que diamagnétiques. On peut classer „63 autres éléments, dont 37 diamagnétiques, 22 paramagnétiques, „4 ferromagnétiques à la température ambiante; tandis qu'en 7 cas „(Be, Mg, Sc, Nb, La, Ta, Th) la classification nous paraît encore „plus ou moins douteuse. Dans le système naturel à masses atomi- „ques croissantes, on peut distinguer 7 séries d'éléments paramag- „nétiques consécutifs, qui les comprennent tous, le signe de l'élément „ouvrant chaque série étant seul encore incertain; les séries d'ordre „pair sont moins prononcées au point de vue paramagnétique que „celles à numéro impair" [1]).

Deze laatstgenoemde oneven reeksen zijn:

1) *O.*

3) *Sc* (?), *Ti*, *V*, *Cr*, *Mn*, *Fe*, *Co*, *Ni*, *Cu* [2])

5) *La* (?), *Ce*, *Pr*, *Nd*, *Sa*, [*Eu*], *Gd*, [*Tb*, *Dp*], *Er*, *Yb*.

7) *Ra* (?), *Th* (?), *U*.

Nu behooren de bij uitstek het licht selectief absorbeerende anorganische verbindingen [3]) klaarblijkelijk tot deze paramagnetische reeksen; dit verband is zoo opmerkelijk dat het welhaast niet aan toeval te wijten kan zijn

Uit deze rijke keuze van materiaal konden slechts enkele grepen worden gedaan; wij hebben gemeend het onderzoek thans in de eerste plaats te moeten uitstrekken tot betrekkelijk gemakkelijk in grootere stukken verkrijgbare preparaten; o. a. ook tot enkele, als verdunde vaste oplossingen te beschouwen, gekleurde edelgesteenten tot zekere mikrokristallijne preparaten, maar ook tot amorphe smeltingsproducten en tot glazige vaste oplossingen in een amorph substraat, b. v. borax of glas. De kristalstructuur geeft aanleiding tot complicaties, die de verschijnselen zeer ingewikkeld maken, al zijn zij op zich zelve ook merkwaardig genoeg. Een en ander kan een vrij uitgebreid waarnemingsmateriaal opleveren, wellicht van belang in verband met moleculaire theoriën omtrent vaste en vloeibare stoffen.

Met de beschikbare kryomagnetische inrichting konden wij preparaten in vloeibare lucht aan een sterk magnetisch veld blootstellen; in enkele gevallen hebben wij aldus den *gelijktijdigen* invloed der beide factoren, temperatuur en magnetisatie, kunnen bestudeeren.

§ 3. Voor de waarneming of opmeting der absorptiespectra dienden, behalve een handspectroscoopje, naargelang der omstandigheden:

---

[1]) Rapp. Congr. d. Phys. **2** p. 487, Paris 1900.

[2]) O. Liebknecht & A. P. Wills, Ann. d. Physik (4) **1** p. 186, 1900.

[3]) Verg. H. Kayser, Handb. d. Spectroscopie **3**; Leipzig 1905.

1. Een spectrometer van RAPS [1]) met een prisma van zwaar loodglas; dispersie C—F omstreeks 7.5°.

2. Een volgens onze aanwijzing door de firma C. ZEISS vervaardigde lichtsterke autocollimator, waarvan eene beschrijving spoedig zal verschijnen; dispersie C—F circa 25°.

3. De door ROWLAND aan de universiteit alhier geschonken concaaftralie, door den heer RUBENS welwillend te onzer beschikking gesteld; de straal bedraagt omstreeks 4 m., het aantal lijnen 5684 per cm. De opstelling was in rechthoekigen driehoek met bewegelijke constante hypothenuse; in het spectrum kwam een schaaldeel (halve m.m.) overeen met 0.23 $\mu\mu$.

De calibratie dezer instrumenten volgens golflengten geschiedde met behulp der lijnen van waterstof, helium, kalium en die eener kwikbooglamp, tusschen de grenzen 434 en 770 $\mu\mu$.

De lichtbronnen waren naar gelang der vereischte verlichting 1. een „Nernststaaf", 2. een "Lilliput" booglampje (2 Amp.), 3. een booglamp met horizontaal gerichte en langzaam roteerende positiefkool (25 Amp.), 4. zonlicht.

De poolstukken van den grooten ring-electromagneet hadden spleetvormige resp. rechthoekige openingen, waarop bij de dioptrische bepaling van den magneetaxialen stralengang gelet werd. De kryomagnetische inrichting was de vroeger gebruikte [2]); het peil der vloeibare lucht werd bij den onderkant der openingen gehouden; daarbij was het preparaat meestal in een dikke koperen omlijsting gevat teneinde het zoo gelijkmatig mogelijk te tempereeren.

Buiten het veld werd gebruik gemaakt van een kleinen vacuumbeker met onverzilverde strooken ter waarneming; de temperatuurvariaties moesten zoo geleidelijk mogelijk plaats grijpen teneinde het springen en barsten der preparaten te beperken.

Het gebruik van hoogere temperaturen tot omstreeks 200° levert met den ook pyromagnetisch in te richten toestel geen bezwaar op; wij hopen daarop bij gelegenheid nog terug te komen.

Uitkomsten.

§ 4. Wij behouden ons voor later de volledige beschrijving der opgemeten absortiespectra elders te geven; in dit bestek bepalen wij ons uiteraard tot enkele hoofdkenmerken. De golflengten zijn in $\mu\mu$ uitgedrukt met een onzekerheid van niet meer dan 0,3 $\mu\mu$.

Eerste reeks. De bekende, vrij smalle absorptiebanden van

[1]) A. RAPS, Zeitschr. f. Instr. Kunde, **7** p. 269, 1887.

[2]) H. DU BOIS & A. P. WILLS, Verh. D. Phys. Ges. **1** p. 169, 1899. — F. C. BLAKE. ibid. **9** p. 295, 1907.

zuurstof (o. a. 476,7—477,6) speelden bij dit voorloopig onderzoek slechts eene ondergeschikte hinderlijke rol; immers bij het dompelen der te onderzoeken preparaten in vloeibare lucht verontreinigen zij hunne absorptiespectra, waarmede behoorlijk rekening dient te worden gehouden. Het is ons nog niet gelukt het absorptiespectrum van de sterk paramagnetische vloeibare zuurstof in een veld van voldoende intensiteit waar te nemen. Van belang is hier ook O_3, NO_2 en NO_3 [1]).

§ 5. Derde reeks. Hier komt vooral het chromium in aanmerking, dat zijn naam ontleent aan zijne gekleurde verbindingen, die veelal dichroïsme en de bekende kleurwisseling bij temperatuurverandering vertoonen Wij onderzochten:

Chroomaluin. [Cr K $(SO_4)_2$]; verdunde nog groene waterige oplossing: Bij 18° lichte band van 662,7—672,5; flauwere band 688,1—726,4. Een plaatje aluin van 2 m.m. dikte vertoonde in vloeibare lucht vrij smalle banden.

Chroomkaliumoxalaat [$Cr_2 K_6 (C_2 O_4)_6 + 6 H_2 O$]; sterk dichroïtische (rood-blauw) kleine monokline kristallen, die op een dekglas werden gekit en geslepen tot op ongeveer $^1/_2$ m m dikte.

Polarisatievlak || lange ribben: bij 18° sterke band 698,1--703,7; bij — 193° lag deze 696,4—701,4.

Polarisatievlak ⊥ lange ribben: bij 18° sterke band 697,5—703,5; bij — 193° lag deze 696,4—701,4.

Een waterige oplossing vertoonde bij 18° een zwaren band 693,2—702,3. waarvan het maximum bij 695,4—699,3 lag; verder een zeer zwakke band 708,4—711,0.

Een oplossing in glycerine had dien zwaren band bij 18° van 694,9—699,4. Bij een temperatuur boven die der vloeibare lucht (ruw geschat op — 130°): zwakke band 659,3—664,9 (wellicht niet enkelvoudig), zwakke band 669,0—671,2, sterkere band 674,7—676,8; halfschaduwgrens bij 681,8. Zeer zware band 694,8—698,1, schaduw tot 700,3; begin van absorptiegebied bij 706,0 [2]).

„*Chroomborax*", verkregen door samensmelten van 5—15 % chroomfluoried met watervrijen borax, op de wijze der bij de analytische scheikunde gebruikelijke boraxparels; geslepen, gepolijst en gevernist ter verkrijging van luchtbestendigheid: smaragdkleurige amorphe plaatjes, ongeveer 3 mm dik.

Bij 18° lichte band 673,7 —681,4; onscherpe onduidelijke band 695,3—736,9. Bij — 193° lichte band 672,6—680,8; onscherpe band 692,3—747,6.

[1]) E. Warburg & G. Leithäuser. Ann. d. Physik (4) **23**, p. 209, 1907.

[2]) E. Wiedemann, Wied. Ann. **5** p. 515, 1878. W. Lapraik, Journ. f. prakt. Chemie (2) **47** p. 307, 1893. G. B. Rizzo, Nuov. Cim. (3) **35** p. 132, 1894.

Natuurlijke smaragd [$Be_3Al_2(SiO_3)_6$]; hexagonaal, door enkele permille Cr_2O_3 gekleurd; merkbaar dichroïtisch (grasgroen-zeegroen). Waardeloos niet helder doorzichtig lichtgroen gekleurd exemplaar, op het laboratorium met evenwijdige facetten voorzien, dikte 6 mm:

In het *gewone* spectrum bij 18° vrij sterke band 679,0—680,7, iets sterkere band 682,4— 685,0; bij — 193° zware band 678,2—679,5 en nog zwaardere band 681,8—683,4,

In het buitengewone spectrum waren de banden veel bleeker maar op dezelfde plaatsen, terwijl hunne betrekkelijke breedte verwisseld was.

§ 6. *Robijn* [Al_2O_3]; rhomboëdrisch, vaste oplossing van weinig Cr_2O_3; dichroïtisch (purperrood-steenrood). Door de welwillendheid van den Heer M. A. Wolff—de Beer, directeur der Amsterdamsche diamantslijperij alhier, mochten wij over verscheidene natuurlijke zoowel als kunstmatige robijnen beschikken. Laatstgenoemd ruw smeltingsproduct komt van uit Parijs in den vorm van kegeltjes in den handel [1]); door deze te spliiten verkrijgt men stukken van vrij gelijkvormige kleur en kristallographische orientatie, zooals met den dichroscoop valt waar te nemen. Hieruit werd op het laboratorium met carborundum een kwadratisch plaatje ($7 \times 7 \times 3$ mm) geslepen en gepolijst, waarvan een ribbe de asrichting bevatte; daarmede werden de meeste proeven gedaan. Er is geen reden om te vermoeden dat natuurlijke robijn andere eigenschappen zoude vertoonen dan de nagebootste.

Deze steen absorbeert groen en geel licht. In de aangehaalde onderzoekingen van J. Becquerel vonden wij enkel in 't kort opgemerkt dat „eene tusschen (657) en 676 liggende groep in vloeibare lucht verdwijnt, terwijl de band bij 697 fijner en de band bij 705 breeder en intensiever wordt als bij gewone temperatuur"; van magnetischen invloed is daarbij geen sprake [2]).

Verder werd robijn door Miethe nader onderzocht, die de beide voornaamste absorptiebanden bij 694 en 696 vond, met een breedte van circa 0.4 $\mu\mu$, benevens 6 banden van minder beteekenis. Hij beschreef tevens het merkwaardige fluorescentiespectrum; dit laatste hebben wij thans niet nader onderzocht, daar de heer Miethe zijne proeven daaromtrent wenschte voort te zetten [3]).

§ 7. Met den spectrometer vonden wij in het *gewone* spectrum van robijn: Bij 18° sterke band 692,4—692,6; zeer sterke band 693.9—694,2; bij —193° sterke lijn 691,7; sterkere lijn 693,2. Er heeft dus

[1]) M. Dubois, Compt. Rend. **134** p. 840, 1902; A. Verneuil, ibid. **135** p. 791, 1902
[2]) J. Becquerel. Physik. Zeitschr. **8** p. 932, 1907 (Sept.).
[3]) A. Miethe, Verh. D. physik. Ges. **9** p. 715, 1907 (Nov.)

bij temperatuursverlaging een verplaatsing van 0.7 $\mu\mu$ naar violet plaats, waarbij de onderlinge afstand der dubbellijn echter de waarde 1.5 $\mu\mu$ behoudt, zooals die ook tusschen de middens der beide banden bestaat. In het *buitengewone* spectrum: bij 18° band 692,5, zwakkere band 694,1; bij —193° zwakke lijn 691,7, zwakkere lijn 693,2. In beide spectra nog ongeveer 8 banden van minder beteekenis die hier niet alle kunnen worden besproken.

In het buitengewone traliespectrum zijn de banden zoodanig verbleekt dat eene juiste waarneming onmogelijk is; hier werd dus enkel het *gewone* spectrum opgenomen. Ofschoon de banden niet scherp begrensd zijn werden zij toch door beide waarnemers vrijwel op dezelfde breedte geschat, en wel bij 18°: band 692.5 op 0.23, band 694,1 op 0.33 $\mu\mu$. In een longitudinaal magnetisch veld, geschat op omstreeks 30 Kilogauss bedroegen deze breedten 0,37 resp. 0.49 $\mu\mu$ bij een eenigszins naar violet verplaatsten stand; de verbreeding was dus 0,14 resp. 0.16 $\mu\mu$.

Met ongepolariseerd licht waren de verschijnselen vrijwel dezelfde zooals de photographie ze dan ook vertoont; deze werd op een met alizarineblauw en nigrozine rood gesensibiliseerde LUMIÉRE B-plaat bij een expositie van 20 minuten verkregen: 1. geeft de ligging aan der robijnbanden in het zonnespectrum; 2. die in het booglampspectrum buiten het veld; 3. dezelfde in het veld. De schijnbare verbreeding wordt blijkbaar veroorzaakt door een doublet van onscherpe banden, zooals uit den samenhang met het volgende wel voldoende blijkt.

Werd de robijn ten naastenbij op —193° afgekoeld dan bleek band 692,5 tot op ongeveer 0,06, band 694,1 op 0,08 $\mu\mu$ breedte in te krimpen. Inderdaad heeft men alsdan met *absorptielijnen* te doen, die, hoewel dikker dan FRAUNHOFER'sche lijnen, toch niet meer breeder zijn dan b. v. die van dichten natriumdamp; door dezen geleidelijken overgang wordt elk onderscheid tusschen absorptiebanden en lijnen weggevaagd.

In het veld werd thans een gewoon ZEEMAN-effect waargenomen als volgt: lijn 692,5 gesplitst in twee componenten op gemiddelden afstand 0,25 $\mu\mu$, met tusschenruimte iets minder helder dan de spectrale achtergrond; de componenten van lijn 694,1 hadden een afstand van 0,35 $\mu\mu$ met nog ietwat donkerder tusschenruimte; bij beiden viel een kleine verplaatsing naar violet te bespeuren. De splitsing bij —193° schijnt dus grooter te zijn dan bovenstaande verbreeding bij 18°. Deze numerieke bepalingen kunnen uiteraard nog niet als definitief of nauwkeurig worden beschouwd. Het verschijnsel was zeer duidelijk zichtbaar en het bedrag der splitsing is blijkbaar vrij groot. Hoofdzakelijk tengevolge van ijzeling was slechts een

kortstondige waarneming mogelijk, die het photographeeren met lange expositie verijdelde. Daar ons $\lambda/_4$-plaatje ongeschikt bleek konden wij de circulaire polarisatie nog niet bepalen; ook gedoogde onze inrichting de waarneming van een transversaal-effect bij equatorialen stralengang niet; wij hopen deze bezwaren mettertijd te ondervangen.

§ 8. Van de overige metalen der derde reeks bestaan o.a. nog de volgende verbindingen met karakteristieke absorptiespectra[1]): Saffier, $CoCl_3$, $KMnO_4$, $FeCl_3$, laatstgenoemd met sterk negatieve draaing, alsmede eenige samengestelde rhodaniden. Hiervan onderzochten wij:

Cobaltammoniumrhodanied $[(NH_4)_2Co(CNS)_4]$ in vrij verdunde alcoholische oplossing: bij 18° onscherpe band 594—663; absorptiegrens bij 696. Bij —193° werd de blauwe oplossing vast maar bleef doorzichtig, hoewel bleeker van kleur; de banden worden smaller naarmate de temperatuur daalt; men ziet ten slotte onscherpe banden 580—586, 597—605, en 618—620; schaduw tot 645.

§ 9. Vijfde reeks. Deze omvat thans, volgens toenemende atoomgewichten van 140 tot 175 gerangschikt: Cerium, *Praseodym*, *Neodym*, *Samarium*, [*Europium*], Gadolinium, [*Terbium*, *Dysprosium*], *Erbium*, Ytterbium[2]); de drie tusschen [ ] geplaatste waren in 1899 nog niet verkrijgbaar; de verbindingen der overige bleken toen sterk paramagnetisch, met een maximum voor erbium. De zichtbare absorptiespectra der cursief gedrukte metaalverbindingen vertoonen de bekende in hooge mate selectieve eigenschappen; wellicht zoude een nauwkeurig onderzoek ook voor de „witte" verbindingen van Ce, Gd en Yb iets dergelijks opleveren, al was het ook slechts in het ultraviolette of infraroode spectrum. Wij hebben ons voorloopig bepaald tot verbindingen van neodym en erbium, die in 1899 bij de magnetische metingen waren gebruikt. Aan de heeren Rosenheim en R. J. Meijer zijn wij ten zeerste verplicht voor hunne welwillende hulp op dit speciale chemische terrein.

Neodymnitraat $[Nd(NO_3)_3.6H_2O]$. Bij matige verhitting verdrijft men het kristalwater en houdt men bij afkoeling een fraai rozenroode amorphe doorzichtige massa, die eenigen tijd onveranderd blijft. Aan

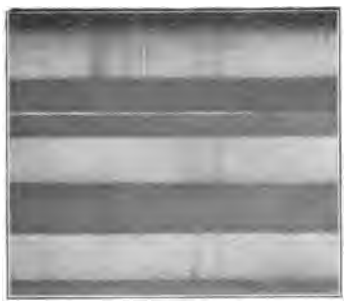
---

[1]) Verg. J. M. Hiebendaal, proefschrift Utrecht 1873.

[2]) Verg. R. J. Meijer, Handb. der anorg. Chemie 3 p. 129—338, Leipzig 1906. Scandium, Yttrium en Lanthaan hebben lagere atoomgewichten en diamagnetische verbindingen. Holmium en Thulium zijn thans nog niet genoegzaam chemisch bepaald. Over de absorptiespectra verschenen onlangs nog de volgende onderzoekingen: W. Rech, Zeitschr. wiss. Photogr. 3 p. 411, 1906; — Helen Schaeffer, Physik. Zeitschr 7 p. 822, 1906; B. Schaefers. Dissert. Bonn 1907.

H. E. J. G. DU BOIS en G. J. ELIAS. „De invloed van temperatuur on magnetisatie op selectieve absorptiespectra."

violet ⟵ ⟶ rood



1. Robijnbanden in zonnespectrum.
2. Robijnbanden buiten het veld bij 18°.
3. Robijnbanden in het veld bij 18°.

de oppervlakte en de wanden der reageerbuis vormt zich onder wateropneming mettertijd een soort kristallijn licht schuim, hetgeen wij konden verzamelen en met behulp van Zaponvernis tot dunne schijfjes verwerken.

Het amorphe nitraat vertoonde talrijke banden, waaronder een vrij goed gedefinieerde bij ongeveer 625 (met begeleider 626). Bij —193° had deze een breedte van 0,3, in een veld van ongeveer 25 Kilogauss eene van 0,4 $\mu\mu$. Door een toeval merkten wij op dat het kristallijne nitraatschuim bij —193° veel smallere banden vertoont dan een amorph laagje van eenzelfde dikte; o.a. in de nabijheid van *D*: 577.0, 578.7, 579.7, 582.0, 583.0; van deze hebben de drie laatste een breedte van omstreeks 0,15 $\mu\mu$; in het veld schijnt een zeer geringe, niet wel meetbare, verbreeding plaats te grijpen. De 5 scherpe banden in het groen tusschen 500 en 525 gedragen zich analoog.

Neodymmagnesiumnitraat [$2\,Nd(NO_3)_3.\,3\,Mg(NO_3)_2.\,24\,H_2O$]. Geeft bij een behandeling als voren analoge producten.

Het bezit een sterk geleed absorptiespectrum, met een groot aantal smalle banden, die vooral bij de temperatuur der vloeibare lucht duidelijk te voorschijn treden. Vermeldenswaardig is vooral het volgende, waargenomen bij eene dikte van ongeveer 10 m.m. der amorphe massa:

Bij 18° een absorptiegebied, zich uitstrekkend van 499.2—537.7, bestaande uit 499.2—513.9 zeer sterke band, naar violet zeer onscherp; 516.9—528.2 zeer sterke band, dan schaduw; en 534.8 smalle zwakke lijn; 535.6—537.1 band met maxima 535.6—536.4 en 536.7—537.1.

Bij —193° strekt dit gebied zich uit van 498.1—526.6 en bestaat uit: 498.1—512.6 zeer sterke band, dan banden bij 513.7—514.1, 514.7—515.3, 516.1—516.7, dan schaduw, 517.6—518.5 band, dan weer schaduw, en 519.2—526.0 zeer zware band.

Een ander merkwaardig gebied strekt zich bij 18° uit van 616.9—629.3, hetwelk bestaat uit 616.9—618.9 zwakke band; 621.0—622.9 dito; 624.8—626.9 vrij sterke band; 628.3—629.3 zeer zwakke band. Bij —193° ziet men het volgende: 616.7—617.6 zwakke band; 618.9 fijne, zwakke lijn; 621.1—623.0 zwakke band; 624.7—625.4 band met zwaren fijnen kern; 625.9—626.4 dito; 627.1 fijne zwakke lijn; 628.6 -629.5 zwakke band.

In dunnere lagen vallen deze gebieden nog verder uiteen. Van het gebied 560.1—587.5 b.v. splitst zich aan den rooden kant een vrij smal absorptiegebied af, dat bij verlaging van temperatuur eerst scherper wordt, en vervolgens bij nog lagere temperatuur verdwijnt.

Ook bij dit dubbelnitraat vertoonde het kristallijne schuim scherpere banden bij —193°; de 5 banden in het groen van 500 tot 525, in het bijzonder de eerste en vierde werden in het veld verbreed.

Neodymborax, verkregen door samensmelten van ongeveer 5—10% neodymoxyd met watervrije borax, rose amorphe massa.

Het spectrum ondergaat bij verlaging van temperatuur eveneens belangrijke wijzigingen, doch vertoont over 't algemeen breedere banden dan het voorgaande. In dit opzicht analoog gedraagt zich:

Neodymglas, door de firma SCHOTT & Co. te Jena voor ons vervaardigd (V.S. 5255 en 5256), met 15 % en 20 % ceriet; dit bevat zooveel neodym, dat het rose gekleurd is, en sterke selectieve absorptie vertoont.

§ 10. *Erbiumnitraat* [$Er(NO_3)_3 . 6H_2O$]. Door indamping der oplossing kan men ook dit verkrijgen als amorphe doorzichtige massa, die een absorptiespectrum bezit rijk aan smalle banden, dat echter nog niet nader onderzocht is.

Erbiummagnesiumnitraat [$2\,Er(NO_3)_3 . 3Mg(NO_3)_2 . 24\,H_2O$].

Behandeld evenals het neodymzout; gele doorzichtige massa; neemt gretig weer kristalwater op en wordt kristallijn ondoorzichtig.

Het vertoont evenals het vorige een zeer sterk geleed spectrum, waarvan vooral vermeldenswaard zijn de volgende groepen, gemeten bij een preparaat ter dikte van ongeveer 10 m.m.

Bij 18°: 514.5—527.3 bandengroep, bestaande uit 3 sterke banden, bij 516.9—517.2; 517.7—519.5; 520.5—521.7. Bij —193° wordt dit als volgt: 513.7—521.8 bandengroep, bestaande uit: 513.8—514.0 band; 514.8—514.9 sterke band; 515.1—515.7 band; 516.3—517.2 sterke band; 517.7—519.3 sterke band; 520.1 zwakke lijn; 521.0—521.8 sterke band.

Verder zijn bij —193° merkwaardig een aantal dubbellijnen in het rood, waarvan de voornaamste gelegen zijn bij 641.4 en 642.6; 643.7 en 645.6; 647.7 en 649.4. Bij 18° is van deze lijnen niets te bespeuren.

Het geheele zichtbare spectrum van dit zout bevat ongeveer een 40-tal banden en lijnen, deels zeer zwak, die bij eene dunnere laag geheel verdwijnen.

Erbiumborax verkregen door samensmelten van 15—20 % erbiumoxyd met watervrije borax; geel, amorph, doorzichtig.

Hier heeft verlaging van temperatuur een niet zoo belangrijken invloed. De merkwaardigste bandengroep, bij 18° zich uitstrekkend van 516.7—525.6 bevat drie banden bij 516.9—517.2; 518.0—519.1; 520.6—522.2.

Bij —193° strekt die groep zich uit van 516.2—523.9 en vertoont dan insgelijks drie banden, bij 516.6—517.0; 517.8—519.0 (deze twee vrij scherp); 520.4—522.4 (minder scherp, misschien dubbel).

Erbiumglas werd door de firma SCHOTT & Co. te Jena voor ons vervaardigd. (V.S. 5257, ongeveer als V.S. 3524).

Dit vertoont eenige smalle, doch niet zeer scherpe banden.

De bekende bandengroep in het groen strekt zich bij 18° uit van 516,8—523.0 en bestaat uit: 517.0—517.3 band; 517.8 lijn; 518.4—518.9 band; 519.1 onduidelijke lijn; 520.0—520.2 band; 521.1—521.8 band.

Bij —193° strekt ze zich uit van 516.5—522.6 en vertoont het volgende: 516.5—517.2 band; 517.9 lijn; 518.2—518.6 band; 519.0 lijn; 519.8—520.0 band; 521.0—521.2 band; 521.8—522.3 band.

Verder vertoonen zich bij —193° nog de navolgende lijnen:

648.9; 651.6; 655.5; 657.6, alle zwak. Bij 18° ziet men zwakke banden bij 650.0—654.0 en 656.4—661.1.

§ 11. Zevende reeks. Wij onderzochten voorloopig:

Uranylnitraat [$UO_2(NO_3)_2 + 6\,H_2O$], monokline kristallen, niet merkbaar dichroïtisch; geslepen plaatje van 2 m.m. dikte. In het blauw de bekende banden, waarvan wij aanstippen: bij 18° twee zwakke onscherpe banden 467.5—471.6 en 484.9—488.0; bij —193° zware band 467.9—469.7 (wellicht niet enkelvoudig), schaduw tot 470.3; zware scherpe band 484.5—484.9, dan schaduw; idem 485.3—485.7, schaduw tot 486.3.

Berlijn, 27 Febr. 1908.

Plantkunde. — De Heer S. H. KOORDERS biedt een mededeeling aan: *„Bijdrage N°. 1 tot de kennis der Flora van Java."*

§ 1. Over de standplaatsvoorwaarden, verspreidingsmiddelen en geographische verspreiding van de in Java, vooral in het hooggebergte, wildgroeiende soorten der Myricaceae.

Blijkens de in KOORDERS en VALETON, Bijdrage N°. 9 tot de kennis der boomsoorten van Java [in Mededeelingen uit 's Lands Plantentuin N°. LXI (1903) p. 99—105] gepubliceerde kritische systematische onderzoekingen over de *Myricaceae* van Java worden op dit eiland slechts twee wildgroeiende en beide meestal boomachtig wordende soorten, namelijk:

1. *Myrica javanica* BL. (= *M. macrophylla* MIRB.) en
2. *Myrica longifolia* TEIJSM. & BINNENDIJK (= *M. integrifolia* ROXB. = *M. Lobbii* TEIJSM. & BINN.) aangetroffen.

De door mij ingevolge bekomen ministeriëele opdracht thans in

's Rijks Herbarium te Leiden en Utrecht ingestelde botanische onderzoekingen over de hooggebergte flora van Java geven mij niet zelden eene niet ongewenschte aanleiding om hier door aanvullingen en verbeteringen terug te komen op hetgeen, vooral op grond van mijne op talrijke reizen in Java enz. gemaakte botanische aanteekeningen, over de geographische verspreiding en standplaatscondities door mij in die gezamenlijk uitgegeven publicatie in het licht werd gegeven.

Een dergelijk geval doet zich voor bij de familie der *Myricaceae* omdat een in zeer recente buitenlandsche uitgave [1]), naar het schijnt, o.m. mijne waarnemingen over het hoofd gezien zijn geworden, welke ten deele in 1903 in de genoemde Bijdrage N°. 9 t/d kennis d. Boomsoorten van Java van KOORDERS & VALETON [2]), ten deele reeds in een daaraan voorafgegane kleine, en in het buitenland zeer moeilijk toegankelijke hollandsche publicatie [3]) medegedeeld zijn geworden. Het betreft hier eenige waarnemingen over de geographische verspreiding en speciaal ook van de verspreidingsmiddelen van een alpine boomsoort van Java, n.l.: *Myrica javanica* BLUME.

§§ 1. MYRICA JAVANICA BL.

§§§ 1. GEOGRAPHISCHE VERSPREIDING EN STANDPLAATSVOORWAARDEN.

§§§§ 1. Verspreiding en standplaats-condities buiten Java.

In Noord-Oost-Celebes verzamelde ik in 1895 op het Sapoetangebergte op 1400—1500 meters zeehoogte van een aldaar wildgroeiend boompje de thans te Buitenzorg in het Mus. Botan. Hort. Bog. bewaarde herbariumspecimina, die ik slechts zóó weinig verschillend vond van javaansche specimina van *Myrica javanica* BLUME, dat ik ze daarmede identificeerde [4]) en ook thans nog als conspecifisch

---

[1]) ERNST, Prof. Dr. A., Die neue Flora der Vulkaninsel Krakatau mit 2 Kartenskizzen und 9 Landschafts- und Vegetationsbildern. — Zürich 1907. — Op p. 61 staat hier o.a.: „Auch bei früchtefressenden Tauben sollen sich im Kropfe und Magen häufig Samen van ansehnlicher Grösse vorfinden und BECCARI gibt an, . . ." (l. c. p. 61).

[2]) KOORDERS & VALETON l.c. in Mededeelingen uit 's Lands Plantentuin LXI (1903) p. 102.

[3]) KOORDERS, Spontane en kunstmatige reboisatie op den Sendoro in Tijdschr. v. Nijverheid en Landbouw van Nederl. Indie, Deel 51 p. 241—287 (met een kaart).

[4]) KOORDERS, S. H., Verslag eener botanische dienstreis door de Minahasa, tevens eerste overzicht der Flora van N. O. Celebes met 10 kaarten en 3 platen in Mededeelingen uit 's Lands Plantentuin No. XIX (1898). — Batavia — 's-Gravenhage) p. 615.

beschouw. Blijkens een exemplaar, dat ik in het Kgl. Botan. Museum te Berlijn zag, werd deze soort ook door WARBURG in N.-O.-Celebes verzameld en door dezen plantkundige als specifiek-verschillend van de genoemde javaansche beschouwd. Behalve uit Celebes en Java zijn in de literatuur geen groeiplaatsen van *Myrica javanica* BLUME opgegeven. En ook in de verzamelingen van de Rijks Herbarien van Leiden en Utrecht zag ik nog geen andere buiten Java verzamelde exemplaren.

Aangezien ik hier thans nog geen beschikking heb over de te Buitenzorg in het Herbarium liggende specimina, die ik in Celebes verzamelde, kan ik over de door WARBURG gemaakte, afscheiding van zijne Celebesspecimina in verband met de specifieke waarde der reeds door mij waargenomen (l. c. p. 615) verschillen tusschen de door mij verzamelde Celebes- en Java-exemplaren van *Myrica javanica* BL. nog geen nadere gegevens verstrekken. Voorloopig blijf ik dus de door mij op den Sapoetan-bergtop van Celebes verzamelde boomachtige *Myrica* identiek beschouwen met de *Myrica javanica* BL. der javaansche bergtoppen.

§§§§ 2. Horizontale en verticale verspreiding en standplaats-condities op Java.

Door mij zijn in de jaren 1888—1903 ter zake blijkens Herb. Kds in Mus. Hort. Bogor de volgende waarnemingen gedaan, welke voor een deel reeds in KOORDERS en VALETON Bijdrage t/d kennis d. booms. v. Java IX (1903) p. 102 in het licht gegeven zijn.

In West en Midden-Java boven 1500 m. In de Preanger op den Gede op 3000 m. nabij den top, op den Galoenggoeng aan het meer van Telagabodas op 1650 m. en 1700 m. In Tegal op den Slamat op 1800 m. en hooger boven Simpar. In res. Banjoemas op den Prahoe en het Dieng-plateau op 2500 m. In de res. Kedoe op den Merbaboe, Oengaran en Telemåjå op 1800 m. en hooger. Tot dusver nog niet verder oostwaarts gevonden. In Java veelal gezellig groeiend en samen met een 10—15 andere altijdgroene boomachtige soorten alpine bosschen vormende. In de alpine streken thuis behoorende en beneden de alpine streken alleen bij solfataren, en, welke rijk zijn aan minerale zouten en dus uitsluitend op physiologisch-droge gronden. Bij voorkeur boven 1800 m. zeehoogte tot op 3000 m. gevonden en op Java nog niet beneden 1500 m. waargenomen.

Als klimatische standplaatsvoorwaarden voor Myrica javanica schijnen de volgende genoemd te mogen worden : De soort verdraagt

de lage luchttemperatuur, de intense insolatie en geringe luchtvochtigheid van JUNGHUHN's alpine zone, maar schijnt het al te droge oost-javaansche klimaat niet te kunnen verdragen.

Zij groeit nog op zeer dorre en rotsachtige gronden, die door langdurige afspoeling vermoedelijk arm zijn aan oplosbare minerale bestanddeelen, en tiert ook nog welig op physiologisch-droge plaatsen, zooals nabij solfatara's, enz. In de heete laagvlakte wordt de soort echter geheel gemist. Zij kan zoowel veel zonlicht als beschaduwing vrij goed verdragen, en is ook tegen sterken wind goed bestand.

Phanerogame parasiten zijn op deze alpine boomsoort door mij nog niet, maar parasitische schimmels zijn daarop door mij wèl waargenomen, o.a. in de residentie Kedoe de volgende: *Myxosporium candidissimum* RASIBORSKI, *Microcyclus Koordersii* HENNINGS en *Pestalozzia Myricae* KOORD.

Zelfs ook op de grenzen van het natuurlijke verspreidingsgebied van Myrica javanica nam ik deze parasitische schimmels nooit in zóó groote mate op die boomsoort waar, dat daardoor alleen aan de verspreiding der volwassen planten op Java grenzen gesteld zouden worden. Wèl acht ik het op grond van mijne infectieproeven met conidien van *Pestalozzia Myricae* niet uitgesloten, dat deze schimmel aan de ontwikkeling van kiemplanten dezer alpine boomsoort natuurlijke grenzen stelt, omdat door die proeven toen gebleken is, dat bij te sterke beschaduwing en te groote vochtigheid van den grond de meeste Myrica-kiemplanten, zelfs in een streek, binnen het natuurlijke verspreidingsgebied dezer boomsoort, door deze parasitische schimmel onherroepelijk gedood worden.

Tevens bleek uit die proeven, dat Myrica-zaden, die in vol zonlicht (bijv. op kale berghellingen, op naakte rotsen en rapillilagen) ontkiemen van de genoemde, soms zeer schadelijke parasitische schimmelsoort geen ernstig nadeel zullen ondervinden.

Nadere studie van sommige parasitisch optredende, vooral van phanerogamen-kiemplanten aantastende schimmelsoorten, zal vermoedelijk in sommige schijnbaar onoplosbare problemen van geographische verspreiding tot een goede verklaring leiden en wel speciaal waar andere oorzaken voor het plotseling ontbreken van een plantensoort op schijnbaar gunstige standplaatscondities geen voldoend uitsluitsel geven.

Zelfs in bergstreken, waar de oorspronkelijke vegetatie door in-

[1]) KOORDERS, Botanische Untersuchungen über einige in Java vorkommende Pilze, besonders über Blätter bewohnende parasitisch auftretende Arten in Verhand. Koninkl. Akademie v. Wetenschappen, Deel XIII, Tweede Sectie (1907) No. 4, p. 183, 218 en 224).

grijpen van den mensch, zooals bijv. in Midden-Java op den Sendoro 1891 de oorspronkelijke vegetatie soms over mijlen ver door brand geheel vernield is geworden, ontstaan door natuurlijken opslag in betrekkelijken korten tijd uitgestrekte bosschen van *Myrica javanica.* Toen ik in 1903, dus 12 jaar na den genoemden brand, den Sendorovulkaan bereisde, waren de in 1891, tot op het gesteente geheel kaal gebrande, boven de boomculturen van het Boschwezen gelegene en in de geciteerde publicatie nader omschreven [1]) hooggebertehellingen, over een uitgestrektheid van vele duizenden hectaren, vooral op de vochtigere Zuidwestzijde van dezen berg, met alpine, natuurlijk opgeschoten alpineboschjes bedekt, waarin Myrica javanica op veel plaatsen zóó domineerde, dat soms van bijna homogene Myrica-bosschen gesproken mocht worden. Als eerste boomachtige pionier van vele der kaalste afgebrande plekken was blijkens in loco door mij ingewonnen inlichtingen, reeds een jaar na den brand, behalve *Myrica javanica,* temidden der ontstane uitgebreide graswildernissen, vooral *Albizzia montana* Benth gezellig groeiend opgetreden, eene soort, die ook elders in de hoogste bergstreken van Java herhaaldelijk door mij als een der allereerste pionieren van het bosch op de afgebrande hellingen der vulkaankegels is waargenomen.

Hier zij nog het volgende aangestipt. Op grond van de door mij in de verschillende deelen van Java vele jaren achtereen ingestelde onderzoekingen schijnt het mij toe, dat de tot de phanerogamen behoorende pionieren der op de door brand of andere oorzaken van hun plantenkleed geheel beroofde vulkaanhellingen en andere in het binnenland van Java, Sumatra en Celebes gelegen terreinen (o. a. verlaten bouwvelden) nieuwe vegetatie, onafhankelijk van de zeehoogte en ook onafhankelijk van de families of geslachten, waartoe die pionieren gerekend worden, gekarakteriseerd zijn door de volgende met de genoemde eigenaardige standplaatsvoorwaarden verbandhoudende eigenschappen:

1. Zonder uitzondering zijn het blijkens hun bouw en verspreiding *xerophyten,* die ook onder buitengewoon ongunstige condities van waterverzorging en transpiratie nog in leven blijven.

2. Behalve „waterarmoede" kunnen nagenoeg al deze soorten direct zonlicht goed verdragen, terwijl vele ook door groote lichtarmoede niet gedood worden.

3. Het zijn bijna alle snelle of zeer snelle groeiers, die spoedig en

[1]) Vergel. Koorders Spontane en kunstmatige reboisatie op den Sendoro l. c.

ook steeds zeer rijkelijk zaad voortbrengen. Vele der kruidachtige pioniers der vegetatie dragen reeds binnen enkele maanden rijkelijk vrucht, terwijl verscheidene der boomachtige pionieren reeds binnen twee jaren bloeien en zaad produceeren.

4. De zaden zijn nooit groot en blijken òf door wind òf door dieren (vooral endozoisch) bijzonder gemakkelijk verspreid te worden.

5. De meeste niet-boomachtige soorten zijn anemophor, terwijl de meerderheid der boomachtige pionieren zoophor schijnt te zijn. En zooals reeds a priori verwacht kon worden ontbreken soorten met uitsluitend voor verspreiding door water ingerichte zaden geheel en al.

6. Het zijn kruidachtige of houtachtige rechtop groeiende gewassen, terwijl klimplanten slechts bij uitzondering en meestal slechts in gering getal onder de eerste pionieren der nieuwe vegetatie optreden.

7. De boomachtige pionieren, welke bijna alle in de eerste maanden in groei achterblijven bij de vele kruidachtige soorten (o. a. bij vele *Gramineae* en *Compositae*) zijn alle gekenmerkt door een groote mate van weerstandsvermogen tegen beschaduwing en door een bijzonder krachtig ontwikkeld wortelstelsel en het bezit van een bladerenkroon, die door afsluiting van het licht de daaronder staande niet-boomachtige soorten in den regel reeds binnen een of twee jaar na de kroonsluiting der opgeschoten boomjes doet afsterven.

8. In verband met hunne xerophytische natuur, is het na het boven sub 1 medegedeelde niet bevreemdend, dat onder de eerste pioniers der vegetatie op Java soms [1]) enkele elders onder andere standplaatsvoorwaarden tijdelijk of steeds epithytische levende gewassen op naakte lavastroomen en op verlaten steenen gebouwen (bijv. op oude Hindoetempels en op het verlaten fort van Noesakambangan) en ook enkele landhalophyten in het binnenland [bv. *Dodonaea viscosa* (LINN.) JACQ. in alpine streken van Midden- en Oost-Java] in grooter of kleiner aantal op den bodem groeiend optreden.

§§§ 2. VERSPREIDINGSMIDDELEN.

De hier volgende waarnemingen werden door mij gedeeltelijk in 1891 op een botanische reis in Midden-Java gedaan en in datzelfde

[1]) Vergelijk ook l. c. p. 73, SCHIMPER, Pflanzengeographie p. 90 en 102 en de in die publicaties geciteerde literatuur.

jaar neergeschreven, maar eerst eenige jaren later in het licht [1]) gegeven in een artikel luidende: „verspreiding van Myrica-zaden door vogels" in een verhandeling over: Spontane en kunstmatige reboisatie van den Sendoro.

„In verband met de omstandigheid, dat *Myrica javanica* REINW. (*Pitjisan, jav.*) door ervaring gebleken is een der belangrijkste boomsoorten voor reboisatie van den Sendoro te zijn, en vooral ook met het oog op het feit, dat er omtrent de verspreidingsmiddelen en verspreidingsagentiën van alpine javaansche planten, in het bijzonder ook omtrent zoophore soorten, nog geene andere numerieke gegevens in de literatuur schijnen voor te komen verdienen de bedoelde waarnemingen onze aandacht.

Daar de besachtige steenvruchten der *Myrica*-boomen eetbaar zijn, het zaad door den steenkern beschermd is en steeds een groot aantal vogels, vooral duiven en koetilans zich in de *Myrica*-reboisaties ophouden, lag de veronderstelling voor de hand, dat de vruchten door deze vogels genuttigd en zóó verspreid worden.

De krop- en maaginhoud van 3 in de *Myrica*-boschjes boven Kledoeng (1450 m. zeehoogte) geschoten vogels bleek mij bijna uitsluitend te bestaan uit onbeschadigde, tendeele nog door vruchtmoes omgeven Myrica-steenkernen en wel:

van één groene duif 231 stuks, van één tweede groene duif 144 stuks en van één koetilan (Ixos haemorrhous) 4 stuks nog in den steenkern besloten zaden van *Myrica javanica.*

In krop en maag van één duif zaten dus niet minder dan 231 onbeschadigde „zaden" van den Myricaboom. De magen der beide groene duiven bevatten alleen het roode vruchtmoes met de nog in den steenkern besloten Myrica-zaden zonder andere voedselresten, maar de krop en de maag van den koetilan bevatte ook nog eenige resten van insecten.

Daar al de onderzochte steenkernen nog geheel onbeschadigd en alleen van het vruchtvleesch-omhulsel bevrijd waren, laat het m. i. geen twijfel of de door deze vogels uitgeworpen steenkernen zullen uitstekend kiemen, en men mag dus aannemen, dat vooral de groene duiven veel bijdragen tot de verspreiding der zaden van *Myrica javanica* (= Pitjisan, javaansch) op den G. Sendoro.

Hier zij nog opgemerkt, dat de bovenbedoelde uit de 3 vogelmagen verzamelde Myrica-steenkernen door den Houtvester

---

[1] KOORDERS, S. H., Spontane en kunstmatige reboisatie van den Sendoro op Java (in Tijdschrift van Nijverh. en Landb. v. Nederl. Indie, Dl 51, p. 241—287, met een kaart). Vergl. ook: VALETON, Th. De verspreiding van vruchten door dieren (in Teijsmannia IV p. 219).

E. Tobi te Kledoeng op mijn verzoek uitgezaaid zijn, om na te gaan of inderdaad de kiemkracht door het verblijf in den krop of in de maag niet geleden heeft. (Koord. l. c. p. 45—47)".

Aan het bovenstaande kan thans nog het volgende toegevoegd worden. Toen ik in 1903 in de hierbovengenoemde streek terugkwam vernam ik bij monde van den boschopziener, aan wien t. z. t. door den houtvester (thans Hoofd-Inspecteur, Chef van den dienst v/h Boschwezen in N.-Indië), E. Tobi, welwillend op mijn verzoek opgedragen was om de bedoelde Myrica javanica-„zaden" ter kieming uit te leggen, dat de door hem ontvangen uit den vogelkrop en maag afkomstige „zaden" alle uitmuntend gekiemd waren en zich verder goed ontwikkeld hadden.

Door deze waarnemingen kan het dus als bewezen beschouwd worden, dat sommige vogels en vooral een soort der bedoelde groote groene wilde duiven (vermoedelijk *Vinago Capellei* of een verwante soort van het geslacht *Vinago*) op Java zeer veel kunnen bijdragen tot de verspreiding van de meergenoemde alpine boomsoort, dat soms 100% van de genuttigde „zaden" goed kiemt en dat het aantal in den krop van één enkelen vogel aangetroffen Myrica-steenkernen 231 bedragen kan.

Omtrent verspreiding van Myrica-zaden op Java door andere dieren zijn mij nog geen gegevens bekend.

§§ 2. MYRICA LONGIFOLIA Teijsm. & Binnendijk.

§§§ 1. Verspreiding buiten Java: onbekend.

§§§ 2. Verspreiding en standplaatsvoorwaarden op Java. Door Miquel (Flora Ind. Bat. I, 1, p. 872) wordt opgegeven, dat *Myrica longifolia* Teijsm. & Binn. die blijkens Koord. & Valeton Bijdr. Booms. Java IX (1903) p. 104 synoniem is met *Myrica Lobbi* T. & B., op den Megamendoeng in de Preanger gevonden zoude zijn. Dit is sedert nog niet bevestigd geworden, hoewel zoowel ik zelf als mijn personeel bij herhaling in diezelfde streek herbarium verzameld hebben. Slechts op één enkele plaats heb ik deze soort in wildgroeienden staat teruggevonden, namelijk in Midden-Java, in de residentie Samarang op den G. Telemojo boven Sepakoeng op ongeveer 1700 m. zeehoogte en wel op een G. Pendil genoemden zijtop van den G. Telemojo, op nogal drogen vulkanischen gruisbodem, verstrooid groeiend in altijdgroen, heterogeen bosch; waarin

ik o.a. ook *Weinmannia Blumei* PLANCH. (Saxifragaceae) en *Wendlandia Junghuhniana* MIQ. (Rubiaceae) aantrof. Op de genoemde oorspronkelijke groeiplaats van *Myrica longifolia* TEIJSM. & BINN. ontbrak evenwel *Myrica javanica* BL. geheel.

§§§ 3. Verspreidingsmiddelen. De verspreiding dezer soort geschiedt hoogst waarschijnlijk ook door vogels, die de eetbare besachtige steenvruchten eten. Nadere gegevens omtrent verspreidingsmiddelen dezer zeldzame soort ontbreken. De vruchten zijn echter zóó gelijk aan die van *Myrica javanica* BL., dat ik de geringe verticale en horizontale verspreiding van *Myrica longifolia* T. & B. in geen geval aan moeilijke verspreidingsmiddelen, maar aan andere de standplaatsvoorwaarden rakende oorzaken meen te moeten toeschrijven.

§ 2. Over Oreiostachys, GAMBLE, een door Dr. A. PULLE in Java op 1600 meter zeehoogte verzameld nieuw geslacht der Gramineae-Bambuseae.

Door den Directeur van het Herbarium der Rijks Universiteit te Utrecht, den Heer Prof. Dr. F. A. F. C. WENT werd mij, toen ik in het Herbarium van het Kgl Botanisch Museum te Dahlem-Berlijn [1]) in

[1]) Hier zij nog met buitengewone erkentelijkheid gewag gemaakt van de door de Heeren Professor Dr. A. ENGLER, Dir. v. d. Koninklijken Botanischen tuin te Dahlem. Berlijn en Dr. D. PRAIN, Directeur van den Koninklijken Botanischen tuin te Kew-Londen, jegens mij betoonde hulpvaardigheid. Prof. Dr. A. ENGLER had de welwillendheid om de door hem persoonlijk op zijne laatste „Forschungsreise" in Java, vooral ook in de hoogste bergstreken van West-Java en ook op den Tengger verzamelde planten met bijbehoorende herbariumaanteekeningen, niet alleen gedurende mijn verblijf te Dahlem-Berlijn, maar ook hier in Leiden voor bearbeiding ter leen aan mij af te staan.

Dr. PRAIN had de buitengewone voorkomendheid om op mijn in 1907 van uit Berlijn gedaan verzoek alle in het Royal Herbarium te Kew, t. z. t. van de Directie van Lands Plantentuin te Buitenzorg ten geschenke ontvangen herbarium-doubletten van de in 1899 door mij op het Tenggergebergte in Oost-Java verzamelde en in het Natuurk. Tijdschr. v. N. I (Dl. 60 p. 242—280 en 370—374, Dl. 62 p. 213—266) door mij behandelde Phanerogamen aan mij (toen te Dahlem-Berlijn) ter leen te zenden tot nadere bestudeering, met vergunning om die collecties ook in Holland nog verder ter bestudeering in leen te mogen houden. Wanneer men bedenkt, dat al deze specimina tusschen de vele honderdduizenden herbarium exemplaren verspreid (namelijk volgens de speciesnamen) reeds geïnsereerd lagen, toen ik het bedoelde verzoek deed, dan zal men begrijpen van hoe buitengewone wetenschappelijke liberaliteit en behulpzaamheid, zoowel van den Directeur van de Royal Botanic Gardens, als ook van den wetenschappelijken staf van het Royal Herbarium in Kew deze handelwijze blijk geeft.

Deze collectiën zijn thans bij mij nog in bearbeiding.

1907 bezig was met systematische en plantengeographische onderzoekingen over de Hooggebergte-Flora van Java, welwillend het zeer hoog door mij gewaardeerde aanbod gedaan om eene tot genoemd Herbarium behoorende, in 1906 in Java door Dr. A. PULLE bijeengebrachte collectie hooggebergte-planten mede in bewerking te willen nemen. Bij de voorloopige determinatie dezer collectie, die mij bleek uitmuntend verzameld en met zeer veel zorg geconserveerd en geëtiketteerd te zijn, vond ik een fraai bloeiend specimen van een *Bambusea*, waarvan de determinatie (o. a. door het ontbreken van de juist voor Bambusaceën-determinatie bijna onmisbare vruchten) ook te Berlijn bijzonder groote moeilijkheden opleverde. Daarop zond ik het genoemde herbariumspecimen aan den Heer J. S. GAMBLE, F. R. S. in Engeland. Deze botanist, de schrijver van de voortreffelijke monographie der Indische *Bambuseae* (gepubliceerd in Dl. VII van de Annals of the Royal Gardens of Calcutta) slaagde er niet dan na buitengewoon veel moeite in vast te stellen, dat het een nieuw geslacht was van de *Gramineae-Bambuseae-Arundinarieae* nabij het geslacht *Sasa* SHIBATA en dat het wellicht verwant zoude kunnen blijken met de, zoowel aan MIQUEL als aan BÜSE slechts in blad bekende, en door BÜSE sub n. 7 op p. 393 in de Plantae Junghuhnianae en door MIQUEL sub n. 15 op p. 420 in Dl. III zijner Fora van N.-I. onder den naam *Bambusacea spec. indet.* (zonder meer) slechts kort beschreven, door JUNGHUHN in Java verzamelde plant. GAMBLE veronderstelde terecht, dat het authentiek van JUNGHUHN's herbariumspecimen wellicht in het Leidsche Rijks Herbarium aanwezig zoude zijn. Een daarop door mij in 's Rijks Herbarium ingesteld onderzoek bevestigde mij op verrassende wijze de door GAMBLE geuite vermoedens. Want in de eerste plaats slaagde ik er in om aldaar het authentiek van JUNGHUHN's plant te vinden in een pakket der van de erven BÜSE hier in Leiden zeer lang geleden terug ontvangene JUNGHUHN'sche *Gramineae* van Java en wel gelukkig in voortreffelijk geconserveerden toestand en nog voorzien, niet alleen van de authentieke determinatie-etikette van BÜSE (anno 1854), maar tevens ook nog van de oorspronkelijke, en naar ik vermoed in 1839 door JUNGHUHN bij de inzameling gemaakte, herbarium-aanteekeningen. In de tweede plaats slaagde ik er te Leiden in om door vergelijking der aan de bloeiende takken van PULLE's herbarium-specimen zittende (in grootte sterk gereduceerde) bladeren met de steriele, normaal-ontwikkelde bladeren van JUNGHUHN's plant de reeds door GAMBLE vermoede conspecifische identiteit van beide planten te constateeren. En bij de vergelijking van de te Leiden bewaarde authentieke etiketten van BÜSE en van JUNGHUHN bleek mij nog, dat blijkbaar in den tekst van BÜSE l. c. 393—394 (die in

Miquel l. c. 420, zonder kritiek en verkort bij de „*Bambuseārum species dubiae*" geciteerd is) een lapsus calami ingeslopen is, die mij toeschijnt daaruit voortgevloeid te zijn, dat Büse de oorspronkelijke Junghuhn'sche vindplaats-etiketten niet nauwkeurig gelezen heeft.

Dit bleek mij o.a. uit het volgende:

1. Op de genoemde inzamelings-etiketten van Junghuhn kon ik namelijk zonder moeite duidelijk lezen: „J. Sunda-landschap. 3—6000′ Bumbu-ŏ-ŏ", terwijl Büse l. c. 394 opgeeft: „*Habitat Javae sylvas intactas Pekalongan, altit.* 3—6000′. Junghuhn. — *Incolae hanc vocant Bambu oŏ, fide* Junghuhn. — *Species propria scandens aut ramis pendentibus?*" (Büse l. c.).

Nu ligt echter Pekalongan niet in de Soenda-landschappen (= de tegenwoordige Preanger-regentschappen), maar in Midden-Java.

2. Voorts kan Junghuhn nooit bij Pekalongan op 3—6000 voet verzameld hebben, omdat Pekalongan in de laagvlakte ligt.

3. Junghuhn heeft veel herbarium op en nabij de hoogvlakte van Pengalengan verzameld.

4. Blijkens de te Leiden bewaarde authentieke-specimina hebben de bij en op het Pengalengan-plateau door Junghuhn verzamelde planten, dikwijls dergelijke etiketten als de hier besproken *Bambusacea spec. indet.* van Junghuhn.

5. Het bedoelde herbariumspecimen van Dr. Pulle n. 3173 is ook nabij het Pengalengan-plateau in de Preanger, ook op 1600 M. verzameld geworden en de soort is nog niet van elders bekend geworden. In verband hiermede schijnt het mij niet twijfelachtig, dat Miquel's woorden „bij Pekalongan enz." voor Junghuhn's Bambusacea geschrapt moeten worden en vervangen door: in de Preanger, op 3000—6000 voet (1000—2000 m.), vermoedelijk bij of op het Pengalengan-plateau, in 1839 door Junghuhn ontdekt en aldaar volgens Junghuhn *Bambu-ŏ-ŏ-* (soendaneesch) geheeten.

Blijkens welwillende mondelinge mededeeling van Dr. Pulle werd de door hem verzamelde Bambusacea n. 3173 door de Soendaneezen *Awi-eueul* genoemd. Hierbij volg ik voor dezen naam dezelfde schrijfwijze, die door wijlen dr. Brandes en de meeste andere schrijvers voor deze soendaneesche *eu*-klank gebezigd werd.

Nu houd ik de door Junghuhn in loco genoteerde Soendaneesche *Bambu-ŏ-ŏ* een minder juiste schrijfwijze[1]) voor *Awi-eueul*, want

[1]) Op Java worden alle Bamboe-soorten door de inlanders constant tot een der volgende, geslachten gebracht: *Bamboe* (maleisch) = *Awi* (soendaneesch); *Pring* laagjavaansch) = *Dĕling* (hoogjavaansch).

De soorten worden dan door de inlanders aangeduid door achtervoeging van een „soortsnaam" achter den „geslachtsnaam". Zoo onderscheiden bijv. de Soendanezen van Z. W. Banten bij Tjemara [zie Koorders Plandkundig woordenboek voor de

bij de Soendanezen heet bamboe niet „*bambu*", maar „*awi*" en de „soortsnaam" *o-ŏ* zal vermoedelijk wel beter geschreven worden *eu-eu* of wellicht juister *eueul.*

Merkwaardig is hierbij het feit, dat de inlanders hier blijkbaar in een tijdsverloop van meer dan een halve eeuw ter aanduiding van eene aan de wetenschap zoo lang bijna onbekend gebleven plantensoort nagenoeg denzelfden inlandschen „soortnaam" *eueul* of *eueu* bewaard hebben. Dit feit is daarom ook van belang, omdat het hierdoor mogelijk zal zijn om met behulp van dezen constanten inlandschen naam, voor verder onderzoek, o. a. ter verkrijging der nog aan de wetenschap onbekend gebleven vruchten en zaden, de soort in loco te doen opsporen.

De specimina van het hierboven behandelde JUNGHUHN'sche inzamelings nummer 143 zijn thans in het Herb. Lugd. Bat. geregistreerd als H. L. B. n. 901, 7—617—618—619- 620.

Blijkens zijne reisbeschrijving [1]) heeft JUNGHUHN in October 1839 in dezelfde hooge bergstreken, waar Dr. PULLE zijn bloeiende *Oreiostachys* vond, eenigen tijd gebotaniseerd. Hij vermeldt evenwel in die publicatie de later door BÖSE l. c. en door MIQUEL l. c. als *Bambusacea spec. indet* aangeduide plant niet. Ik althans heb daaromtrent niets in die reisbeschrijving kunnen vinden, dat zekerheid geeft omtrent het hierboven door mij geuite, en ook thans nog waarschijnlijk geachte vermoeden, dat JUNGHUHN's steriel specimen in 1839 verzameld is geworden.

De Heer Dr. JONGMANS, 2de Conservator aan 's Rijks Herbarium te Leiden was zoo voorkomend mij te vergunnen om een klein fragment van het door mij onderzochte JUNGHUHN'sche steriele herbariummateriaal van MIQUEL's *Bambusacea spec. indet.* n. 15 aan den Heer GAMBLE ter leen te zenden.

De Heer GAMBLE was daardoor in staat om zijne diagnose der bladeren aan te vullen en tevens de door mij geconstateerde conspecifische identiteit van Herb. JUNGHUHN n. 143 en Herb. PULLE n. 3173 nader te bevestigen.

De door den Heer J. S. GAMBLE F. R. S. welwillend aan mij

boomen van Java in Meededeelingen v. Lands Plantentuin No (1894) p. 136] o.a. de volgende soorten: *Awi-bitoeng* (soend.), *Awi hideung* (soend.), *Awi-majang* (soend.), *Awi-boeloe* (soend.), enz. Hieruit blijkt reeds, dat de door JUNGHUHN genoteerde plantennaam bestaat uit den maleischen „geslachtsnaam" *Bamboe* en den soendaneeschen, minder juist geschreven „soortsnaam" *ŏ — ŏ* (in de plaats van het juistere *eu eu l*).

[1]) JUNGHUHN. Uitstapje naar de bosschen van de gebergten Malabar, Wajang en Tiloe op Java, (in Tijdschr. voor Natuurl. Geschied. en Physiol. VIII (1841) 349-412.

afgestane geslachts- en soorts-diagnose van *Oreiostachys Pullei* GAMBLE laat ik onder betuiging van mijn hartelijken dank voor zijne belangelooze hooggewaardeerde hulp hieronder onveranderd volgen, onder bijvoeging van een kort resumé over vindplaats, inlandsche namen enz.

In de onderstaande diagnose zijn, blijkens door mij ontvangen schriftelijke mededeeling de bloemen en bloemdragende twijgen naar het Utrechtsche herbariumspecimen (PULLE n. 3173) en de bladeren naar bovenbedoeld fragment van het Leidsche specimen (JUNGHUHN n. 143 = *H. L. B.* n. 901, 7—617—618—619—620) door den Heer GAMBLE beschreven geworden.

„**Oreiostachys,** GAMBLE *gen. nov.* Spiculae 1 *florae, ovato-oblongae, secus ramos paniculae in racemis brevibus dispositae; floribus hermaphroditis.* Glumae *subcoriaeae, mucronato-acuminatae, multinerves, dorso apicem versus pallide villosae;* 4—6 *vacuae inferiores, ab imo gradatim auctae; florens vacuis simillima; palea etiam glumis similis sed bimucronata, ecarinata, dorso interdum corrugata, quam gluma villosior, dorso basi interdum rachilla terminali munita.* Lodiculae 3, *breves, nunc obtusae, nunc spathulatae, pilis longis sericeis ciliatae.* Stamina 6; *filamenta longissima glabra; antherae elongatae, loculis inferne acutis.* Ovarium *glabrum, ovoideum vel cylindricum, apice incrassatum; stylus basi* 3-*fidus, stigmatibus plumosis.* Caryopsis *non visa.*"

„*Gramina suffruticosa, culmis maxime fistulosis; pseudophyllis scabris, apice fimbriatis, apiculo brevi.* Folia *petiolata, cum vaginis articulata, nervulis transversis nullis vel obscuris.* Inflorescentia *in culmis aphyllis; ramis longis vel brevibus verticillatim dispositis, sed vaginis et pseudophyllis munitis, quam maxime decomposita.*" (J. S. GAMBLE *msc.* 28. *I.* 1908 *in Herb. Acad. Rheno-Traject et Herb. Acad. Lugd. Bat.*)

„**Oreiostachys Pullei,** GAMBLE *spec. nov.* Suffrutex *scandens* 10 *m. altus* (*fide cl.* PULLE); *culmi inter nodos maxime fistulosi; nodi annulati; psendophylla straminea, scabra, ore longe fimbriata, apiculo brevi.* Folia *tenuiter membranacea, lineari-lanceolata, apice longe setaceo-acuminata, basi inaequaliter cuneata, margine et apice scabra, supra laevia infra paullo asperula et ad costam prope basin villosula,* 12—20 *cm. longa,* 1—3 *cm. lata; costa subtus lucens, nervi utrinque* 5—8 *haud conspicui, nervulis transversis perobscuris; vaginae glabrae striatae, apice ciliis paucis albis rigidis munitae; ligula longiuscula puberula serrata.* Inflorescentia *in culmis florentibus; paniculae ad nodos verticillatae, ramis longis vel brevibus, ad* 10—12 *cm.*

longae; spiculae in ramulis racemosis pauciflorae, acutae, 10—15 *cm. longae,* 2—3 *mm. latae,* 1-*florae; rhachis angulata, sinuata, scabra; bracteae multe foliosae foliis similes sed vaginis majoribus.* Glumae vacuae 4—6 *subcoriaceae, ovatae, longe mucronatae,* 5—15-*nerves, nervulis transversis obliquis frequentioribus, dorso scabrae et sub apice albo-villosae; gluma florens vacuis simillima,* 12 *mm. longa* 5 *mm. lata; palea etiam florenti similis et aequilonga, bimucronata, dorso rotundata, ecarinata.* Lodiculae 3, 1—1.5 *mm. longae, basi cuneatae, apice obtusae, longe albo-fimbriatae; interdum elongatae, spathulatae (an in floribus morbosis?)* 7—8 *mm. longae, longe ciliatae.* Stamina 6; *filamenta longissima; antherae* 7—7.5 *mm. longae.* Ovarium 1—2 *mm. longum, glabrum; stigmatibus plumosis plerumque plus minus coalitis.* Caryopsis *non visa.* (J. S. GAMBLE *msc* 28. *I.* 1908 *in Herb. Acad. Rheno-Traject. et Herb. Acad. Lugd. Bat.*)

Geographische verspreiding: Buiten Java: onbekend. Op Java: Uitsluitend in West-Java en alleen in de Preanger op 1000—2000 meter zeehoogte. Hier alleen vertegenwoordigd door 2 inzamelingsnummers 1) in oerwoud, vermoedelijk in 1839 bij of op het Pengalengan-plateau (JUNGHUHN n. 143, in Herb. Lugd. Bat. sub n. H. L. B. 908,7—617—618—619—620. — alleen bladeren dragende takken) en; 2) op het Wajang-Windoe-gebergte nabij de theeplantage Malabar (echter niet op den berg van dezen naam) in oerwoud op 1600 m. zeehoogte (A. PULLE n. 3173 in Herb. Rheno-Traject. Halfheester, klimmend, 10 meter hoog. Katjes donker violet. Bladerloos bloeiend. Deze bamboesoort heeft volgens in loco verkregen mondelinge mededeelingen sedert zeer langen tijd niet gebloeid. Bloeiende takken verzameld op 25 Juni 1906). — Inlandsche naam: *Awi-eueu of*? *Awi-eueul* (soendaneesch) bij Pengalengan.

Deze soort is plantengeographisch zeer interessant, omdat zij 1) de monotype representant is van een geslacht, dat blijkens het onderzoek van GAMBLE (zie boven) met het in Japan voorkomende, maar in den Maleischen Archipel ontbrekende geslacht *Sasa* SHIBATA, nauwer verwant blijkt te zijn dan met de in dezen archipel door talrijke wildgroeiende soorten vertegenwoordigde andere geslachten der *Gramineae-Bambuseae*; 2) omdat op Java blijkens mijne talrijke reizen bijna alle wildgroeiende Bambusaceae alleen beneden 1600 m. voorkomen, terwijl *Oreiostachys Pullei* GAMBLE, door PULLE op 1600 m. en door JUNGHUHN zelfs tot op 2000 m. zeehoogte wildgroeiend waargenomen is geworden, 3) omdat deze soort voor Java endemisch is en aldaar tot enkele bergstreken van de Preanger gelocaliseerd schijnt te zijn.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 104*a* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: Dr. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. W. H. KEESOM. „*Over de toestandsvergelijking van eene stof in de nabijheid van het kritisch punt vloeistof-gas. I. De storingsfunctie in de nabijheid van den kritischen toestand.*

§ 1. De groote samendrukbaarheid en daarmede samenhangende eigenschappen (geringe verandering van thermodynamischen potentiaal bij isothermische samendrukking, enz.) van de stof in de nabijheid van het kritisch punt vloeistof-gas — die men uit de oorspronkelijke toestandsvergelijking van VAN DER WAALS en nog meer uit zijne nieuwere voorstellingen omtrent de samendrukbaarheid van het molecuul vindt [1]) — hebben tengevolge, dat bij het maken van gevolgtrekkingen uit waarnemingen in de nabijheid van dien toestand op verschillende omstandigheden gelet moet worden van welke men anders bij het experimenteel onderzoek naar de toestandsvergelijking van eene homogene eencomponentige stof — welk onderzoek dat der verzadigingsgrootheden enz. omvat — kan afzien. Het is bekend hoe moeilijk het thermodynamisch evenwicht tengevolge dier groote samendrukbaarheid te bereiken is, ja, dat herhaaldelijk verschijnselen [2]) bij het kritisch punt als abnormale en met de opvattingen van ANDREWS-VAN DER WAALS strijdende zijn beschreven, bij welke eenvoudig het thermodynamisch evenwicht nog niet was ingetreden, hetzij doordat wegens de langzame diffusie van zeer kleine hoeveelheden bijmengsel kleine verschillen in samenstelling waren blijven bestaan (KUENEN Meded. N°. 8, Oct. '93, N°. 11, Mei en Juni '04), of doordat temperatuurverschillen, ontstaan tengevolge van volumeveranderingen in verschillende deelen van de stof bij overgang van een toestand van temperatuur en druk tot een anderen, nog niet waren vereffend (Meded. N°. 68, Maart en April '01 en N°. 98, Mei '07).

Wanneer het thermodynamisch evenwicht verkregen is door de stof in de nabijheid van het kritisch punt langen tijd op constante temperatuur te houden, door herhaaldelijk omkeeren van het met de stof gevulde toegesmolten buisje (GOUY), of door electromagnetisch roeren (KUENEN), dan heeft men nog te letten op de zwaartekracht, die wegens de groote samendrukbaarheid der stof in dien toestand een grooten invloed [3]) verkrijgt, en, indien aanwezig, op kleine hoe-

[1]) Zie VAN DER WAALS, Zittingsversl. Juni '03,

[2]) Zie voor een overzicht over deze verschijnselen o.a. GRAETZ, WINKELMANN's Handbuch III, 2te Aufl. p. 837.

[3]) GOUY, C. R. 115 (1892) p. 720 en 116, p. 1289. J. P. KUENEN, Meded N°. 17, Mei '95.

veelheden bijmengsel [1]), waarvan de aard en de hoeveelheid bekend is.

Het in rekening brengen van deze invloeden, evenals van die van capillaire en absorptie-verschijnselen aan de wanden van het vat [2]), en die in andere omstandigheden nauwelijks in aanmerking komen, behoort in de nabijheid van het kritisch punt vloeistof-gas tot het bepalen van de *experimenteele toestandsvergelijking van eene stof*, d.i. de betrekking tusschen p, v en T voor eene eencomponentige stof in thermodynamisch evenwicht, onderworpen aan geene andere uitwendige krachten dan den druk van de wanden van het vat.

§ 2. Wat wij in deze mededeeling met de groote samendrukbaarheid in de nabijheid van den kritischen toestand in verband wenschen te brengen zijn eenige eigenaardigheden in de experimenteele toestandsvergelijking in dit gebied. Daartoe vergelijken wij de experimenteele toestandsvergelijking van eene stof in de nabijheid van het kritisch punt vloeistof-gas met eene toestandsvergelijking, die wij de *speciale* [3]) *ongestoorde toestandsvergelijking voor die stof* zullen noemen en die wordt afgeleid door interpolatieformules aan te sluiten bij waarnemingen in gebieden, waar geen storingen, zooals dicht bij het kritisch punt, optreden.

Wij meenen nl. uit de voorhanden waarnemingsresultaten reeds het besluit te kunnen trekken dat de experimenteele toestandsvergelijking zich van de speciale ongestoorde onderscheidt door het optreden van termen, die alleen in de nabijheid van het kritisch punt, voor de bij de bedoelde waarnemingen bereikte nauwkeurigheid, in aanmerking komen en die met de groote samendrukbaarheid in dit gebied in nauwen samenhang zijn. We zullen de samenvatting van deze termen *de storingsfunctie in de toestandsvergelijking in de nabijheid van het kritische punt* noemen.

Om uit de speciale ongestoorde toestandsvergelijking en de storingsfunctie bij den kritischen toestand de voorwaarden van coëxistentie, dampspanningen, vloeistof- en dampdichtheden, te kunnen afleiden, moet onderzocht zijn of het criterium van MAXWELL voor eene eencomponentige stof bij dien toestand al dan niet onveranderd mag worden toegepast.

Voorloopig moeten in deze storingsfunctie blijven opgenomen de

---

[1]) Zie Meded. N°. 75, Nov. '01, N°. 79, Maart '02, N°. 81, Juni en Sept '02, N°. 88 Nov. '03, Suppl. N°. 6, Febr. en Mei '03, N°. 10, Dec. '04, N°. 12, Jan. '07. Over den invloed van de zwaartekracht bij aanwezigheid van een kleine hoeveelheid bijmengsel, zie KUENEN Meded. N°. 17. Mei '95 en KEESOM, Meded. N°. 88 VI, Nov. '03.

[2]) Vergel. VAN DER WAALS, l.c. p. 106 en 107.

[3]) Vergel. Meded. N°. 74, Arch. Néerl. (2) 6 (1901) livre jub. BOSSCHA, p. 881.

storingen teweeggebracht ook door bijmengselen, die chemisch een afzonderlijk bestaan kunnen hebben, doch die men niet heeft weten te verwijderen, en die steeds in bepaalde hoeveelheid optreden, zoolang de aard en hoeveelheid dezer bijmengselen onbekend is. Het onderzoek van stoffen met kleine hoeveelheden bijmengsel[1]) kan nieuwe bijdragen leveren tot een oordeel over de vraag of deze storingsfunctie geheel kan worden gebracht op rekening van bijgemengde stoffen, die chemisch afzonderlijk kunnen bestaan. Zoolang dit niet vaststaat, zal men ook op bijmengselen, die niet op zich zelf kunnen bestaan, doch steeds in zekere hoeveelheid aanwezig kunnen zijn, als electrisch geladen deeltjes, of wel deelen van de stof in grootere dichtheid, die tot als neveldruppels verdeelde dichtheidsverschillen aanleiding geven en die in dit gebied door capillaire krachten zouden kunnen worden in stand gehouden, evenals op door het statistisch evenwicht beheerschte dichtheidsverschillen moeten letten.

Om tot de kennis van een dergelijke storingsfunctie te geraken zijn waarnemingen van grootere nauwkeurigheid noodig over een gebied, dat den kritischen toestand omvat, en dezen ook voldoende dicht nadert. Zij zouden de nauwkeurigheid van $^1/_{5000}$, zooals bij het onderzoek omtrent twee- en een-atomige stoffen en hunne binaire mengsels in het Leidsche laboratorium verkregen wordt, moeten hebben, terwijl de aard en de hoeveelheid afscheidbare bijmengselen tot op $^1/_{10000}$ van het geheel bekend zou moeten zijn[2]).

§ 3. Dat wij tot het bestaan van eene storingsfunctie in de toestandsvergelijking in de nabijheid van het kritisch punt vloeistof-gas besluiten, is gegrond op de volgende gegevens, die tot 3 groepen zijn terug te brengen.

a. In Meded. N°. 74 (Arch. Néerl. (2) 6 (1901) livre jub. BOSSCHA p. 874) werd er op gewezen, dat de waarnemingen van AMAGAT betreffende de isothermen van CO_2 in de nabijheid van het kritisch punt systematische afwijkingen vertoonen van de waarden die men

[1]) Zie p. 659 noot 1. Voor den invloed van kleine hoeveelheden bijmengsel van zwaarvluchtige stoffen zijn van belang de onderzoekingen van M. CENTNERSZWER, ZS. physik. Chemie 46 (1903) OSTWALD Jubelb. p. 427, 61 (1907) p. 356; M. CENTNERSZWER en A. PAKALNEET, ibid. 55 (1906) p. 303, M. CENTNERSZWER en A. KALNIN, ibid. 60 (1907) p. 441.

[2]) Voor een dergelijk onderzoek zou CO_2 wegens de mindere moeilijkheden verbonden aan het voldoende zuiver bereiden en aan het voldoende constant houden der temperatuur, alsmede wegens de kennis die wij reeds omtrent de toestandsvergelijking ervan over een groot gebied verkregen hebben, aangewezen zijn.

verkrijgt uit de speciale ongestoorde toestandsvergelijking, welke toestandsvergelijking uit de in Meded. N°. 71, Juni '01, ingevoerde empirische toestandsvergelijking is afgeleid door de viriaalcoëfficienten zoo te kiezen (Meded. N°. 74 § 4), dat de aansluiting aan de waarnemingen over het geheele waarnemingsgebied, met behoud van de aansluiting aan de algemeene gereduceerde toestandsvergelijking bij eene ver buiten het gebied der waarnemingen vallende gereduceerde temperatuur, zoo goed mogelijk is.

Men verkrijgt eene overeenkomstige reeks van afwijkingen, indien men de in Meded. N°. 88 (Oct. '03) beschreven waarnemingen betreffende CO_2 in de nabijheid van het kritisch punt vergelijkt met de speciale ongestoorde toestandsvergelijking; hierbij gebruik makende van de gereduceerde viriaalcoëfficienten V s. 1 (Meded. N°. 74, p. 884) en de in Meded. N°. 88 gevonden kritische temperatuur en druk.

In Suppl. N°. 14, Jan. '07, bleek dan ook, dat de kritische grootheden, berekend volgens $\partial p/\partial v = 0$, $\partial^2 p/\partial v^2 = 0$ uit de speciale ongestoorde toestandsvergelijking V s. 1, belangrijke verschillen toonen van de experimenteel bepaalde.

Een dergelijk verschil vond AMAGAT (Journ. de phys. (3) 8 (1899) p. 353) toen deze uit de door hem voor CO_2 opgestelde (10 constanten bevattende) toestandsvergelijking de dichtheden van verzadigde vloeistof en damp afleidde. De kromme, die de aldus berekende dichtheden als functie van de temperatuur voorstelt, valt bij lagere temperaturen vrijwel samen met de kromme die uit de waarnemingen volgt; naarmate men de kritische temperatuur meer nadert vertoont de berekende lijn ten opzichte van de waargenomene eene verschuiving in de richting van de kleine dichtheden. Dat die verschuiving echter belangrijk grooter is dan de uit de bovengenoemde berekening in Suppl. N°. 14 volgende, zal althans gedeeltelijk zijn toe te schrijven aan de omstandigheid, dat AMAGAT de vloeistof- en dampdichtheden waarschijnlijk niet uit zijne toestandsvergelijking berekende met behulp van het criterium van MAXWELL, doch eenvoudigheidshalve met behulp van zijne toestandsvergelijking berekende de dichtheden voor welke p de door het experiment voor den verzadigingsdruk geleverde waarde heeft.

b. In Meded. N°. 75, Nov. '01, werd gewezen op het verschil tusschen de uit het isothermennet van AMAGAT betreffende CO_2 afgeleide $C_v = \left[\frac{T}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v\right]_k$ en de uit zijne bepalingen over de verzadigde dampspanning volgende $C_v = \left[\frac{T}{p}\frac{dp_{coëx.}}{dT}\right]_k$, welke waarden voor de

ongestoorde toestandsvergelijking gelijk moeten zijn [1]). Een zelfde verschil, nl. $C_5 = 7.12$, $C_6 = 6.71$, volgde uit de bepalingen betreffende CO_2 van Meded. N°. 88, Oct. '03, welke bepalingen o. a. juist waren ondernomen ten einde omtrent deze eigenaardigheden in het gedrag van de stof in de nabijheid van het kritisch punt meer zekerheid te verkrijgen (zie aldaar p. 545). BRINKMAN (Diss. Amsterdam 1904, p. 43) bevestigde dat verschil niet alleen voor CO_2, doch vond het ook bij CH_3Cl, terwijl MILLS (Journ. phys. Chem. 8 (1904) p. 594, 635; zie ook 9 (1905) p. 402) voor aethyloxyde (RAMSAY en YOUNG), isopentaan en normaal pentaan (YOUNG) verschillen van 10% vindt tusschen C_6 berekend met de formule van BIOT voor de verzadigde dampspanningen, en C_5, die, met inachtneming van de regelmatige verandering van b met de temperatuur [2]), volgt uit de gegevens die RAMSAY en YOUNG (aethyloxyde), YOUNG (isopentaan) en ROSE-INNES en YOUNG (normaal pentaan), ter beoordeeling van de isochoren-vergelijking $p = bT - a$ hebben samengesteld.

c. In Meded. N°. 88, Nov. '03, p. 554, tabel XXII, werden de verzadigde dampspanningen van CO_2 tusschen 25°.55 C. en de kritische temperatuur (30°.98 C.) vergeleken met de formule $log \frac{p}{p_k} = f\frac{(T - T_k)\,T_k}{T^3}$, welke verkregen werd door in de ontwikkeling van $log\ p$ naar opklimmende machten van T^{-1} de tweede macht te behouden [3]). Terwijl voor de andere temperaturen in genoemde tabel de afwijkingen niet grooter dan 0.01 atm. waren, werd voor 30°.82 eene afwijking $W\text{-}R = 0.05$ atm. gevonden [4]). Terwijl het toen waarschijnlijk geacht werd, dat deze afwijking aan eene toevallige waarnemingsfout zou te wijten zijn, is ons intusschen gebleken, dat eene afwijking in denzelfden zin en van ongeveer dezelfde grootte ook voorkomt in de resultaten van andere waarnemers betreffende verzadigde dampdrukken van CO_2 dicht bij het kritisch punt.

---

[1]) M. PLANCK, Wied. Ann. 15 (1882) p. 457; zie ook Meded N°. 75 p. 337. De grootheden C_5 en C_6 worden hier beide verkregen door eene extrapolatie, C_5 bij $v = v_k$ van hoogere temp. tot T_k, C_6 langs de dampspanningslijn van lagere T tot T_k.

[2]) S. YOUNG, Proc. Phys. Soc. London 1894/95, p. 602; zie ook Comm. Phys. Lab. Leiden No. 88 p. 54 noot 1, KEESOM Diss. p. 86.

[3]) Een stap verder ging BOSE, Physik. ZS. 8 (1907) p. 944, die in deze reeds door RANKINE, Misc. Scienstif. Papers pp. 1 en 410, aangegeven ontwikkeling, voor lagere gereduceerde temperaturen de derde macht behield.

[4]) Gelijk uit de kolommen W en R aldaar blijkt, hebben de getallen in de kolom $W-R$ daar alle een verkeerd teeken verkregen.

Vergelijkt men de resultaten der waarnemingen van BRINKMAN, Diss. Amsterdam 1904 pp. 41 en 42, betreffende verzadigde dampdrukken van CH_3Cl en CO_2, met de drukken die door hem volgens eene formule van denzelfden vorm als de bovengenoemde berekend zijn, dan vindt men de volgende verschillen:

voor CH_3Cl ($t_k = 143.°12$):

bij $t = 137.°54$, $138.°92$, $140.°26$, $141.°66$, $142.°02$

$W-R = +0.02$, -0.01, -0.02, $+0.03$, $+0.08$;

voor CO_2 ($t_k = 31.°12$):

bij $t = 24.°24$, $26.°08$, $28.°46$, $29.°86$, $30.°40$

$W-R = +0.02$, -0.02, $+0.03$, $+0.08$, $+0.07$.

Bij beide onderzochte stoffen vindt men beneden de kritische temperatuur eene in het oog vallende afwijking, overeenkomstig aan die in Meded. No. 88 gevonden.

De waarnemingen van AMAGAT, Journ. de phys. (2) 1 (1892) p. 288, betreffende den verzadigden dampdruk van CO_2 geven omtrent de hier behandelde quaestie geen zekere aanwijzing, omdat deze geleerde de drukken tot op 0.1 atm. afgerond opgeeft. Toch is het in verband met het voorgaande waard op te merken, dat TSURUTA, Journ. de phys. (3) 2 (1893) p. 272, toen deze die gegevens vergeleek met de formule $p = 34.3 + 0.8739t + 0.01135t^2$, ook hier bij 31.°25 een in 't oog vallend verschil $W-R$ verkreeg, dat 0.06 atm. grooter is dan dat bij 31.°35 (krit. temp. volgens AMAGAT).

Uit de hier genoemde gegevens zou het besluit getrokken kunnen worden dat voor CO_2 en CH_3Cl de lijn der verzadigde dampdrukken, voortgezet tot dicht bij het kritisch punt, bij extrapolatie tot aan dit punt eene p_k zou doen verwachten, die iets grooter is dan de experimenteel gevonden kritische druk.

Uit de zeer zorgvuldige waarnemingen van YOUNG betreffende isopentaan, Proc. Phys. Soc. London 1894/95, p. 613, is daarentegen eene afwijking, als hierboven voor CO_2 werd opgemerkt, niet te constateeren.

Misschien hangt met de boven behandelde storing in den verzadigingsdruk in de onmiddellijke nabijheid van het kritisch punt van CO_2 samen eene storing in de in Meded. No. 88 vermelde waarnemingen van de dichtheden van verzadigde vloeistof en damp van CO_2. In Pl. I zijn deze dichtheden d_{liq} en d_{vap}, uitgedrukt in de theoretisch normale dichtheid, voorgesteld. Tevens is uitgezet $\frac{1}{2}(d_{liq} + d_{vap})$. De rechte lijn is de lijn, die ter bepaling

van het kritisch volume volgens de methode van den rechtlijnigen diameter van CAILLETET en MATHIAS in Meded. No. 88 getrokken werd (zie aldaar p. 553). Het midden van de koorde behoorende bij 30.°8 ligt duidelijk beneden deze lijn. Wordt ter bepaling van den rechtlijnigen diameter alleen van de drie punten bij lagere temperatuur gebruik gemaakt, dan is het verschil belangrijk grooter. Indien deze afwijking niet aan eene waarnemingsfout is toe te schrijven, dan zou hieruit volgen dat de diameter van CAILLETET en MATHIAS voor CO_2 in de onmiddelijke nabijheid van het kritisch punt eene kromming vertoont [1]). K_{98} geeft de kritische dichtheid aan, die in Meded. No. 98 werd afgeleid uit bepalingen minder dan 0.°002 beneden de kritische temperatuur. Indien men zou mogen aannemen, dat het CO_2 van Meded. No. 98 en dat van No. 88 een zelfden graad van zuiverheid hebben bezeten, waartoe de overeenstemming der kritische temperaturen eenig recht geeft, en dat het onderscheid in de methoden van dichtheidsbepaling niet tot een systematisch verschil aanleiding gegeven heeft, dan zou door de ligging van het punt K_{98} de kromming van den diameter in de nabijheid van het kritisch punt bevestigd worden.

Eene dergelijke storing, als hierboven voor de verzadigingsvolumina van CO_2 in de onmiddellijke nabijheid van het kritisch punt werd opgemerkt, is uit de waarnemingen van YOUNG betreffende isopentaan (zie Proc. Phys. Soc. London 1894/95 p. 636) of uit die betreffende normaal pentaan (Trans. Chem. Soc. 71 (1897) p. 455), welke laatste tot 0°.05 beneden de kritische temperatuur zijn voortgezet, niet af te leiden [2]).

Een nader onderzoek (verg. § 2 p. 661), in hoeverre de onder *c* genoemde storingen met eene storing in de toestandsvergelijking in verband staan, of wel aan bijzondere omstandigheden bij die bepaalde proeven (b.v. aan de moeilijkheid van het bepalen wanneer begincondensatie optreedt) te wijten zijn, zou zeer gewenscht zijn.

---

[1]) Deze kromming is in anderen zin als de kromming, die door KUENEN en ROBSON, Phil. Mag. (6) 3 (1902) p. 624 bij lagere temperaturen in den diameter voor CO_2 geconstateerd werd, en die overeenstemt met den algemeenen regel door YOUNG, Phil. Mag. (5) 50 (1900) p. 291, omtrent deze kromming bij lagere temperaturen, in verband met de waarde van $\frac{RT_k}{p_k v_k}$ en de helling van den diameter ten opzichte van de temperatuur-as, gegeven.

[2]) Ook uit de waarnemingen van BRINKMAN l. c. betreffende CO_2 en CH_3Cl, welke waarnemingen echter tot niet zoo dicht bij het kritisch punt zijn voortgezet als die van Meded. N°. 88, is eene dergelijke storing niet met zekerheid vast te stellen.

§ 4. De in § 3 genoemde storingen schijnen in het algemeen er op te wijzen, dat de stof in de nabijheid van het kritisch punt een kleiner volume inneemt, dan men volgens de speciale ongestoorde toestandsvergelijking zou verwachten. In Meded. N°. 88 p. 555 werd gewezen op de mogelijkheid, dat die storingen in verband staan met dichtheidsverschillen die in de stof nabij den kritischen toestand optreden, gelijk door den nevel (de blauwe opalescentie) in de nabijheid van dien toestand aangeduid wordt. Daarbij werd niet ingegaan op de vraag of die dichtheidsverschillen zijn op te vatten als verdichtingen rond condensatiekernen met een eigen bestaan (stof volgens KONOWALOW [1]), electrisch geladen deeltjes [2]), eene in kleine druppeltjes afgescheiden derde phase grootendeels uit een bijmengsel bestaande), of wel eenvoudig als spontaan gevormde dichtheidsverschillen, hetzij als door de moleculaire beweging veroorzaakte door het statistisch evenwicht beheerschte toevallige opeenhoopingen (SMOLUCHOWSKI [3]), hetzij doordat kleine druppeltjes nog eene positieve oppervlaktespanning hebben bij temperaturen, bij welke grootere druppels niet meer stabiel zijn (DONNAN [4]).

Welke nu de oorzaak is die tot vorming van den nevel leidt, in alle gevallen laat zich een nauw verband tusschen de samendrukbaarheid en het optreden van den blauwen nevel verwachten. Ten einde hierover een nader oordeel te verkrijgen is het dus gewenscht allereerst een onderzoek in te stellen naar de bestaansvoorwaarden van dezen nevel in eene eencomponentige stof in de nabijheid van het kritisch punt vloeistof-gas. Voor een optisch onderzoek naar deze bestaansvoorwaarden verwijzen wij naar de volgende mededeeling.

---

[1]) D. KONOWALOW. Ann. d. Phys. (4) 10 (1903) p. 360.

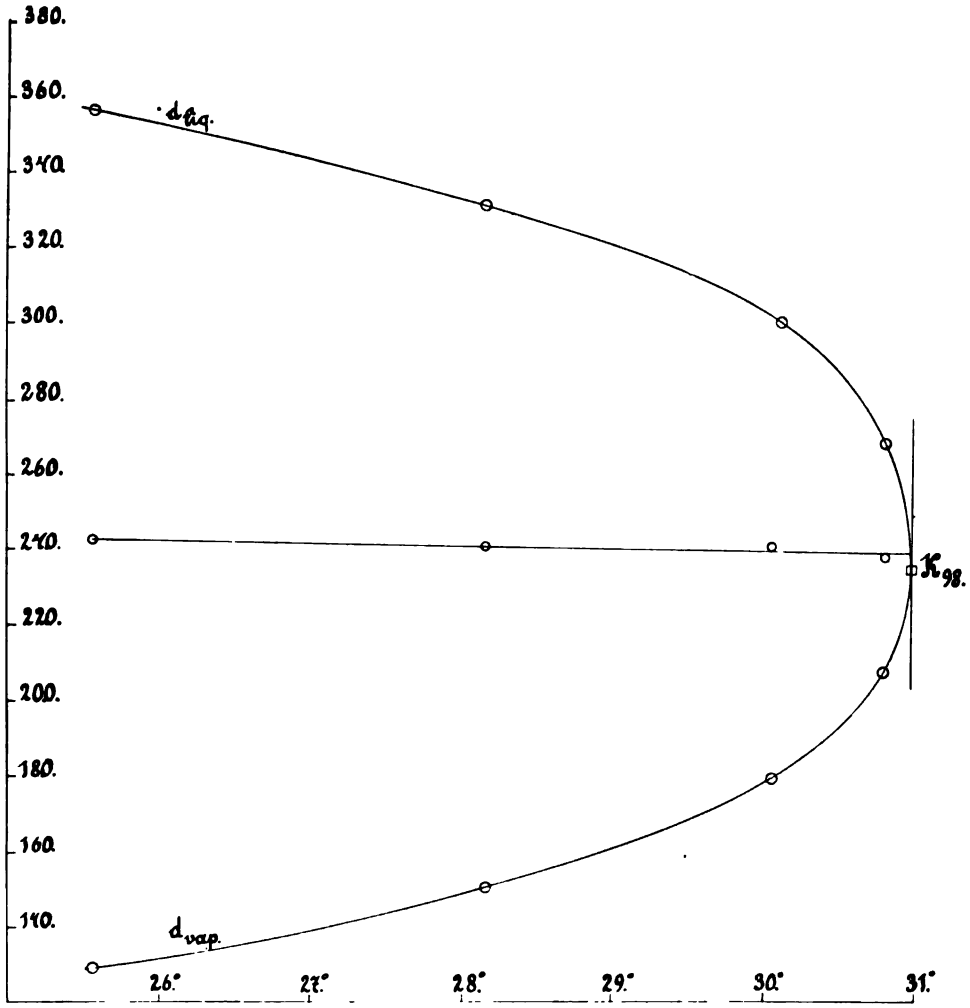
[2]) Deze zouden tengevolge van de zeer doordringende straling uitgaande van de radioactieve bestanddeelen in de aardkorst (EVE, Phil. Mag. (6) 12 (1906) p. 189), in de atmosfeer (STRONG, Physik. ZS. 9 (1908) p. 170), of in de omgevende deelen van het gebouw waar de proeven worden verricht, steeds tot een nagenoeg even groot bedrag kunnen aanwezig zijn. Intusschen volgt uit de proef van FRIEDLÄNDER, ZS. physik. Chem. 38 (1901) p. 385, over de stabiliteit van den nevel in een electrisch veld, dat de deeltjes die de opalescentie veroorzaken, niet geladen zijn.

[3]) M. v. SMOLUCHOWSKI, Ann. d. Phys. (4) 25 (1908), p 205.

[4]) F. G. DONNAN, Chem. News 90 (1904), p 139.

Dr. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. W. H. KEESOM. Over de toestandsvergelijking van eene stof in de nabijheid van het kritisch punt vloeistof-gas. I. De storingsfunctie in de nabijheid van den kritischen toestand.

Plaat I.



Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Meded. N°. 104*b* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: „Dr. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. W. H. KEESOM. *Over de toestandsvergelijking van eene stof in de nabijheid van het kritisch punt vloeistof-gas.* II. *Spectrophotometrisch onderzoek van de opalescentie van eene stof in de nabijheid van den kritischen toestand.*"

§ 1. *Inleiding.* Het spectrophotometrisch onderzoek van de opalescentie zal een antwoord moeten geven op de vraag hoe de intensiteit van het in zekere richting ten opzichte van het invallende licht in zekeren gezichtshoek verstrooide licht van eene bepaalde golflengte in verband met den polarisatietoestand afhangt van de temperatuur en de dichtheid van de eencomponentige stof in de nabijheid van het kritisch punt vloeistof-gas (verg. Meded. N°. 104*a* § 4). Eene eerste quantitatieve bijdrage tot dit onderzoek wordt in deze mededeeling gegeven [1]).

Wij hebben ons bij dit eerste onderzoek beperkt tot het bepalen van:

1°. voor verschillende temperaturen de verhouding, waarin de lichtstralen van verschillende golflengten bij dezelfde temperatuur in eene bepaalde richting worden verstrooid;

2°. de wijze waarop de intensiteit van het in bepaalde richting in een bepaalden gezichtshoek verstrooide licht van bepaalde golflengte met de temperatuur verandert.

In de onderstelling *a*, dat het door den blauwen nevel uitgezonden licht te danken is aan de verstrooiing van het invallende licht doordat een gedeelte van de stof zich om gelijkmatig door de ruimte verspreide centra tot deeltjes van dezelfde grootte (bijv. bolletjes) verdicht heeft, zullen de uitkomsten van het onder 1°. genoemde onderzoek een oordeel kunnen leveren over de grootte dier deeltjes [2]), dat onder 2°. over de wijze waarop de totale hoeveelheid stof die verdicht is, verandert met de temperatuur.

In de meer algemeene onderstelling *b*, dat de opalescentie het gevolg is van, bijv. door het statistisch evenwicht beheerschte, dichtheidsverschillen die zich over volumedeelen van onregelmatige vorm en grootte uitstrekken, zal een afstand kunnen aangewezen worden die samenhangt met de gemiddelde grootte dier volumedeelen, en dus

[1]) De colorimetrische bepalingen van FRIEDLÄNDER, ZS. physik. Chem. 38 (1901) p. 385 vormen eene dergelijke bijdrage voor een mengsel van twee vloeistoffen in de nabijheid van het kritisch scheidingspunt.

[2]) FRIEDLÄNDER l. c. p. 438, wees reeds op het belang van een dergelijk onderzoek voor de kennis van de inwendige structuur der kritisch troebele media.

met de meerdere of mindere mate van grofkorreligheid van de stof in dien toestand en die het optische verschijnsel op soortgelijke wijze bepaalt als bij onderstelling a de grootte der deeltjes. Het onder 1°. genoemde onderzoek zal dan over dezen afstand een oordeel leveren. Waar wij in het vervolg over de grootte der lichtverstrooiende deeltjes spreken, zal deze afstand bedoeld worden. Het onder 2°. genoemde onderzoek zal in dit geval iets leeren over de middelbare afwijking van de dichtheid in die volumedeelen. Ook dit zal in het vervolg onder „de hoeveelheid verdichte stof" begrepen worden.

De door ons verrichte metingen kunnen slechts als voorloopige beschouwd werden. Daar wij echter genoodzaakt zijn de voortzetting dezer metingen eenigen tijd te verschuiven, meenen wij de mededeeling onzer voorloopige uitkomsten niet langer te moeten uitstellen.

§ 2. *De inrichting der proeven* is voorgesteld in Pl. II fig 1. Het door het gloeilichaam van de NERNST-lamp *Ner* (70 HK) uitgezonden licht wordt, na door eene laag water gepasseerd te zijn, door de lenzen L_1 en L_2 geconcentreerd (tot een beeld van ± 1 c.M. hoogte) in het met aethyleen gevulde buisje [1]) *Et*.

Het door den nevel in de lengterichting van het buisje[2]) naar boven verstrooide licht wordt met behulp van de lenzenstelsels L_3, L_4 en L_5, L_6 en het totaal-reflecteerend prisma *Pr* vereenigd tot een beeld van den het aethyleenbuisje doorkruisenden lichtbundel op de spleet van den spectroscoop *Sp* (een rechtziende spectroscoop van HILGER-

---

[1]) Dit werd verkregen door uit de aethyleencirculatie van het cryogene laboratorium zooveel in het in vloeibare lucht afgekoelde en met aethyleen omgespoelde glazen buisje met aangesmolten kraan over te destilleeren dat, na wegzuigen van de boven het vaste aethyleeen gebleven gasphase en verwarming tot het smeltpunt het buisje voor $^1/_3$ gevuld was. Daarna werd de kraan gesloten, het buisje van de aethyleencirculatie verwijderd en terwijl het zich nog gedeeltelijk in vloeibare lucht bevond op een tevoren vernauwde plaats dichtgesmolten. Bij verwarming tot de kamertemperatuur bleek, toen bij 0° de ijsaanslag opklaarde, dat in de dampruimte aan den wand een dun wit beslag zichtbaar was, hetwelk eenige graden beneden de kritische temperatuur van het aethyleen verdampte. Dit beslag wijst op de aanwezigheid van een bijmengsel, dat iets minder vluchtig is dan aethyleen (verg. VILLARD, Ann. de chim. et de phys. (7) 10 (1897) p. 389). Dat het in de vloeistofruimte niet zichtbaar was, wijst waarschijnlijk op een klein verschil in breekbaarheid met vloeibaar aethyleen.

Bij dooreenroeren en daarna langzaam afkoelen tot beneden de kritische temperatuur ontstond de meniscus in den top van het buisje.

[2]) De top van het buisje is door een zwart cylindertje omgeven ten einde te verhinderen dat lichtstralen door dit gedeelte opgevangen, naar boven teruggekaatst en in den spectroscoop geworpen zouden worden.

CHRISTIE gevende een spectrum met groote lichtsterkte [1]), waarin eene oculairspleet is aangebracht ten einde een bepaald gedeelte van het spectrum te begrenzen; door middel van de schroef Scr_2 kunnen verschillende gedeelten van het spectrum in het veld gebracht worden). Een bundel van het door de NERNST-lamp uitgezonden licht wordt met behulp van vlakke spiegeltjes door de polariseerende prisma's Nic_1, Nic_2, Nic_3 (na eerst door lens L_7 evenwijdig gemaakt te zijn) en daarna door lens L_8 en een totaal-reflecteerend prisma op de spleet van den spectroscoop geworpen. De prisma's Nic_1 en Nic_2 zijn vast, waardoor zorg gedragen is dat het in den spectroscoop geworpen licht door de reflecties op de spiegeltjes bij verschillende standen van Nic_3 in dezelfde reden verzwakt wordt; het prisma Nic_3 is draaibaar en draagt een verdeelden cirkel, die tot op 3′ kon worden afgelezen. Het polarisatievlak van Nic_3 is horizontaal, zoodat de polarisatietoestand in de beide in den spectroscoop geworpen lichtbundels in hoofdzaak overeenstemt [2]). Het polarisatievlak van Nic_1 is aan dat van Nic_2 evenwijdig gesteld. Nadat het aethyleenbuisje op de gewenschte temperatuur gebracht was en de temperatuur van het vertrek zoodanig geregeld was dat de temperatuur van het aethyleenbuisje (tot op 0°.01 afgelezen) door, indien noodig, van tijd tot tijd toevoegen van eenig koud of warm water in het vacuumglas voldoende constant (tot op eenige honderdsten van een graad) gehouden kon worden, werd door draaiing van het prisma Nic_3 op gelijke lichtsterkte van de beschouwde gedeelten der beide spectra ingesteld. Met het oog op deze instelling was ervoor gezorgd dat de beide spectra zoo dicht

---

[1]) Zie ZEEMAN Meded. N°. 5, Juni '92, uitvoeriger Arch. Néerl. 27 (1893 (p. 259 en Pl. V. aldaar. Het „halfprism" werd bij onze proeven met het oog op de lichtsterkte gebruikt in de „magnifying position" (CHRISTIE, Proc. Roy. Soc. 26 (1877) p. 8). Tevens is in dezen stand de dispersie grooter, terwijl het verlies in zuiverheid van het spectrum hier geen bezwaar geeft.

[2]) Niet te dicht bij den kritischen toestand is het licht hetwelk door den blauwen nevel in eene richting loodrecht op het invallende licht wordt uitgezonden, gepolariseerd in het invalsvlak (RAMSAY, ZS. physik. Chem. 14 (1894) p. 486). Te verwachten is, dat bij nadering tot den kritischen toestand het in genoemde richting uitgezonden licht meer en meer gedeeltelijk gepolariseerd wordt (verg. TYNDALL, Phil. Trans. 160 (1870) p. 348). Het zou interessant zijn na te gaan of dan het „residual blue" van TYNDALL (l. c.) zou kunnen worden waargenomen (over het verband hiervan met het verschil in breekbaarheid van de verstrooiende deeltjes en het omgevende medium zie RAYLEIGH, Phil. Mag. (4) 41 (1871) p. 454). Metingen over den polarisatietoestand zouden ook tot een oordeel over de grootte der deeltjes kunnen leiden, zie BOCK, Wied. Ann. 68 (1899) p. 674 (spectrophotometrisch onderzoek van het door een stoomstraal verstrooide licht, meting polarisatietoestand ervan, en bepaling van de grootte der deeltjes door middel van buigingsringen) en PERNTER, Denkschr. Kais. Ak. d. Wiss. Wien 73 (1901) p. 301.

mogelijk boven elkander lagen [1]) en ongeveer dezelfde hoogte hadden. De instelling en aflezing geschiedde in de 4 verschillende standen van Nic_2, die gelijkheid van lichtsterkte geven.

§ 3. *Waarnemingen.* Hier zijn slechts waarnemingen boven de kritische temperatuur vermeld; om beneden de kritische temperatuur eenduidige gegevens voor de afhankelijkheid van den intensiteit van den nevel van temperatuur en dichtheid te verkrijgen, zou eene inrichting om de stof te roeren, of om de temperatuur zoolang constant te houden totdat thermodynamisch evenwicht bereikt zou zijn, noodig geweest zijn. De waarnemingen geschiedden nadat het aethyleenbuisje 15 uren of langer op hoogere temperatuur gehouden was, en het daarna langzaam tot de waarnemingstemperatuur was afgekoeld. De metingen zijn verricht voor twee golflengten, overeenkomende met D en F in het zonnespectrum [2]). Ten einde over den graad van nauwkeurigheid der instellingen te doen oordeelen worden in tabel I de gegevens der waarneming bij eene gemiddelde intensiteit van het verstrooide licht medegedeeld.

TABEL I.

Serie VI, No. 3, 13 Nov. 1907						
Golflengte	Temperatuur	Instellingen van Nic_2				γ
D	11°.69	63°48′	36°36′	154°36′	125° 9′	14°10′
	11. 66	64 24	36 15	153 30	126 18	13 50
	11. 70	63 18	36 54	154 9	125	13 53
	11. 69					—
		temp. gemidd. 11°.68				gem.: 13°58′
F	11. 66	155°45′	124°48′	65°18′	34°33′	15°15′.5
	11. 68	156 15	124 54	66 9	33 54	15 54
	11. 67	157 18	122 57	67 30	34 6	16 56
	11. 61					—
		temp. gemidd. 11°.66				gem.: 16°5′

[1]) Gebruik van een HÜFNER's prisma zou nauwkeuriger instellingen mogelijk maken.

[2]) Bij eene herhaling der proeven onder omstandigheden die eene nauwkeurigere spectrophotometrische instelling toelaten, zal eene uitbreiding der metingen tot meer golflengten gewenscht zijn.

De laatste kolom bevat den uit de vorige kolommen afgeleiden hoek van het polarisatievlak van Nic_2 bij de instelling op gelijke intensiteit met dit polarisatievlak als Nic_2 met Nic_2 en Nic_1 gekruist staat. In het algemeen was de instelling bij de golflengte F minder nauwkeurig dan bij D wegens de geringere intensiteit in het spectrum bij eerstgenoemde golflengte. De grootere afwijking die de laatste hoek φ voor de golflengte F in tabel I van de twee voorgaande vertoont, is uit het verschil in temperatuur te verklaren.

De aldus verkregen uitkomsten zijn vereenigd in tabel II:

TABEL II.

Golflengte D		Golflengte F	
Temperatuur	φ	Temperatuur	φ
Serie V, 12 Nov. 1907			
13°.53	8°27'	13°.59	10°11'
12 .55	9 455		
Serie VI, 13 Nov. 1907			
12°.54	10°36'	12°.54	12°39'
11 .86	12 37	11 .83	14 585
11 .68	13 58	11 .66	16 5
11 .42	17 52	11 .43	18 24
11 .24	22 18		

De waarnemingen van Serie VI eindigden na de instellingen voor golflengte D bij 11.°24, wijl daarna de temperatuur beneden de kritische, die op 11.°18 bepaald werd [1]), daalde (verg. § 3 aanhef).

Het verschil tusschen de hoeken φ voor Serie V 12.°55 en Serie VI 12.°54, golflengte D, is veroorzaakt doordat tusschen deze waarnemingen een kleine wijziging in den stand der lenzen L_7, L_8 heeft plaats gehad. De hier genoemde waarnemingen kunnen dienen om tusschen de reeksen V en VI verband te leggen. De uitkomsten van

[1]) Vergelijking van deze waarde van de kritische temperatuur met die van andere onderzoekers wijst aan dat de kritische temperatuur van het bijmengsel (verg. § 2 p. 668 noot 1) niet veel hooger dan die van aethyleen ligt.

andere waarnemingsserien worden hier niet medegedeeld, wijl daarbij nog niet alle hier genoemde voorzorgen in acht zijn genomen.

Uit de gegevens van tabel II is in de eerste plaats af te leiden het beloop van de intensiteit van het verstrooide licht met de temperatuur (§ 2 2c). We noemen $H_{D,t}$ de lichtsterkte in het spectrum van het door den nevel bij de temperatuur t verstrooide licht van de golflengte D bij eene bepaalde opstelling, die verder ongewijzigd gedacht wordt, $H_{D comp}$ de lichtsterkte in het vergelijkingsspectrum als Nic_2 evenwijdig staat met Nic_1 en Nic_3, $i_{D,t} = H_{D,t}/H_{D,11.°68} = sin^4 \varphi_{D,t}/sin^4 \varphi_{D,11.°68}$. Een onderzoek naar de absolute intensiteit van het door den nevel verstrooide licht, vergeleken met die van het invallende licht (verg. § 6 *b*) zal moeten leeren uit $i_{D,t}$ eene grootheid af te leiden, die de intensiteit van het verstrooide licht bepaalt, onafhankelijk van de bijzondere omstandigheden der opstelling. Voor het onderzoek van de wijze waarop de intensiteit van het verstrooide licht van de temperatuur afhangt, is de grootheid $i_{D,t}$ zeer geschikt.

Tabel III bevat de uitkomsten hieromtrent uit tabel II verkregen:

TABEL III.

t	$i_{D,t}$	t	$i_{D,t}$
13°.53	0.190	11.°68	1
12. 54	0.337	11. 42	2 61
11. 86⁵	0.671	11. 21	6.11

Deze uitkomsten zijn in Pl. II fig. 2 voorgesteld, waar tevens door de waarnemingspunten eene kromme getrokken is (zie verder p. 676).

De verhouding $r_{F:D,t} = \frac{H_{F,t}/H_{F comp.}}{H_{D,t}/H_{D comp.}} = \frac{sin^4 \varphi_{F,t}}{sin^4 \varphi_{D,t}}$ levert gegevens voor het in § 2 1°. genoemde onderzoek naar de verhouding waarin het licht van verschillende golflengten wordt verstrooid. Tabel IV bevat de uitkomsten hiervoor. Daartoe zijn de hoeken φ voor D en F door interpolatie tot eenzelfde temperatuur herleid.

TABEL IV.

t	$r_{F:D,t}$	t	$r_{F:D,t}$
13°.59	2.00	11°.68	1.66
12 .54	2.01	11 .43	1.18
11 .56⁸	1.85		

Boven 12°.54 schijnt de verhouding der intensiteiten van D en F constant te zijn. Men vindt in de tabel duidelijk uitgedrukt het reeds door verscheidene vroegere waarnemers opgemerkte feit, dat de nevel bij nadering tot de kritische temperatuur van blauw tot wit gaat naderen. Metingen omtrent deze kleurverandering zijn hier wel voor het eerst medegedeeld.

§ 4. *Over de grootte der lichtverstrooiende deeltjes* [1]). Om uit $r_{F:D}$ te kunnen afleiden de verhouding van de intensiteiten F en D van het door den nevel in bepaalde richting verstrooide licht vergeleken met de verhouding der intensiteiten F en D van het op den nevel invallende licht, moet erop gelet worden: 1°. dat de beide in den spectroscoop tot vergelijking komende lichtbundels buiten den spectroscoop verschillende reflecties en absorpties ondergaan, waardoor eene verandering in de verhouding der lichtsterkten D en F zou kunnen teweeggebracht worden, 2°. dat het niet geheel achromatisch zijn van het optische apparaat voor waarneming van het verstrooide licht tot eene dergelijke verandering in de lichtsterkte-verhoudingen kan aanleiding geven, 3°. dat indien de polarisatietoestand der beide lichtbundels bij aankomst in den spectroscoop niet geheel dezelfde is, de reflecties in den spectroscoop eveneens eene dergelijke verandering kunnen veroorzaken [2]).

De onder 1° en 2° genoemde invloeden kunnen worden bepaald en geëlimineerd door metingen van het verstrooide licht als de stof in de nabijheid van den kritischen toestand is vervangen door eene suspensie, waarvoor de intensiteitsverhoudingen van het verstrooide licht bekend zijn [3]). Daarbij zal dan moeten blijken in hoeverre de afwijking van de in tabel IV bij de hoogere temperaturen gevonden waarden 2,00 van die, welke volgens RAYLEIGH (Phil. Mag. (4) 41 (1871) p. 107) gevonden zou worden indien de verstrooing teweeggebracht wordt door niet geleidende deeltjes, waarvan de afmetingen

---

[1]) Vergel. § 1 p. 668.

[2]) Vergelijk CHRISTIE l.c.

[3]) Suspensies voor welke de intensiteit van het doorgelaten licht: volgens RAYLEIGH $I = I_0 e^{-k\lambda^{-4}x}$: mastik, $AgCl$, Cu_2S in water, emulsie van citroenessence in water: ABNEY en FESTING, Proc. Roy. Soc. 40 (1886) p. 378, LAMPA, Wien. Sitz. ber. [2a] 100 (1891) p. 730, HURION, C.R. 112 (1891) p. 1431, COMPAN, C.R. 128 (1899) p. 1226; volgens CLAUSIUS $I = I_0 e^{-k\lambda^{-2}x}$: $BaSO_4$ in een mengsel van glycerine en water enz.: COMPAN l.c. Om te zorgen dat bij deze proef het licht dezelfde reflecties enz. ondergaat als bij de proeven met den nevel zou men eene suspensie in aethyleen van de kritische dichtheid moeten nemen.

klein zijn ten opzichte van de golflengte ($\lambda^4_D/\lambda^4_F = 2.129$), op deze wijze te verklaren is [1]).

Over den invloed van het sub. 3° genoemde hebben wij eene afzonderlijke meting verricht. Zie hiervoor § 5.

Nadat de in deze § aangeduide correcties zijn aangebracht zullen de gegevens van tabel IV kunnen dienen om met behulp van ontwikkelingen als door LORENZ [2]) zijn aangegeven, een oordeel over de grootte der deeltjes te verkrijgen. Uit de verandering van $r_{F:D}$ in tabel IV bij nadering tot de kritische temperatuur kan reeds worden afgeleid, dat bij en beneden 11°.86[4] de lichtverstrooiende deeltjes niet meer als klein ten opzichte van de golflengte kunnen beschouwd worden.

§ 5. *Over de hoeveelheid stof die bij verschillende temperaturen in de lichtverstrooiende deeltjes verdicht is* [3]). Om tot de kennis van de intensiteit van het verstrooide licht bij verschillende temperaturen te geraken, moet aan tabel III nog slechts eene correctie aangebracht worden wegens de p. 673 sub 3°. genoemde omstandigheid. Daartoe moet eerst de polarisatietoestand van het verstrooide licht bij verschillende temperaturen bekend zijn (verg. p. 669 noot 2). Intusschen kan als volgt eene bovenste grens voor deze correctie aangegeven worden.

Bij de § 4 genoemde meting bleek dat loodrecht op de spleet gepolariseerd licht in den spectroscoop sterker verzwakt wordt dan evenwijdig aan de spleet gepolariseerd licht, zoodat de verhouding der intensiteiten in het spectrum [4]): $i_{D\perp}/i_{D//} = 0.82$, $i_{F\perp}/i_{F//} = 0.70$.

Onderstelt men nu dat bij 13°.53 al het in loodrechte richting verstrooide licht van golflengte D in het invalsvlak gepolariseerd is, en dat bij 11°.24 dat licht niet gepolariseerd zou zijn, dan volgt uit deze meting, dat bij 11°.24 de verzwakking van het D-licht in den spectrooscoop 1.10 maal zoo sterk zou zijn als bij 13°.53.

Om uit de intensiteit van het verstrooide licht bij verschillende temperaturen te kunnen afleiden hoe de hoeveelheid verdichte stof van de temperatuur afhangt, zou men een eenigermate volledig in-

[1]) Ook het feit dat het door den nevel verstrooide licht eene laag van zekere dikte (± 2 cM.) in de voortplantingsrichting moet passeeren, kan eene afwijking in dezelfde richting veroorzaken.

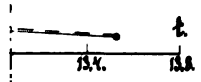
[2]) L. LORENTZ. Vidensk. Selsk. Skr. Copenhagen 6 (1890). Oeuvres Scientifiques 1 p. 405.

[3]) Verg. § 1 p. 668.

[4]) Vergelijk hiermede de berekeningen von CHRISTIE Proc. Roy. Soc. 26 (1877) p. 24.

D1

Plaat II.



zicht moeten hebben in de wijze waarop het licht door dergelijke deeltjes verstrooid wordt, en derhalve de structuur der deeltjes (verg. § 1) moeten kennen, waarbij ook de wijze van ontstaan (verg. Meded. N°. 104^a, § 4) zou ter sprake komen. Intusschen kan verwacht worden dat, zoo lang de deeltjes klein zijn vergeleken met de golflengte van het licht, de intensiteit van het verstrooide licht zal toenemen evenredig met het kwadraat der hoeveelheid verdichte stof, terwijl wanneer de deeltjes niet meer zoo klein zijn, de toename langzamer zal geschieden.

Wat men ook als oorzaak van het optreden der verdichtingen zal aanwijzen, de groote samendrukbaarheid van de stof in de nabijheid van den kritischen toestand zal een overwegenden invloed daarop hebben. Zoo zal b.v. de door het statistisch evenwicht beheerschte middelbare afwijking in dichtheid (SMOLUCHOWSKI [1])) evenredig zijn aan $\sqrt{\partial p/\partial \varrho}$ (ϱ = dichtheid). Neemt men aan dat de stof zich verdicht om attractiecentra die op de omgevende deelen van de stof krachten uitoefenen welke per eenheid van massa slechts afhankelijk zijn van den afstand, dan is de hoeveelheid die om elk attractie centrum verdicht wordt evenredig aan [2]) $\partial p/\partial \varrho$.

Ten einde na te gaan wat de gegevens in tabel III omtrent een verband tusschen de intensiteit van het verstrooide licht en de samendrukbaarheid leeren, merken we op dat in de nabijheid van het kritisch punt $\partial p/\partial \varrho = q_{11}(T - T_k)$, indien de gemiddelde dichtheid van de stof zoo weinig van ϱ_k verschilt, dat de volgende term $3q_{30}(\varrho - \varrho_k)^3$ verwaarloosd mag worden (dus $T - T_k$ niet al te klein).

TABEL V.

t	i_{DtW}	i_{DtR}	$W-R$ in $^0/_0$ van W
13.°53	0.190	0.213	— 12
12. 54	0.337	0.368	— 9
11. 86^5	0.671	0.730	— 9
11. 68	1	1	
11. 42	2.61	2.08	+ 20
11. 24	6.11	8.33	— 36

[1]) M. v. SMOLUCHOWSKI, Ann. d. Phys. (4) 25 1908 p. 205.

[2]) Ondersteld is hierbij dat de verdichting zoo weinig is dat ρ in een verdicht gedeelte dicht genoeg bij ρ_k blijft.

In tabel V° zijn nu de gegevens van tabel III vergeleken met de formule : $i_{D,t} = \frac{0\,5}{T - T_k}$ ($t_k = 11°.18$, zie p. 671).

De — — — — lijn in Pl. II fig. 2 stelt $i_{D,R}$ voor.

De verschillen $W - R$ zijn van tweeërlei aard :

1°. de afwijking bij 11°.24 : deze was in de onmiddellijke nabijheid van de kritische temperatuur te verwachten, daar de formule voor T_k eene oneindige verdichting zou geven ; hier doet zich de invloed van volgende termen in de ontwikkeling van $\partial p/\partial \varrho$, of van de intensiteit van het verstrooide licht als functie van de hoeveelheid stof (zie p. 675) gevoelen ;

2°. ook bij temperaturen verder van de kritische verwijderd, is eene systematische afwijking : de waargenomen intensiteitskromme stijgt hier sneller dan de berekende. Dit zou o. a. kunnen samenhangen met de waarneming van TRAVERS en USHER [1]), die vonden dat het maximum van de intensiteit van den nevel niet ligt bij T_k, doch voor SO_2 0°.05 boven T_k.

Afgezien van deze afwijkingen mag men besluiten, dat de waarnemingen zich in hoofdzaak aan de genoemde betrekking aansluiten. De afwijkingen van eene formule $i_{D,t} = \frac{0\,25}{(T - T_k)^2}$ zouden veel grooter geweest zijn. De in den aanhef van deze § genoemde correctie zal in deze conclusie geen wijziging brengen.

Hieruit volgt, onderstellende dat, zoolang althans de afmetingen der volumeelementen waarin waarneembare verdichtingen of verdunningen optreden, klein zijn ten opzichte van de golflengte, de intensiteit van het verstrooide licht evenredig is met het quadraat van de hoeveelheid stof die om elk centrum verdicht is, of met het quadraat van de door het statistisch evenwicht beheerschte middelbare afwijking in dichtheid, dat onze waarnemingen meer spreken voor de hypothese der door de moleculair beweging veroorzaakte, door het statistisch evenwicht beheerschte, verdichtingen en verdunningen, dan voor de hypothese van attractiecentra wier aantal bij veranderende temperatuur standvastig blijft.

Indien uit verder onderzoek blijkt, dat de absolute grootte van de intensiteit van het door den nevel verstrooide licht ook overeenkomt met hetgeen volgens de verdeelingswet van BOLTZMANN te verwachten is (verg. SMOLUCHOWSKI l. c.), dan zal door beschouwingen omtrent de vergrooting van het aantrekkingsviriaal tengevolge van die dichtheidsverschillen [2]), een verband kunnen gelegd worden tusschen

[1]) M. W. TRAVERS en F. L. USHER. Proc. Roy. Soc. A 78 (1906) p. 247.

[2]) Verg. M. v. SMOLUCHOWSKI, BOLTZMANN Festschrift 1904, p. 626.

de intensiteitswaarnemingen van het door den nevel verstrooide licht en de storingsfunctie in de toestandsvergelijking in de nabijheid van het kritisch punt.

§ 6. *Opmerkingen over verdere proeven omtrent den nevel in de nabijheid van den kritischen toestand.*

a. Wanneer door metingen als in § 3 behandeld de wijze waarop de intensiteit van het door den nevel verstrooide licht afhangt van temperatuur en dichtheid voldoende bekend geworden zal zijn, zal het bepalen van die intensiteit op verschillende hoogten in een CAGNIARD-LATOUR-buisje de methode met de zwevertjes tot bepaling van de dichtheid op verschillende hoogten in de buis (zie Meded. N°. 98) kunnen vervangen. Wordt hierbij door langdurig verblijven op genoegzaam constante temperatuur voor totstandkoming van het thermodynamisch evenwicht gezorgd, dan zou de bepaling van de intensiteit van het verstrooide licht als functie van de hoogte in de buis eene methode leveren tot nauwkeurige bepaling van de experimenteele toestandsvergelijking in de onmiddellijke nabijheid van den kritischen toestand (vergel. Meded. N°. 98 § 1 p. 47).

b. Behalve de reeds genoemde metingen over den polarisatietoestand (§ 2) en de metingen ten behoeve van de in § 4 genoemde correcties zouden wenschelijk zijn metingen omtrent de verhouding van de intensiteit van het verstrooide licht tot die van het invallende licht (verg. § 3 p. 670 en § 5 p. 674). Hiertoe zouden metingen waarbij het aethyleen vervangen is door een zilverspiegel die een hoek van 45° maakt met de as van het buisje, kunnen dienen.

c. Het zou van belang zijn te onderzoeken of voor eene eencomponentige stof in de nabijheid van het kritisch punt een toename in de inwendige wrijving optreedt, als voor een vloeistofmengsel in de nabijheid van het kritisch scheidingspunt door OSTWALD [1]) naar aanleiding van metingen van STEBUTT is opgemerkt en door FRIEDLÄNDER (zie p. 667) nader bepaald is. Misschien zou een verband gelegd kunnen worden tusschen de vergrooting van de inwendige wrijving en de grootte van de lichtverstrooiende deeltjes (zie § 1) en aldus met de kleur van het verstrooide licht.

d. Een invloed van RÖNTGEN-stalen op den blauwen nevel in aethyleen kon door ons niet geconstateerd worden. Te onderzoeken zou zijn of de α-stralen of de emanatie van radium een invloed op den nevel uitoefenen.

e. FÜCHTBAUER [2]) onderzocht een mengsel van isoboterzuur-water in

[1]) W. OSTWALD. Lehrbuch der allgemeinen Chemie II 2 (2te Aufl. p. 684).

[2]) CHR. FÜCHTBAUER, Zeitschr. physik. Chem. 48 (1904) p. 552.

de nabijheid van het kritisch scheidingspunt ultramicroscopisch; hij slaagde er niet in eene oplossing van den lichtkegel te verkrijgen. Evenmin konden wij bij een mengsel van amyleen-aniline met het objectief Homog. Imm. $\frac{1}{12}$, oculair 4, condensor *AA* (ZEISS) en als lichtbron electrische booglamp (30 Ampère) of zonlicht (10 Dec. '07) de aanwezigheid van afzonderlijke lichtverstrooiende deeltjes in den nevel vaststellen. Eene herhaling van deze proef bij meer intensief zonlicht en terwijl meer voorzorgen genomen zijn om de temperatuur van het ultramicroscopisch onderzochte mengsel op eene constante temperatuur dicht bij de kritische scheidingstemperatuur te houden achten wij gewenscht, evenals een dergelijk onderzoek voor eene enkelvoudige stof in de nabijheid van het kritisch punt gas-vloeistof.[1])

Dit onderzoek zou in verband met hetgeen uit metingen als in § 3 vermeld over de grootte der lichtverstrooiende deeltjes volgt (zie § 4) een oordeel kunnen geven over de snelheid van beweging der lichtverstrooiende deeltjes of over den gemiddelden tijd van bestaan van bepaalde door het statistisch evenwicht beheerschte opeenhoopingen.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt mede namens den Heer JEAN BECQUEREL aan Meded. N°. 103 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: JEAN BECQUEREL en H. KAMERLINGH ONNES. *„De absorptiespectra van de verbindingen der zeldzame aarden bij de temperaturen, die met vloeibare waterstof te bereiken zijn, en hunne verandering door het magnetische veld."*

§ 1. *Inleiding.* Door de onderzoekingen van een van ons (J. B.)[2]) was aangetoond, dat de absorptiespectra van de verbindingen der zeldzame aarden, tot de temperatuur van vloeibare lucht afgekoeld, kunnen dienen om nieuwe gegevens te verkrijgen omtrent den aard, het aantal en de beweging van de electronen, welke bij de

[1]) De mogelijkheid is namelijk niet uitgesloten, dat de lichtverstrooiende deeltjes hierbij grootere afmetingen en een grooteren onderlingen afstand hebben, dan bij het kritisch scheidingspunt van twee vloeistoffen. Om hieromtrent een oordeel te verkrijgen zou een spectrophotometrisch onderzoek voor een vloeistofmengsel, op de wijze als wij dit voor cene enkelvoudige stof verricht hebben (§ 3) gewenscht zijn.

[2]) JEAN BECQUEREL, Radium IV. 9, p. 328 en IV, 11, p. 385 (1907).

vorming dier spectra betrokken zijn. Het kwam ons dus van groot belang voor deze onderzoekingen voort te zetten bij de zooveel lagere temperaturen, welke met vloeibare waterstof te bereiken zijn, en die in 't bijzonder geschikt schijnen [1]) om de krachten te doen kennen, welke de weegbare stof op de electronen uitoefent. De toestellen voor het waarnemen der spectra te Parijs gebruikt, zijn derhalve naar het cryogeen laboratorium te Leiden overgebracht, zoodat wij in de gelegenheid kwamen reeds een paar honderd spectrogrammen te verkrijgen, die de waargenomen verschijnselen weergeven. Met het bestudeeren van deze photografien zal lange tijd gemoeid zijn. Wij bepalen ons derhalve thans tot het mededeelen van enkele feiten, die reeds bij den eersten blik de aandacht trekken.

§ 2. *Toestel.* In de eerste plaats een enkel woord over de inrichting der proeven. Deze was dezelfde voor de proeven met en zonder magnetisch veld. Bij de laatste werd eenvoudig de stroom niet door de klossen gezonden. De kristallen, met was bevestigd in een stukje platinablik a, (a_2, a_3 fig. 3^a, Pl. I), dat door een stang a_4 gedragen wordt, werden onder vloeibare waterstof gedompeld in een dubbelwandige buis (b fig. 2, fig. 3^a), voortzetting van een niet verzilverd vacuumglas b_2 volgens DEWAR, waarin zich vloeibare waterstof bevindt, en die omgeven is door een tweede dubbelwandige (c_{10}, c_{20}) buis c, eveneens de voortzetting van een niet verzilverd vacuumglas met vloeibare lucht, waarop zij met kurkjes b_3 rust. Een ringvormige ruimte van $^1/_2$ mM. tusschen beide glazen (fig 3^a) bleek voldoende om de vloeibare lucht langs de waterstof buis te laten circuleeren. Deze beschermt de waterstof zoo goed tegen warmtetoevoer, dat de verdamping onbeteekenend is, zelfs wanneer de beide buizen gebracht worden tusschen de warme klossen van den magneet en het kristal beschenen wordt door sterk er op geconcentreerd electrisch licht.

De wanden van het enge deel der buizen zijn zeer dun, en, omdat de warmtestraling onafhankelijk is van den afstand der wanden zijn zij tot op uiterst kleinen afstand (0.5 mM.) van elkander gebracht en wel zonder dat ze elkaar ergens aanraken. Doordat dit aan de kunstvaardigheid van den Heer KESSELRING, glasblazer bij het Laboratorium, gelukt is, verkregen wij de beschikking over een buis van 4 mM. inwendigen diameter gevuld met vloeibare waterstof, beschermd door een buis met vloeibare lucht, waarvan de buitenste diameter niet meer dan 8 mM. is, hetgeen veroorlooft de polen van den magneet

[1]) H. KAMERLINGH ONNES, De beteekenis van nauwkeurige metingen bij zeer lage temperaturen. Leiden 1904 Comm. of the phys. lab. of Leiden Suppl. no. 9, p. 25 sqq.

zoo dicht bij elkaar te brengen, dat ook bij doorboorde polen [1]) nog zeer sterke velden verkregen worden.

De waterstofbuis moet hermetisch gesloten zijn. Ten dien einde wordt zij bevestigd in een hoed, d, die met behulp van een richtplank, f, met schroeven en glijsleuf gesteld kan worden. Men brengt de buis van onderen op in den hoed, waar zij tegen een houten cylindertje, binnen d_0 rust (fig. 2) en bevestigt haar met een dunnen caoutchoukring e_1, die vooraf dubbel geslagen om d_0 ligt. Tot betere afsluiting wordt tusschen caoutchouk en glas eene oplossing van caoutchouk gebracht en het caoutchouk met koperdraad tegen het glas en den hoed aangesnoerd. De hoed is voorzien van 1°: de buis d_{11}, waarop men bij d_{11} een kop met pakkingsbus d_{12} schroeft, waarin het stangetje a_6 kan draaien (met behulp van a_7) en op en neer bewegen (met behulp van het moertje d_{13}). 2°: een buisje d_1 om vloeibare waterstof als aangegeven in Med. 94 uit de voorraadflesch r in den toestel over te hevelen, welk buisje anders met een caoutchouk buisje met stop afgesloten is. 3°: een afvoerbuis d_2 (fig. 2) die leidt langs kraan k (fig. 1 en fig. 4) naar den gashouder met zuivere waterstof, naar een veiligheidsbuis l (fig, 1), langs k_3 naar een luchtpomp en langs k_4 naar de vacuumflesch r, waaruit de vloeibare waterstof wordt overgeheveld (de bewerking wordt door de schematische fig. 4, die wel geen nadere beschrijving behoeft, toegelicht).

Nadat men zich overtuigd heeft, dat de waterstofbuis omgeven door c, wanneer zij luchtledig gepompt wordt, juist hare plaats tusschen de polen inneemt, zonder door de steunblokjes q en i, bij behoorlijke stelling van deze, gespannen te worden, vult men haar, onder herhaald leegpompen, langs k_1 met waterstof uit den gashouder, giet dan vloeibare lucht door een filtertrechter in b_1 en dekt deze met een weinig watten toe. De toestel is dan gereed om door d_1 met vloeibare waterstof gevuld te worden. Om tot de temperatuur van het smeltpunt van waterstof over te gaan opent men k_2 totdat kristallen aan het oppervlak van de vloeibare waterstof verschijnen, door welke men de gasbellen, die van het verwarmde kristal zijn opgestegen, verder hun weg ziet banen. Is de toestel op deze wijze gevuld, dan kan men verscheidene uren ongestoord waarnemingen met de kristallen verrichten. De genomen voorzorgen om menging van de waterstof met lucht te voorkomen zijn onmisbaar. Lucht die

[1]) Wij hebben inplaats van de gewone polen van den magneet van Weiss, gebruik gemaakt van hulpstukken, p_{30} (zie fig, 2 en 3) die den kegel tot een afknottingsvlak van 6 mM. diameter voortzetten, met conische openingen, die aan de zijde van het kristal 3 mM. diameter hebben.

in den toestel, trad zou naar beneden zinken om zoodra het magneetveld wordt aangebracht daardoor opgezogen te worden tot voor het kristal, waarbij aan het licht de weg afgesneden wordt.

Gewoonlijk werd voor elke vulling van het toestel $^1/_4$ liter vloeibare waterstof uit de voorraadflesch verbruikt en was het voldoende om dit tweemaal per dag te doen om gedurende den geheelen dag bij gewonen of verlaagden druk te kunnen waarnemen; 2 maal per week werd voor deze proeven eene hoeveelheid van 5 liter bereid, welke juist toereikend was, om ook den tweeden dag na de bereiding nog den toestel te vullen. De waterstof, die bij verlaagden druk verdampte, werd omdat verontreiniging met lucht daarbij niet geheel kon worden voorkomen niet weder in den cyclus opgenomen. De waterstofcyclus bewees hare vertrouwbaarheid door ons al deze weken geen enkele maal in den steek te laten.

I. Verschijnselen, die enkel van de temperatuur afhangen.

§ 3 *Vereenvoudiging der spectra.* Bij het afkoelen tot de temperatuur van vloeibare lucht ($T = 85°$) was gevonden [1]), dat bijna alle banden smaller worden en zich verdeelen, terwijl ook enkele nieuwe optreden. Daarbij neemt in 't algemeen hun sterkte toe. De banden, die in sterkte afnemen of die geheel verdwijnen zijn zeer gering in aantal. De metingen over anomale dispersie in de nabijheid van enkele banden van het tysoniet hebben bewezen, dat deze toename van intensiteit niet alleen het gevolg is van het smaller worden der banden, maar ook van eene wijziging die, volgens de electronentheorie bij de onderstelling van quasi-elastische krachten, de toename van de dielectrische constante in elke band aangeeft en beteekent, dat het aantal electronen, welke zulk een band bepalen, toegenomen is.

Overgaande tot de temperatuur van vloeibare waterstof ($T = 20$), zagen wij enkele banden voortgaan met in sterkte toe te nemen, maar ook andere, die bij het dalen tot op de temperatuur van vloeibare lucht een steeds grootere absorptie vertoonden, afnemen zoowel in intensiteit als in breedte. Er zijn zelfs banden, welke in vloeibare lucht waren te voorschijn gekomen, die in vloeibare waterstof bijna onzichtbaar worden. Een voorbeeld van zulk eene verandering met de temperatuur leveren de banden 523,5 en 479,1 van tysoniet.

De metingen van de anomale dispersie in de nabijheid dezer banden hadden geleerd, dat de electronen behoorende bij deze banden ongeveer dubbel tot driemaal zoo groot in aantal zijn bij de temperatuur van

[1]) Jean Becquerel, l. c. p.

vloeibare lucht als bij de gewone. In vloeibare waterstof is het aantal reeds zeer gering geworden en bij de temperatuur van vaste waterstof (14°) nemen bijna geen electronen van deze soort meer aan de beweging deel. De fig. 1, Pl. II, die de compensatorstreepen [1]) in de nabijheid van band 523,5 van tysoniet bij verschillende temperaturen en dikte, voorstelt, veroorlooft de storing in de streep naar hoogte en breedte te meten. De fig. 2 en 3 die wij in § 8 behandelen en die de magnetoöptische verschijnselen weergeven, kunnen die toelichten.

§ 4. *Maximum van intensiteit van elken band voor een bepaalde temperatuur.* Uit het voorgaande volgt, dat verscheidene banden bij het dalen van de temperatuur door een maximum van intensiteit gaan. De ligging van dat maximum is in 't algemeen verschillend voor verschillende banden. Wanneer men bij de in § 3 beschreven proef met het tysoniet afwacht, dat de laatste sporen van waterstof van het kristal verdampen, dan ziet men onmiddellijk daarna bij het warmer worden van het kristal de band 523,5 sterk in intensiteit toenemen. Zonder twijfel ligt voor dezen band het maximum niet ver boven het kookpunt van waterstof. Al de kristallen xenotiem, tysoniet, parisiet, apatiet, monaziet, didymsulfaat, praseodymsilicaat en neodymsilicaat vertoonen dergelijke verschijnselen. De groene streep 523,5 van neodym die bijzonder fijn en scherp is bij $T = 20°$, is bijna verdwenen bij $T = 14°$.

Wij hebben nog nagegaan, welken invloed het dalen van $T = 91°$ tot $T = 58°$ heeft door de kristallen in vloeibare zuurstof te dompelen, die aan de luchtpomp kookt. De verandering in dat gebied is slechts gering. Dit bevestigt de gevolgtrekking bij het verwarmen van $T = 20°$ af gemaakt, dat het maximum dicht bij deze laatste temperatuur en in allen gevalle ver onder $T = 58°$ moet liggen.

Men vraagt zich natuurlijk af of die weinige banden, die tusschen de gewone temperatuur en die van vloeibare lucht in intensiteit verminderen, niet ook door een maximum gaan, hetzij tusschen $T = 290°$ en $T = 95°$, hetzij bij een temperatuur boven $T = 290°$ De vraag zal moeilijk zijn uit te maken, daar door het breeder worden en over elkaar vallen der banden de verandering van elk dier banden op zichzelf aan de waarneming ontsnapt.

§ 5. *Verandering in breedte.* In de vroegere proeven [2]) was tot aan de temperatuur van de vloeibare lucht voor alle gemeten banden algemeen geldig gevonden, dat de breedte der banden evenredig was

[1]) JEAN BECQUEREL, Radium IV no. 9 p. 328.

[2]) JEAN BECQUEREL, Radium IV no. 9 p. 328.

aan de vierkantswortel uit de absolute temperatuur. Dit is de wet, die men voor het geval van een gas uit de vroeger door LORENTZ [1]) ontwikkelde formules kan afleiden.

Bij het overgaan tot de temperatuur van vloeibare waterstof blijkt deze wet voor enkele banden niet meer geldig, terwijl voor andere de orde van grootheid der verandering dezelfde schijnt te blijven. Op de door de methode der compensatorstrepen verkregen figuren 1, Pl. II kan men zeer goed zien, dat 523.5 van tysoniet bij $T = 20°$ niet half zoo breed is als bij $T = 85°$, gelijk de wet van den $\sqrt{T}$ zou vorderen. En het was juist deze band die gediend had om experimenteel aan te toonen, dat die wet tot $T = 85°$ met groote benadering gold.

De vraag of er een *minimum van breedte* is, kon nog niet worden opgelost. Op den eersten blik schijnen sommige banden tusschen $T = 20°$ en $T = 14°$ niet verder samen te trekken, twee van xenotiem zelfs schijnen breeder te worden.

Wat het geheel der verschijnselen van breedte-verandering in vloeibare en vaste waterstof betreft, kan nog worden opgemerkt, dat daardoor nog meer dan in vloeibare lucht [2]) op den voorgrond treedt de neiging der spectra om bij het lager worden der temperatuur het karakter van gasspectra aan te nemen. Enkele absorptiestreepen van praseodymium en neodymium silicaat, bevrijd van over hen liggende breede banden, zijn zelfs fijner dan de *D*-streepen.

§ 6. *Het naderen van de dubbele breking van kristallen in de niet geabsorbeerde deelen van het spectrum tot een limiet.* Volgt men de banden, met welke men de dubbelbreking onderzoekt, bij temperatuursverandering, zoo neemt men het volgende waar. Bij verwarming van het kristal boven de gewone temperatuur verplaatsen zij zich sterk. Bij afkoeling tot op de temperatuur van vloeibare lucht verplaatsen zij zich in tegengestelde richting. Bij een tysonietkristal hebben wij ze ook gevolgd bij de verdere afkoeling met vloeibare waterstof. Niettegenstaande het groote verschil van temperatuur is dan de verplaatsing nauwelijks merkbaar. Misschien wijst dit er op, dat het verschil van de uitzetting der kristallen in de verschillende richtingen bij zeer lage temperaturen tot een limiet nadert.

§ 7. *Verband der bij zeer lage temperaturen der absorptiebanden optredende verandering met de electronentheorie.* Reeds in § 3 werd

[1]) H. A. LORENTZ. Kon. Akad. v. W. VI p. 506 en p. 555 (1898).

[2]) Dat tysoniet en xenotiem in deze richting gaan is opgemerkt door JEAN BECQUEREL, Radium l. c.

gewezen op het verband van de verandering der banden met die van het aantal der electronen, welke bij een bepaalden band volgens de electronentheorie bij aanname van quasi-elastische krachten betrokken zijn. De experimenteele vraagstukken, die § 3 en § 4 opwerpen kunnen in de taal van deze theorie als volgt [1]) worden omschreven. Het aantal eenerzijds en de dempingscoefficient (evenredig aan de breedte van den band) anderzijds der electronen, die bij een bepaalden band betrokken zijn, als functies van T te leeren kennen. Van de ligging der maxima zou men gebruik kunnen maken om bij elkaar behoorende banden op te zoeken, in de eerste plaats in de verschillende spectra van eenzelfde kristal. Het ligt voor de hand wat wij omtrent deze functies nu reeds weten, in verband te brengen met wat de verandering van den geleidingsweerstand der metalen ons reeds omtrent de werking van krachten door de weegbare stof uitgeoefend op de electronen doen vermoeden.[2]) Men zal bij zeer lage temperaturen de electronen niet meer aan een volmaakt gas gelijk mogen stellen, maar veeleer moeten vergelijken met een damp, die op deelen van de atomen (dynamiden (LENARD)) neerslaat en bij nog lagere temperatuur vast vriest [3]). Bij de nadering dezer centra ondergaan de banen der electronen veranderingen, die de vrije weglengte wijzigen, op dezelfde wijze als de grootheid b van VAN DER WAALS eene verandering [4]) ondergaat door de krachten, die de moleculen op elkaar uitoefenen.

De drie agregaatstoestanden, welke wij zooeven als beeld van het gedrag der electronen gebruikten, zouden iets nader misschien als betrekking hebbende op de stabiliteit von verschillende banen der electronen kunnen worden opgevat, en de quasi-elastische kracht verband houden met de voorwaarden voor het loopen in deze banen.

Merkt men dan nog op, dat het de verhouding der absolute temperaturen is, waarop het bij de mate van verandering der spectra aankomt (vergelijk den overgang van $T = 20$ tot $T = 14$ met dien van $T = 290$ tot $T = 95$), dan zal men het denkbeeld, dat er van overeenstemmende toestanden naar verschillende temperatuureenheden berustende op mechanische gelijkvormigheid in de beweging van de electronen om de aantrekkende centra, gesproken kan worden, voorloopig als heuristische voorstelling mogen aanvaarden.

---

[1]) Zie: JEAN BECQUEREL Radium l. c

[2]) H. KAMERLINGH ONNES. l. c. p.

[3]) Een metaal zou bij uiterst lage temperatuur doorschijnend worden.

[4]) Op grond ven de theorie van BOLTZMANN berekend door REINGANUM.

II. Verschijnselen die afhangen van de temperatuur en van de sterkte van het magneetveld.

§ 8. *Onveranderlijkheid van de verandering van den trillingsduur onder den invloed van het magnetisch veld bij alle temperaturen.*

Volgens de vroegere door een van ons (J. B.) verrichte proeven, worden, wanneer een eenassig kristal met de as in de richting van de krachtlijnen en van den lichtstraal geplaatst is, sommige absorptiebanden in twee componenten gesplitst, die behooren bij de absorptie van twee cirkelvormig gepolariseerde stralen van tegengestelden zin. Het verschil in trillingsduur der twee componenten was daarbij onafhankelijk gebleken van de temperatuur. Uit de vergelijking van de uiteenwijking der twee banden bij de temperatuur van vloeibare waterstof met de uiteenwijking bij de temperatuur van vloeibare lucht volgt nu op nog meer overtuigende wijze, dat, binnen de grens der waarnemingsfouten, het verschil in trillingsduur volmaakt onafhankelijk is van de temperatuur. Volgens de theorie van Lorentz moet deze onveranderlijkheid van de uiteenwijking der banden, die zoowel wordt waargenomen bij die, welke in den zin van het verschijnsel van Zeeman gaan als bij die, welke in tegengestelden zin plaats hebben, beschouwd worden als voortvloeiende uit de onveranderlijkheid van de verhouding e/m. De waarnemingen in vloeibare waterstof (verg. fig. 2 Pl. II en fig. 3 Pl. III) schijnen ons dus een krachtigen steun te geven aan de bewijsgrond voor het bestaan van positieve electronen afgeleid uit de standvastigheid van dit quotient. [1])

§ 9. *Gedeeltelijke polarisatie van de componenten van enkele banden.* In een voorgaande mededeeling (CR. 19 Aout 1907) heeft een van ons (J. B.) aangetoond, dat de band 624,97 van het tysoniet dubbel wordt in elk der beide spectra van links en rechts circulair gepolariseerd licht, welke men verkrijgt met behulp van een kwartgolfplaatje en rhomboeder. In beide componenten van het magnetisch doublet van den band is dus de polarisatie niet volmaakt cirkelvormig. De band gedraagt zich alsof hij te wijten was aan positieve zoowel als aan negatieve electronen met denzelfden trillingsduur en dezelfde verhouding e/m waarbij het aantal positieve electronen het grootst is te stellen, daar bij deze de sterkste componente behoort.

Bij de temperatuur van vloeibare waterstof wordt hetzelfde verschijnsel waargenomen bij sommige banden, die tegelijk fijn en sterk worden (fig. 2 Pl. I band 522. 1). Men kan het in 't algemeen, al

[1]) *Le Radium* tom V. p. 17 1908.

is het dan ook moeielijker te zien, terugvinden bij de temperatuur van vloeibare lucht en bij de gewone temperatuur. Laatstelijk heeft DUFOUR hetzelfde verschijnsel teruggevonden in gecanneleerde emissiebanden van in de vlam gebracht fluorcalcium.

§ 10. *Dissymetrie der rechts en links gepolariseerde componenten.* De proeven bij de temperatuur van vloeibare lucht hadden aangetoond [1]) dat wanneer de lichtstralen loopen evenwijdig aan de krachtlijnen de rechts en links gepolariseerde componenten dikwijls in sterkte verschillen. Regelmaat was in die verschillen niet te vinden, de dissymetrie was nu eens in den eenen dan weer in den anderen zin.

Gaat men tot de temperatuur van vloeibare en nog beter tot die van vaste waterstof over, zoo worden die dissymetrieën, terwijl zij soms van teeken veranderen, bijzonder sterk; de eene componente neemt in intensiteit ten koste van de andere toe, zoo zelfs, dat sommige componenten aan de zijde der grootere golflengten bijna geheel verdwijnen. Een voorbeeld levert fig. 3 Pl. III betrekking hebbende op 654,2 en 643.4 van xenotiem, van welke de eene componente zeer sterk, de andere zeer zwak is. Het zelfde vertoont apatiet.

In vaste waterstof worden zeer duidelijk bijna alle componenten, die naar de kleine golflengten afwijken, sterker dan die van tegengesteld teeken.

§ 11. *Verandering van de magnetische draaiing van het polarisatievlak in de nabijheid der absorptiebanden.*

a. Enkelvoudige banden. De proeven van MACALUSO [2]), H. BECQUEREL [3]) ZEEMAN [4]) hebben bewezen, dat in de nabijheid van de banden, die het verschijnsel van ZEEMAN vertoonen, de draaiing van het polarisatievlak aan beide zijden van de band positief en in het midden van het magnetisch doublet negatief is. De proeven, die met eenassige kristallen [5]) bij plaatsing van de as evenwijdig aan de krachtlijnen en aan den lichtbundel bij gewone temperatuur en vervolgens bij die van vloeibare lucht verricht zijn, hebben aangetoond dat de regelmatige verandering van het magnetisch draaiingsvermogen met de golflengte van het licht aan beide zijden van den band een zelfde en in 't midden van den band een tegengestelde storing ondergaat.

---

1) JEAN BECQUEREL *Le Radium* V. No. 1. p. 9. 1908.
2) CR. CXXVII p. 548, 1898.
3) CR. CXXV p. 679. 1897 CXXVII p. 899. 1891.
4) Arch Neerl. VII p. 465. 1902.
5) JEAN BECQUEREL, Radium IV No. 2 p. 49. 1907, V No. 1 p. 5. 1908.

Deze storing is buiten den band positief voor de banden, die bij negatieve electronen behooren, en negatief voor de banden van positieve electronen.

Bij de temperaturen van vloeibare en vaste waterstof worden dezelfde verschijnselen waargenomen, wanneer ten minste de dissymetrie van de links en rechts circulair gepolariseerde componenten niet al te groot is. In de nabijheid van sommige banden, wier componenten zeer ongelijk zijn, neemt men — gelijk men gemakkelijk verklaren kan met behulp van de gewone figuren van de anomale dispersie — aan beide zijden van den band tegengestelde storingen waar. Deze verschijnselen zijn duidelijk zichtbaar op de figuren 4 Pl. III en 5 Pl IV.

Deze figuren zijn verkregen door eene methode, die reeds bij de vroegere proeven gebruikt werd [1]). Tegen de spleet van den spectroscoop wordt een compensator van BABINET tusschen twee gekruiste Nicols zoo bevestigd, dat de streepen loodrecht op de spleet staan. Voor den compensator plaatst men een kwartgolf plaatje zóó dat de twee tegengestelde circulaire gepolariseerde trillingen veranderd worden in twee rechtlijnig evenwijdig en loodrecht op de hoofdrichting van den compensator gepolariseerde stralen. De afwijkingen van de streep door het spectrum in de nabijheid van de banden zijn evenredig aan het gangverschil van de circulair gepolariseerde stralen in het kristalplaatje.

In de figuren vindt men bij band 522.15 fig. 4 het symmetrisch, bij band 523.7 fig. 4 en 642.3 fig. 5 het dissymetrisch geval, met gelijkgerichte storing, bij band 537 fig. 4 en 654.2 fig. 5 de tegengestelde storing aan beide zijden van den band.

b. Samengestelde banden. De absorptieverschijnselen bij lagere temperaturen hebben geleerd, dat verscheidene banden in twee of meer opgelost worden. Deze componenten gedragen zich verschillend ten opzichte van het magneetveld, daar sommige bij positieve, andere bij negatieve electronen behooren. In de magnetische draaiing komen daardoor storingen, die voor de verschillende banden verschillend zijn en wier uitwerkingen met elkaar worden samengesteld Zoo kunnen twee naast elkaar geplaatste banden, de een van positieve, de ander van negatieve electronen, storingen in tegengestelden zin in de magnetische draaingsdispersie geven. Daarin moet misschien de verklaring gezocht worden van wat waargenomen wordt [2]) bij band 577 van het tysoniet, welke in vloeibare waterstof duidelijk dubbel is.

In 't algemeen kan men zeggen, dat de gevolgtrekkingen die men, wat de theorie van het magnetisch draaiingsvermogen bij absorptie-

[1]) JEAN BECQUEREL, C.R. 21 Mei 1906.

[2]) JEAN BECQUEREL. C.R. 25 Mrs 1907 en Radium V n°. 1 p. 16 1908.

banden betreft, maakt uit proeven bij de gewone temperatuur tot geen zekere uitkomst kunnen leiden. Want bij de gewone temperatuur weet men niet of men wel met een enkelvoudigen band te doen heeft. Daarentegen vindt men bij de lage temperaturen, waarbij de banden smal worden en men hun verandering in het magneetveld op den voet kan volgen, in de verschillende gevallen gemakkelijk de juiste verklaring van de verschillende typen van storing in de magnetische draaiingsdispersie bij de banden.

§ 12. *Magnetisch draaiingsvermogen van de paramagnetische kristallen.* Een van ons (J. B.) [1]) had vroeger aangetoond, dat het negatief magnetisch draaiingsvermogen van de kristallen van tysoniet en parisiet aanmerkelijk toeneemt bij het dalen van de temperatuur. Het draaiingsvermogen is nagenoeg omgekeerd evenredig aan de absolute temperatuur. Brengt men dit in verband met de wet van CURIE, dat de paramagnetische susceptibiliteit omgekeerd evenredig met T is, dan blijkt dat waarschijnlijk de negatieve draaiing dezer kristallen een gevolg is van de toename van de paramagnetische polarisatie van het kristal.

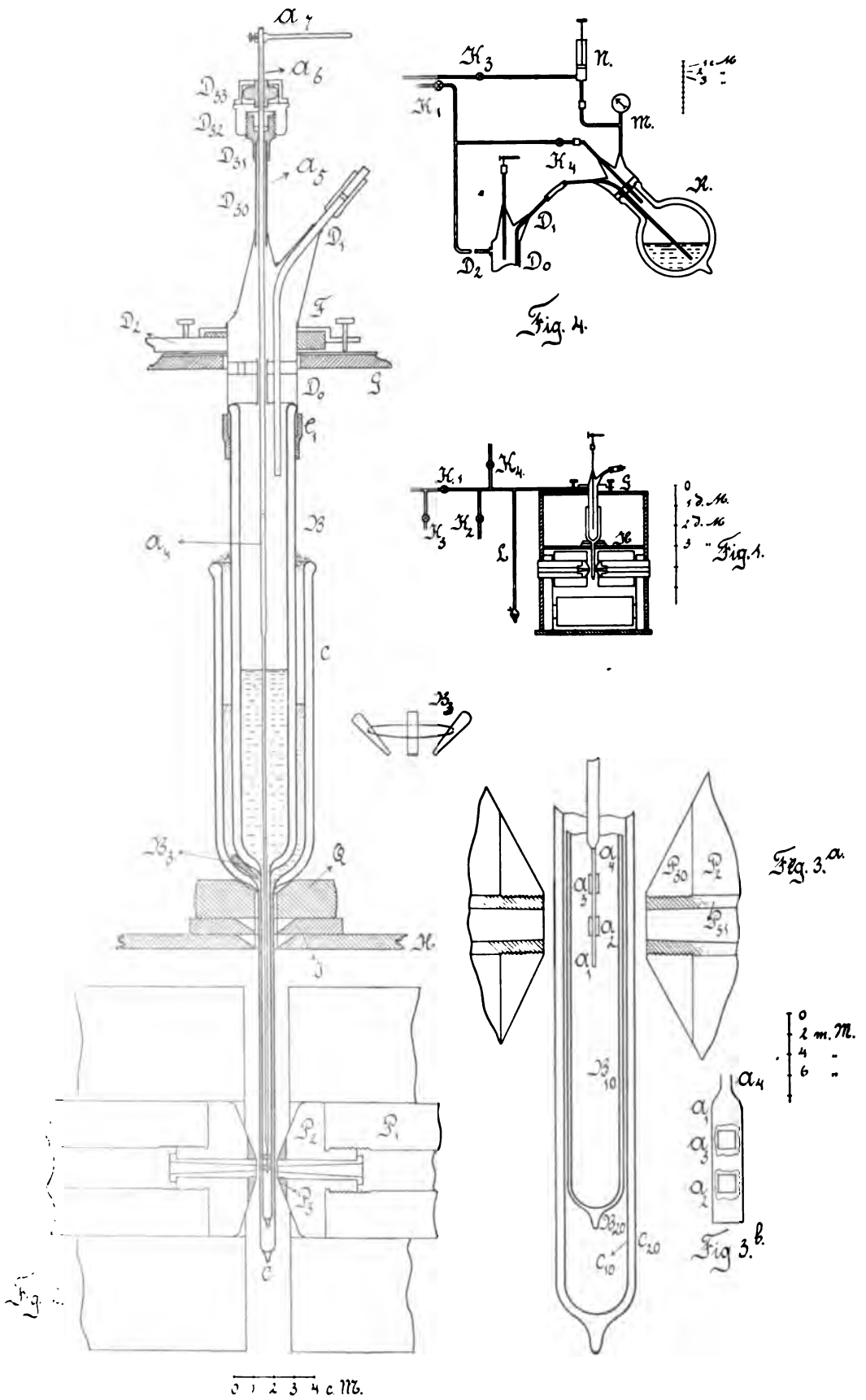
Brengt men deze kristallen in vloeibare waterstof zoo vindt men dat de toename met het dalen van de temperatuur op dezelfde wijze voortgaat en het draaiingsvermogen tot buitengewoon groote waarden opvoert. De nauwkeurige getallen zullen later gegeven worden, maar in ronde getallen bedraagt de draaiing van het polarisatievlak van het blauwe licht 150° voor een plaatje tysoniet van 1 mM. in een veld van 10000 Gauss bij het kookpunt van waterstof. Xenotiem, dat een zeer geringe draaiing geeft bij de gewone temperatuur, verkrijgt in vloeibare waterstof een aanmerkelijk draaiingsvermogen.

§ 13. *Verband der verschijnselen van de dissymetrie der door het magneetveld links en rechts gepolariseerde componenten bij zeer lage temperaturen met de electronentheorie.*

Het geheel der verschijnselen geeft in verband met § 4 aanleiding tot de onderstelling, dat er voor de banen der electronen voorwaarden (velden) van stabiliteit bestaan, die bepaald worden door de temperatuur. De werking der magnetische kracht en de verandering in trillingsduur zou dan tengevolge hebben, dat sommige electronen in deze velden van stabiliteit overgaan of ze verlaten, wat dan nog in den zin van grootere vereeniging of verdere losmaking van de centra, die de banen bepalen, kan zijn, en het grooter worden van die werking bij lage temperatuur zou in verband staan met de ge-

[1]) JEAN BECQUEREL, Radium. Tom. V, N°. 1, p. 5, 1908.

JEAN BECQUEREL en H. KAMERLINGH ONNES: Over de absorptiespectra der verbindingen van de zeldzame aarden bij de temperaturen, die met vloeibare waterstof te verkrijgen zijn en de veranderingen van deze spectra door het magnetische veld. **Plaat I.**



JEAN BECQUEREL en H. KAMERLINGH ONNES De absorptiespectra van de verbindingen der zeldzame aarden bij de temperaturen, die met vloeibare waterstof te bereiken zijn, en hunne veranderingen door het magnetische veld.

Pl. III.

642.27 643.45 650.56 654.25 658.10

$T = 290°$ abs

$T = 85°$ „

$T = 20°$ „

$T = 14°$ „

Fig. 3. *Linksche en rechtsche trillingen* in een veld van 18000 Gauss ongeveer. Xenotiem, groep in het rood, 2e spectrum (ROWLAND); panchromatic platen van WRATTEN and WAINWRIGHT.

520.6 522.15 537

1

2

3

$T = 20°$abs

$T = 20°$abs

$T = 14°$abs

5237

Fig. 4. *Xenotiem,* groep in het groen, 2e spectrum (ROWLAND)

1 magnetische circulaire dubbele breking, plaatje dik 0.80 mM, veld 15000 Gauss.

2 beelden gegeven door een rhomboëder voor de spleet, het in vallende licht gepolariseerd, zoodat de velden dezelfde intensiteit hebben in het doorschijnende deel in 't midden der groep, veld 15000 Gauss.

3 beelden gegeven door een rhomboëder voor de spleet. invallend licht gepolariseerd, onder 45° met den horizon veld 18000 Gauss.

JEAN BECQUEREL en H. KAMERLINGH ONNES. De absorptiespectra van de verbindingen der zeldzame aarden bij de temperaturen, die met vloeibare waterstof te bereiken zijn en hunne veranderingen door het magnetische veld.

Pl. IV.

642.3 654.3

$T = 20°$ abs.

$T = 14°$ „

Fig. 5. *Magnetische draaiing van het polarisatievlak.* Xenotiem, 2de spectrum (ROWLAND), dikte 0.80 mM. veld 18000 Gauss (kwartgolfplaatje 90° gedraaid in de eene ten opzichte van de andere).

1 2 3 4 5 6 7 8

$T = 14°$ abs.

$T = 14°$ „

$T = 14°$ „

$T = 14°$ „

Fig. 6. *Neodymsilicaat* groep in het oranje, 2de spectrum (ROWLAND), spectara der trillingen:

1 in de hoofdrichting *a*, veld = 0.
2 „ „ „ *b*, veld = 0.
3 „ „ „ *a*, *a* en *b* normaal op het veld (18000 Gauss).
4 „ „ „ *b*, *a* en *b* „ „ „ „
5 „ „ „ *a*, *a* en *c* „ „ „ „
6 „ „ „ *c*, *a* en *c* „ „ „ „
7 „ „ „ *b*, *b* en *c* „ „ „ „
8 „ „ „ *c*, *b* en *c* „ „ „ „

EAN BECQUEREL en H. KAMERLINGH ONNES. De absorptiebanden van de verbindingen der zeldzame aarde bij de temperaturen, die met vloeibare waterstof te bereiken zijn, en hunne verandering in het magnetische veld.

Pl. V.

$T = 293°$ abs.

$T = 85°$ „

$T = 20°$ „

$T = 20°$ „

$T = 14°$ „

$T = 14°$ „

$T = 14°$ „

$T = 14°$ „

$T = 14°$ „

$T = 14°$ „

Fig. 7. *Neodymsilicaat* spectra der trillingen in de richting α, β, γ groep in het blauw, 2e spectrum (ROWLAND).

1, 3, 7, 11, 19	α zonder veld
2, 4, 8, 12, 15	β zonder veld
16, 20	γ zonder veld
5 en 6, 9 en 10, 13 en 14	α en β normaal op het veld (18000 Gauss)
17 en 18,	β en γ „ „ „ „
21 en 22	α en γ „ „ „ „

ringere snelheid. De invloed op de stabiliteit der banen, welke hier beschouwd wordt, zou dezelfde zijn, welke zich openbaart in de verandering van het aantal electronen, (zie § 7) die voldoen aan de voorwaarden van de bewegingen, die aan quasi-elastischen krachten kunnen worden toegeschreven.

Daarbij rijst vanzelf de vraag of de meerdere stabiliteit van trillingen in een bepaalden zin niet paramagnetische eigenschappen ten gevolge zal hebben.

§ 14. *Veranderlijkheid der massa van de electronen met de richting van de beweging.* De theorie der magnetoöptische verschijnselen bij kristallen (VOIGT [1]) JEAN BECQUEREL [2])) leidt tot de volgende uitkomsten.

Het magnetisch veld brengt bepaalde koppelingen tusschen de beweging der electronen in verschillende hoofdrichtingen van het kristal te weeg. Beschouwen wij het eenvoudige geval, dat zich herhaaldelijk voordoet, nl. dat de overeenstemmende banden in de verschillende spectra dezelfde plaats innemen. Dan zullen volgens de theorie de magnetische doubletten symmetrisch moeten zijn en wanneer de banden smal genoeg zijn om de breedte te mogen verwaarloozen, zullen de afwijkingen evenredig zijn aan den vierkantswortel uit het product der twee magnetische constanten, welke behooren bij de correspondeerende banden der beide spectra. Laat men den lichtbundel en een der hoofdrichtingen 1, 2, 3 van het kristal samenvallen met de richting van het magnetische veld, dan neemt men die twee van de drie spectra van het kristal waar, welke overeenkomen met de trillingen loodrecht op de krachtlijnen.

De waarneming leert, dat zoowel voor de eenassige kristallen, van xenotiem en tysoniet als voor de tweeassige van didymsulfaat, neodymsilicaat en praesodymsilicaat (welk laatste in vloeibare waterstof sommige lijnen vertoont even scherp als streepen van gloeiende damp) de doubletten van den gemeenschappelijken band dezelfde uiteenwijking hebben. Een verschijnsel van groot belang wordt waargenomen wanneer men op verschillende wijzen de spectra van trillingen loodrecht op de krachtlijnen combineert. Plaatst men achtereenvolgende richtingen 1, 2, 3 in de richting van het veld, dan krijgt men voor de trillingen normaal op het veld de combinaties 2.3, 1.3, 1.2. De proefneming leert, dat de uiteenwijkingen der paren doubletten van deze drie gevallen zeer verschillend zijn. Zoo is voor een band van het spectrum 1, wanneer de trilling loodrecht op het veld staat,

---

[1]) Nachr. Kön. Ges. d. Wiss. Göttingen Juli 1906.

[2]) C.R. 19 Nov. 3. 10. 24 Dec. 1906. Radium IV n°. 3 Mars 1907.

het magnetisch doublet verschillend al naar gelang de richting loodrecht op het veld de hoofdrichting 2 of 3 heeft. Het verschijnsel is in het figuur, die de bandengroep in het oranje bij neodymsilicaat bij — 259° voorstelt, duidelijk te zien. Fig. 7 Pl. V geeft een overzicht der verschijnselen van de veranderingen met de temperatuur en het magneetveld in het blauw van neodymsilicaat. Volgens de theorie moet hieruit worden afgeleid, dat elk der drie verschillende richtingen een van de andere verschillende magnetische constante heeft, en dat dus het trillende stelsel voor de drie soorten van trillingen drie verschillende massa's vertoont.

Daar de correspondeerende banden in de twee spectra dezelfde of zeer weinig verschillende plaatsen innemen, volgt eruit dat in eerste benadering de constante der quasi-elastische kracht in elk der drie richtingen evenredig moet zijn aan de massa in die richting.

Natuurkunde. — De Heer. KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 104 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: *„De verdichting van het helium".*

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan: *„Isothermen van één-atomige gassen en hunne binaire mengsels. II. Isothermen van helium bij ongeveer* — 253° C. *en* — 259°."

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Meded. N°. 102^d uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: *„Over het meten van zeer lage temperaturen. XVII. Invloed van de afwijking van de wet van Boyle-Charles op de temperatuur, gemeten met de schaal van den gasthermometer van constant volume volgens de waarnemingen met dit werktuig."*

(Zullen in het Verslag der volgende Vergadering verschijnen).

Aardkunde. — De Heer MOLENGRAAFF biedt eene verhandeling aan van den Heer J. SCHMUTZER: *„Bijdrage tot de kennis der oude eruptiefgesteenten en amphiboolschisten aan de rivieren Sebibit en Tebaoeng in Centraal Borneo."*

De Voorzitter stelt deze verhandeling in handen van de Heeren MOLENGRAAFF en WICHMANN om advies.

Voor de Boekerij wordt aangeboden door den Heer J. C. KAPTEYN: *„Publications of the Astronomical Laboratory at Groningen* N°. 18."

De vergadering wordt gesloten.

(12 Maart, 1908)

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 28 Maart 1908.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 692.

Verslag van de Heeren G. A. F. MOLENGRAAFF en C. E. A. WICHMANN over eene verhandeling van den Heer J. SCHMUTZER: „Bijdrage tot de kennis der oude eruptieve gesteenten en amphiboliten aan de rivieren Sébilit en Tëbaoeng in Centraal-Borneo", p. 692.

W. EINTHOVEN en W. A. JOLLY: „Over de electrische reactie van het oog op lichtprikkels van verschillende intensiteit", p. 693.

P. H. SCHOUTE: „Over de doorsneden van het net der maatpolytopen M_n der ruimte R_n met een ruimte R_{n-1} loodrecht op een diagonaal", p. 699.

W. DE SITTER: „Over de massa's en baanelementen der satellieten van Jupiter en de massa van het systeem". (Aangeboden door de Heeren J. C. KAPTEYN en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 709.

W. VAN BEMMELEN: „De beginstoot van magnetische storingen", p. 728.

W. VAN BEMMELEN: „Aardstroom-registratie te Batavia" (2de mededeeling), p. 737.

H. E. J. G. DU BOIS, G. J. ELIAS en F. LÖWE: „Een autocollimatieve spectraaltoestel van groote lichtintensiteit, tevens monochromator", p. 744.

H. E. J. G. DU BOIS en G. J. ELIAS: „De invloed van temperatuur en magnetisatie op selectieve absorptiespectra", II. p. 749.

F. M. JAEGER: „Over de Tri-para-halogeensubstitutieprodukten van het Triphenylmethaan en van het Triphenylcarbinol". (Aangeboden door de Heeren A. P. N. FRANCHIMONT en P. VAN ROMBURGH), p. 756.

H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN: „Omtrent de hoogte van den gemiddelden zeestand in het Y voor Amsterdam van 1700—1860", p. 766.

A. P. H. TRIVELLI: „Bijdrage tot de kennis van het solarisatie-verschijnsel en van verdere eigenschappen van het latente beeld". (Aangeboden door de Heeren S. HOOGEWERFF en P. ZEEMAN), p. 773. (Met één plaat).

H. J. HAMBURGER: „Een methode van koude injectie van organen voor histologische doeleinden", p. 801.

S. H. KOORDERS: „Bijdrage N°. 1 tot de kennis der Flora van Java. (Voortzetting). Stuk 8. Over de geographische verspreiding, de standplaatsvoorwaarden en verspreidingsmiddelen der in de hoogste bergstreken van Java wildgroeiende Aceraceae", p. 803.

H. KAMERLINGH ONNES: „Isothermen van één-atomige gassen en hunne binaire mengsels II. Isothermen van helium bij ongeveer — 252° C. en — 259° C." p. 815.

H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „Over het meten van zeer lage temperaturen. XX. Invloed van de afwijkingen van de wet van Boyle-Charles op de temperatuur gemeten op de schaal van den gasthermometer van constant volume volgens de waarnemingen met dit werktuig", p. 817.

H. KAMERLINGH ONNES: „Over de verdichting van het helium", p. 818.

H. KAMERLINGH ONNES: „Over proeven ter verdichting van het helium door expansie", p. 819.

Aanbieding van boekgeschenken, p. 822.

Vaststelling der Aprilvergadering op 24 April 1908, p. 822.

Errata, p. 822.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken dd. 13 Maart 1908 met verzoek te willen berichten, welke personen zouden zijn aan te wijzen als gedelegeerden en plaatsvervangende gedelegeerden der Nederlandsche regeering bij het in de maand Mei te Brussel te houden congres voor poolonderzoek en of deze personen bereid zijn een eventueele benoeming te aanvaarden.

Aan den Minister is geantwoord dat de Akademie als gedelegeerden voordraagt:

a. den gepens. kapitein t/zee L. A. H. LAMIE te Arnhem

b. Dr. J. P. VAN DER STOK, Directeur bij het Kon. Nederlandsch Meteorologisch Instituut, te Utrecht

en als plaatsvervangende gedelegeerden

a. Dr. E. VAN EVERDINGEN, hoofddirecteur van het Kon. Nederlandsch meteorologisch Instituut, te de Bilt

b. den kapitein luit. t/zee J. M. PHAFF, sous-chef der Hydrographie, Departement van Marine, te 's-Gravenhage

welke Heeren bereid zijn eene eventueele benoeming te aanvaarden.

2°. Schrijven van de R. Accademia dei Lincei te Rome ter begeleiding van 4 exemplaren der verhandeling van R. EÖTVÖS, getiteld: *„Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit Hülfe der Drehwage".*

Ter kennisneming voor de leden beschikbaar gesteld.

Aardkunde. — De Heer MOLENGRAAFF brengt ook namens den Heer WICHMANN het volgende verslag uit over eene verhandeling van den Heer J. SCHMUTZER. *„Bijdrage tot de kennis der oude eruptieve gesteenten en amphibolieten aan de rivieren Sèbilit en Tèbaoeng in Centraal-Borneo."*

De schrijver geeft een uitvoerige en zeer nauwkeurige beschrijving van de in 1894 door G. A. F. MOLENGRAAFF aan de rivieren Sèbilit en Tèbaoeng verzamelde gesteenten, voor zoover zij tot de gabbrofamilie behooren, met name bronciet-gabbro, gabbro-dioriet, dioriet, peridotiet en serpentijn. Hij komt daarbij tot het resultaat, dat deze eruptieve gesteenten met hun derivaten te beschouwen zijn als differentiatie-produkten van een en hetzelfde magma, dat tijdens de cretaceïsche plooiingen tot stolling kwam. De genoemde gesteenten vertoonen gedeeltelijk duidelijke sporen van dynamometamorphose. Wat de amphibolieten betreft, was het van belang te onderzoeken of deze tot de zoogenaamde echte, kristallijne schisten behooren, of te beschouwen zijn als door dynamometamorphose veranderde eruptiefgesteenten.

Reeds MOLENGRAAFF achtte het niet geheel zeker, of men hier wel met echte schisten te doen heeft. Deze gesteenten zijn vertegenwoordigd door de volgende typen: zoisiet-epidoot-amphiboliet, epidoot-zoisiet-amphiboliet, zoisiet-amphiboliet en saussuriet-aktinolith-schist. Uit tal van gegevens is den schrijver nu gebleken, dat er een niet te miskennen verwantschap tusschen deze gesteenten en de diorieten bestaat. Terwijl de veldspaten een verandering in epidoot en zoisiet hebben ondergaan, vindt men wat de hoornblende betreft, nog sporen van het oorspronkelijke mineraal behouden. De schrijver aarzelt dan ook niet tot het besluit te komen, dat de bedoelde amphibolieten niet archaeïsch zijn, maar eerst in jongeren tijd uit eruptieve gesteenten zijn ontstaan. De verhandeling geeft blijk van een groote belezenheid van den schrijver.

De ondergeteekenden bevelen de opname van dit werk in de verhandelingen der Akademie aan.

G. A. F. MOLENGRAAFF.
C. E. A. WICHMANN.

Physiologie. — De Heer W. EINTHOVEN biedt mede namens den Heer W. A. JOLLY een mededeeling aan: *„Over de electrische reactie van het oog op lichtprikkels van verschillende intensiteit".*

Hoewel de door HOLMGREN ontdekte electrische reactie van het oog door een aantal onderzoekers na hem nader is bestudeerd, is er tot nog toe geen stelselmatig onderzoek verricht naar den vorm der electriciteitsbeweging, die door prikkels van zeer uiteenloopende sterkte wordt veroorzaakt. Toch kan, zooals wij hieronder hopen aan te toonen, een dergelijk onderzoek er niet onbelangrijk toe bijdragen, de retina-stroomen beter te leeren begrijpen.

Wij hebben bij ons werk uitsluitend van geïsoleerde kikvorschenoogen gebruik gemaakt. Daarbij stelde eenerzijds de snaargalvanometer, die voor de netvliesstroomen ontegenzeggelijk het gevoeligste meetinstrument mag worden genoemd, ons in staat een zeer zwakke electriciteitsontwikkeling te registreeren, zooals door licht van uiterst geringe sterkte wordt te voorschijn geroepen en anderzijds hebben wij door toepassing van een doelmatig lenzenstelsel getracht licht van zoo groot mogelijke intensiteit op de retina van het te onderzoeken oog te vereenigen. Met behulp van een spectroscopische inrichting werden de stralen van den krater eener booglamp, — dringende door een dicht daarbij geplaatste collimatorspleet, — in een spectrum

uitgespreid, terwijl op eenvoudige wijze elk gewenscht deel van het spectrum kon worden geïsoleerd.

Maakten wij van de stralen gebruik, die tusschen de golflengten $\lambda = 0{,}590\,\mu$ en $\lambda = 0{,}497\,\mu$ in zijn gelegen, en waarvan het groene middengedeelte — ongeveer bij $\lambda = 0{,}544\,\mu$ — geacht mag worden relatief een zeer sterke werking op het oog uit te oefenen, [1]) dan konden wij met behulp van doelmatig gekozen diaphragma's de lichtintensiteiten varieeren in de verhouding van $1 : 10^9$, terwijl reeds bij de zwakste intensiteit galvanometeruitslagen van verscheidene centimeters konden worden geregistreerd. De inrichting onzer proeven stelde ons niet gemakkelijk in staat, het licht op nauwkeurig meetbare wijze verder te verzwakken, doch wij hopen later hiertoe nog de gelegenheid te verkrijgen.

Bij eenige proeven werd ook van wit licht gebruik gemaakt, dat uit den aard der zaak sterker kon worden genomen dan het spectrale groen. Behalve dat men bij gebruik van wit licht de beschikking heeft over alle stralen van het zichtbare spectrum, kan men ook de collimatorspleet breeder nemen of door den krater zelf vervangen. Volgens een ruwe berekening was de intensiteit van het door ons gebruikte witte licht, bestaande uit de gezamenlijke stralen, die zich tusschen de uiterste grenzen van het zichtbare spectrum bevinden, ongeveer 10 maal grooter dan van het maximale groene licht. De intensiteiten van het zwakste groen en van het wit verhielden zich dus ongeveer [2]) als $1 : 10^{10}$.

Indien wij een geïsoleerd kikvorschenoog, dat niet kort te voren aan zeer intensieve bestraling is blootgesteld geweest, met licht van middelmatige sterkte laten beschijnen, verkrijgen wij een electrische reactie, waarvan de vorm ongeveer overeenkomt met dien, welke door vroegere onderzoekers is beschreven. [3])

Wij leiden den stroom af van de cornea en van de achtervlakte van het oog. Het potentiaalverschil der rustende retina wordt op de

---

[1]) Zie F. Himstedt u. W. A. Nagel. Die Verteilung der Reizwerte für die Froschnetzhaut im Dispersionsspectrum des Gaslichtes, mittels der Aktionsströme untersucht. Berichte der Naturforsch. Ges. zu Freiburg i. B., XI, 1901, p. 153.

[2]) Later zullen de intensiteiten van het gebruikte licht in absolute maat worden medegedeeld, waarbij dan tevens de nauwkeurige verhouding van de intensiteiten van het groen en het wit zal kunnen worden aangegeven.

[3]) Men zie bijv. Francis Gotch, The Journal of Physiol. 29, p. 388, 1903. Ibid. 31, p. 1, 1904. Hans Piper, Engelmann's Arch. f. Physiol. Suppl. 1905, p. 133. E. Th. v. Brücke u. S. Garten, Pflüger's Arch. f. d. ges. Physiol. 120, p. 290, 1907, welke beide laatsten tevens een kritisch overzicht geven van de literatuur, die op het onderwerp betrekking heeft. De genoemde onderzoekers hebben alle van een snel aanwijzend meetinstrument gebruik gemaakt.

gebruikelijke wijze gecompenseerd en de verbindingen met het meetinstrument zijn op zoodanige wijze aangebracht, dat een stroom, die van de cornea door den galvanometer naar de achtervlakte van het oog is gericht, het snaarbeeld bovenwaarts doet uitslaan. De op deze wijze gerichte actiestroom moge positief, de tegengesteld gerichte negatief heeten.

Wordt een momentane verlichting aangebracht, dan ziet men na een latent stadium een kleinen negatieven voorslag, onmiddellijk gevolgd door een bovenwaats gerichte snaarbeweging. Nadat de kromme een vrij spitsen top bereikt heeft, daalt zij eerst snel, daarna langzamer, om lang voordat zij weer tot de 0-lijn is afgedaald, opnieuw te stijgen. Deze laatste stijging begint een paar seconden na de verlichting, terwijl eerst geruimen tijd later de kromme haar tweede maximum bereikt, dat dikwijls veel hooger is gelegen dan de eerst beschreven spitse top. Ten slotte daalt de kromme langzaam naar de 0-lijn terug.

Wordt de bestraling eenigen tijd volgehouden, dan ziet men op het oogenblik, dat de verduistering intreedt, na een latent stadium een nieuwe stijging der kromme, een verduisteringsgolf, die des te hooger wordt, al naar mate de verlichting langer heeft geduurd.

De samengesteldheid van den vorm dezer krommen in 't algemeen en ook het merkwaardige verschijnsel, dat men zoowel bij de verlichting als bij de verduistering van het oog een positieven actiestroom waarneemt, doen het vermoeden ontstaan, dat in het oog twee of meer verschillende processen plaats grijpen, die gedeeltelijk na elkander maar ook gedeeltelijk gelijktijdig tot stand komen en aldus, minder of meer ineenvloeiende, den samengestelden vorm der electrische reactie bepalen.

Het nader onderzoek bevestigt dit vermoeden en indien gebruik wordt gemaakt van òf zeer zwak òf zeer sterk licht, schijnt het zelfs mogelijk te zijn een scheiding der boven onderstelde processen tot stand te brengen. De verschijnselen worden op de eenvoudigste wijze verklaard, wanneer men aanneemt, dat het aantal processen drie is, terwijl zij óf aan een zelfde substantie óf elk aan een andere substantie gebonden kunnen zijn. Gemakshalve zullen wij van drie substanties spreken, en terwijl wij voorloopig nog geen poging wenschen aan te wenden, om ze in het oog anatomisch nader te definieeren, zullen wij liever trachten hieronder haar eigenschappen te beschrijven en de voorwaarden te vermelden, waaronder haar werking zoo goed mogelijk onvermengd voor den dag komt.

De eerste substantie.

De door ons als „eerste" gequalificeerde substantie reageert sneller

dan de beide andere. Bij verlichting doet zij het snaarbeeld benedenwaarts, bij verduistering bovenwaarts uitwijken. Haar werking kan moeilijk geheel zuiver worden verkregen, maar deze treedt toch in een aan het licht geadapteerd oog, — dat kortheidshalve „lichtoog" mag worden genoemd, [1]) — sterk op den voorgrond, en wel des te meer, al naar mate het oog intensiever bestraald is geworden.

Uit den aard der zaak kan bij een lichtoog de verduisteringsprikkel zeer sterk worden genomen en men ziet dan ook, dat een van te voren lang met zeer sterk licht bestraald oog, dat plotseling wordt verduisterd, een machtig positief potentiaalverschil ontwikkelt. De aldus veroorzaakte opwaartsche snaarbeweging kan evenwel niet lang van duur zijn, daar door de verduistering het lichtoog in een donkeroog begint te veranderen en derhalve het effect onzer 1ste substantie niet meer zoo duidelijk voor den dag kan komen.

Hoewel in het lichtoog de omstandigheden minder gunstig zijn voor den verlichtings- dan voor den verduisteringsprikkel, is het toch zeer wel mogelijk eerstgenoemden aan te brengen. Vooreerst kan men de intensiteit van het licht, dat in een oog straalt, plotseling versterken, en ten tweede kan men een lichtoog gedurende korten tijd verduisteren, zoodat het nog niet tot een donkeroog is geworden en het dan plotseling met licht bestralen.

De tweede methode geeft betere resultaten dan de eerste en wij bezitten een aantal krommen, waarbij na kortdurende verduistering van een lichtoog een sterke lichtprikkel werd toegepast. De verlichtingsgolf is dan stijl benedenwaarts gericht en bereikt het aanzienlijke bedrag van 120 tot 130 Mikrovolt. Wel is waar wordt zij onmiddellijk door een opwaartsche snaarbeweging gevolgd, doch deze laatste is slechts klein, vergeleken bij de krachtige opwaartsche beweging, die in gelijke omstandigheden door een donkeroog wordt te voorschijn geroepen.

De tweede substantie.

De tweede substantie reageert minder snel dan de eerste. Bij verlichting drijft zij het snaarbeeld met matige snelheid bovenwaarts, terwijl zij het bij verduistering langzaam doet dalen, en derhalve bij de aanwending van gelijksoortige prikkels potentiaal-verschillen ontwikkelt, welke aan die der eerste substantie tegenovergesteld zijn. Haar werking komt nagenoeg onvermengd te voorschijn in een donkeroog, dat gedurende korten tijd door zwak licht wordt bestraald.

Laat men bij de beschijning met licht van zeer geringe intensiteit

[1]) Een aan de duisternis geadapteerd oog moge „donkeroog" heeten. Beide benamingen zijn analoog aan die van „lichtvorsch" en „donkervorsch", welke algemeen gebruikelijk zijn.

den verduisteringsprikkel snel op den verlichtingsprikkel volgen, zooals dat bij elke momentane bestraling geschiedt, dan wordt een kromme van eenvoudigen vorm geschreven met een stijler anakroot gedeelte, dat door de verlichting, een minder stijl katakroot gedeelte, dat door de verduistering wordt te voorschijn geroepen. De top der kromme ligt *binnen zekere grenzen* hooger, al naar mate de energie der bestraling toeneemt, hetzij door vermeerdering der intensiteit, hetzij door verlenging van den duur der bestraling. Bovenbedoelde grenzen worden bepaald door het in werking treden der beide andere substanties, die, wanneer zij hun invloed mede doen gevoelen, den vorm der kromme belangrijk wijzigen en compliceeren. Wordt er een sterke, momentane verlichting toegepast, dan ontstaat er een korte negatieve voorslag door de werking der eerste substantie, terwijl de zeer trage secundaire verheffing, die te voorschijn treedt, aan de werking der derde substantie moet worden toegeschreven.

De derde substantie.

De derde substantie reageert in dezelfde richting als de tweede maar veel trager. Bij verlichting drijft zij het snaarbeeld langzaam bovenwaarts, bij verduistering nog langzamer benedenwaarts. Zij is zoo veel trager dan de eerste en tweede substantie, dat haar werking in een geregistreerde kromme meestal voor het grootste deel geïsoleerd voor den dag komt, en dus gemakkelijk kan worden gevolgd.

De werking der derde substantie blijft onder twee omstandigheden uit: 1ste in een volkomen lichtoog, 2de in een donkeroog, dat gedurende korten tijd zeer zwak wordt verlicht.

Vooral merkwaardig zijn de krommen, die men verkrijgt, wanneer men den verlichtingsduur van een donkeroog stelselmatig wijzigt, en in 't bijzonder vestigen wij de aandacht op de daarbij voorkomende verduisteringseffecten. Is de verlichtingsduur zeer kort en is bovendien zwak licht gebruikt, dan komt, zooals boven reeds werd opgemerkt, de werking der tweede substantie onvermengd te voorschijn. Het verduisteringseffect bestaat in de daling der kromme tot aan de O-lijn.

Wordt de verlichtingsduur iets langer genomen, en beginnen zich daardoor de werkingen der beide andere substanties mede te doen gevoelen, dan wordt het verduisteringseffect door de resultante van drie krachten bepaald: De 1e substantie tracht het snaarbeeld bovenwaarts te verplaatsen, zij werkt in den beginne nog zwak, maar neemt, zoolang de verlichting duurt, regelmatig in kracht toe, zoodat zij al spoedig het effect der beide andere substanties overheerscht. Bij langdurige verlichting is het verduisteringseffect dus steeds een

opwaartsche golf, die met den duur van den verloopen verlichtingstijd grooter wordt.

De 2e substantie tracht het snaarbeeld te doen dalen, werkt in den beginne machtig sterk, maar neemt tijdens de verlichting geleidelijk in kracht af. Daar de tweede substantie in 't bijzonder in een donkeroog werkzaam is, worden de omstandigheden voor haar functie gedurende de verlichting steeds ongunstiger. Men kan geen krachtig verduisteringseffect van een donkeroog verwachten.

De 3e substantie is zoo traag, dat de verduisteringseffecten der eerste en tweede substantie meestal plaats grijpen op een oogenblik, waarop de derde substantie nog tracht het snaarbeeld bovenwaarts te verplaatsen. Het verduisteringseffect van de derde substantie zelf, bestaande in de langzame daling van het snaarbeeld, komt eerst veel later en vrijwel geïsoleerd tot stand.

Als gevolg van dit alles kan men in een reeks van krommen, — die bij geleidelijke verlenging van den verlichtingsduur van een donkeroog zijn verkregen, — waarnemen, dat de verduistering, die in de eerste krommen een negatieve golf doet ontstaan, in de volgende een positief effect ontwikkelt, welk laatste bij verdere verlenging van den verlichtingsduur geleidelijk in intensiteit toeneemt. In den strijd tusschen negatieven en positieven uitslag ziet men soms een bovenwaartsche snaarbeweging, die door een kleine benedenwaartsche onmiddellijk wordt voorafgegaan.

Van een aantal bijzonderheden, die zich bij de proeven voordoen, moge hier slechts het latente stadium met een enkel woord worden vermeld. De duur van dit tijdperk is in zoo hooge mate afhankelijk van de intensiteit der bestraling, dat men zelfs uit de latente stadia, die door vroegere onderzoekers zijn waargenomen, eenigermate kan oordeelen over de lichtintensiteiten, die zij hebben toegepast. Bij zeer zwakke verlichting komen latente stadia van de werking der 2e substantie te voorschijn, die het bedrag van 2 sec. kunnen overschrijden.

In tegenstelling met Gotch en Garten vermeldt Waller[1]) latente stadia van een even groot en grooter bedrag. Maar daar Waller bij zijn proeven van een langzaam werkenden Thomson-galvanometer gebruik maakte, bleef de door hem zelf reeds in 't licht gestelde mogelijkheid bestaan, dat er twee elkaar tegenwerkende krachten in 't spel waren, die elkaar aanvankelijk compenseerden, terwijl dan eerst na verloop van eenigen tijd een van beide de overhand kreeg. De door Waller

[1]) Augustus D. Waller, Philosoph. Transact. of the Royal Soc. of London, Ser. B, Vol. 193, p. 123, 1900.

veronderstelde krachten komen met die van onze eerste en tweede substantie overeen.

Een uitvoerige beschrijving onzer proeven, waarbij ook eenige onzer krommen zullen worden gereproduceerd, verschijnt elders.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt een mededeeling aan: *„Over de doorsneden van het net der maatpolytopen M_n der ruimte R_n met een ruimte R_{n-1} loodrecht op een diagonaal".*

1. In het eerste gedeelte eener mededeeling over vierdimensionale netten en hun ruimtedoorsneden (*Verslagen*, Jan. 1908) hebben we o.m. het net (C_8) omgezet in een net (C_{16}) en een net (C_{24}); hierbij bleef dus het regelmatige simplex, de vijfcel C_5, buiten beschouwing. Terwijl het regelmatige simplex van R_2, de gelijkzijdige driehoek, zoowel alleen als in combinatie met sommige andere regelmatige veelhoeken, een vlakvulling levert en het regelmatige simplex van R_3, het viervlak, in combinatie met het achtvlak de ruimte vullen kan, is het onmogelijk, zoo als te aangehaalder plaatse werd aangetoond, bij het regelmatige simplex C_5 van R_4 andere regelmatige cellen te vinden, die met elkaar in staat zijn de ruimte R_4 te vullen. Dit voert ons dan geleidelijk tot de vraag, of het niet mogelijk is een of meer — zij het dan ook niet geheel regelmatige — polytopen aan te wijzen, die met C_5 de vierdimensionale ruimte vullen. Het is ons doel op deze vraag hier een antwoord te geven, dat uit de vereeniging van enkele vroeger verkregen uitkomsten voortvloeit.

2. We beschouwen het net (M_5) der maatpolytopen M_5 van de ruimte R_5 en snijden dit door een ruimte R_4 loodrecht op een diagonaal. Dit werk splitst zich dan onmiddellijk weer in twee deelen. Eerst moet de doorsnee der ruimte R_4 met een bepaald maatpolytoop M_5 gevonden worden, bijv. met dat, waarvan het middelpunt aangenomen wordt tot oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel met assen evenwijdig aan de ribben; vervolgens moet worden nagegaan, hoe uit deze doorsnee blijken kan, op welke wijze de snijdende ruimte R_4 de overige maatpolytopen van het net aandoet.

Het antwoord op het eerste deel der vraag kan worden gevonden met behulp van een der beide figuren 1 en 2, die we daarom achtereenvolgens bespreken. Van deze is fig. 1, wat men verkrijgt, als men de grenselementen van M_5 op de diagonaal projecteert; zij vormt een uitbreiding van het tweede diagram $n = 5$ der plaat gevoegd bij de mededeeling over de doorsnee van het maatpolytoop

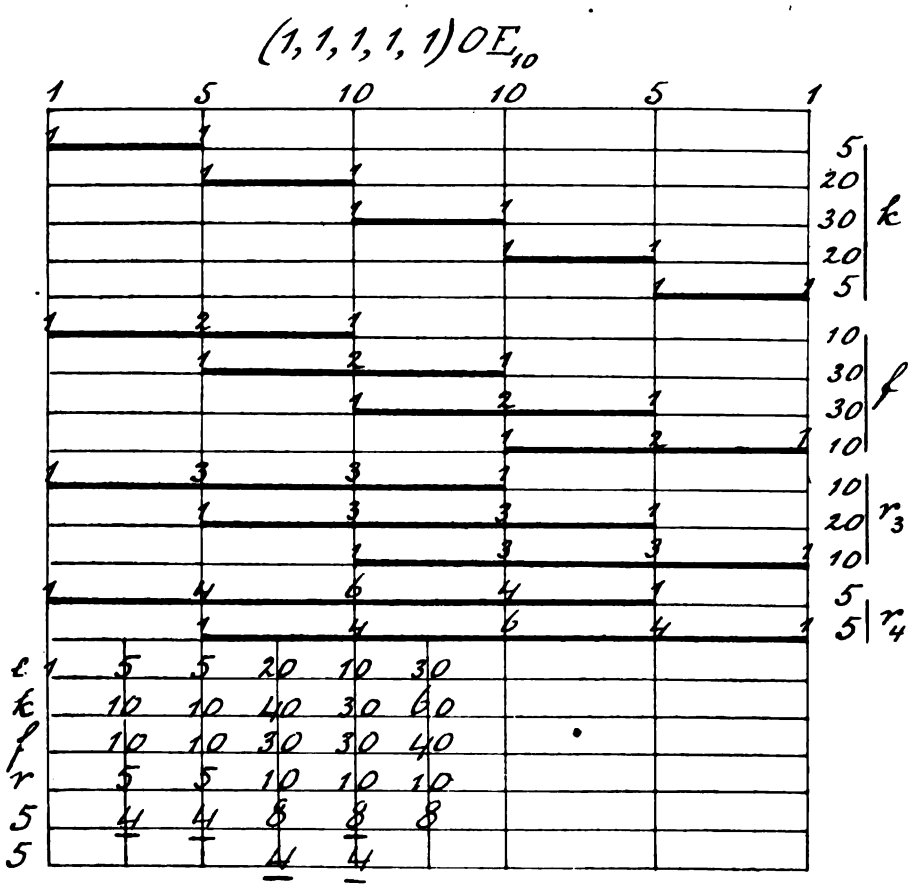


Fig. 1.

M_n der ruimte R_n met een centrale ruimte R_{n-1} loodrecht op een diagonaal (*Verslagen*, Dec. 1907). Ook hier bepalen we ons weer tot enkele doorsneden, n.l. tot de overgangsvormen en die tusschenvormen, die den afstand van twee aangrenzende overgangsvormen middendoor deelen; naar de daar ingevoerde notatie worden de overgangsvormen door de symbolen $\frac{1}{5}M_5, \frac{2}{5}M_5, \frac{3}{5}M_5, \frac{4}{5}M_5$, de tusschenvormen door de symbolen $\frac{1}{10}M_5, \frac{3}{10}M_5, \frac{5}{10}M_5, \frac{7}{10}M_5, \frac{9}{10}M_5$ onderscheiden. Wijl deze doorsneden incidenteel reeds gevonden zijn in de het laatst aangehaalde mededeeling, kunnen we hier met een bloote opsomming volstaan; om maatverhoudingen te kunnen aangeven nemen we weer aan, dat men de halve ribbe van M_5 tot lengte-eenheid gekozen heeft.

Overgangsvormen. Wijl twee doorsneden pM_5 en qM_5, waarvan de breuksymbolen p en q elkaar tot de eenheid aanvullen, twee

tegengesteld georiënteerde standen van hetzelfde polytoop vormen, hebben we slechts met twee overgangsvormen te doen, n.l. met $\frac{1}{5}M_s = -\frac{4}{5}M_s$ en $\frac{2}{5}M_s = -\frac{3}{5}M_s$. Van deze is $\frac{1}{5}M_s$ een regelmatige vijfcel $C_5^{(2\sqrt{2})}$, terwijl $\frac{2}{5}M_s$ ontstaat (zie *Verslagen*, blz. 470 onder $n=6$) door een vijfcel $C_5^{(4\sqrt{2})}$ aan de hoekpunten tot op de helft der ribben af te knotten en daardoor te vervormen tot een polytoop (10, 30, 30, 10) met ribben $2\sqrt{2}$; omtrent den laatsten vorm kan men ook *Verslagen*, blz. 486 vergelijken.

Tusschenvormen. Van de drie tusschenvormen $\frac{1}{10}M_s = -\frac{9}{10}M_s$, $\frac{3}{10}M_s = -\frac{7}{10}M_s$, $\frac{5}{10}M_s$ is de eerste een $C_5^{(\sqrt{2})}$, de tweede (*Verslagen*, blz. 470 onder $n=7$) een tot op een derde der ribben afgeknotte vijfcel $C_5^{(3\sqrt{2})}$, die door deze bewerking in een (20, 40, 30, 10) met ribben $\sqrt{2}$ overgaat, de derde (*Verslagen*, blz. 470 onder $n=5$) een tot op drie vijfde der ribben afgeknotte $C_5^{(5\sqrt{2})}$, die hierdoor een (30, 60, 40, 10) met ribben $\sqrt{2}$ geworden is.

We gaan nu over tot fig. 2, waar het vlak door twee de diagonaal PQ snijdende overstaande ribben PQ, $P'Q'$ tot projectievlak aangenomen is. De projectie van $M_5^{(2)}$ op dit vlak is de rechthoek

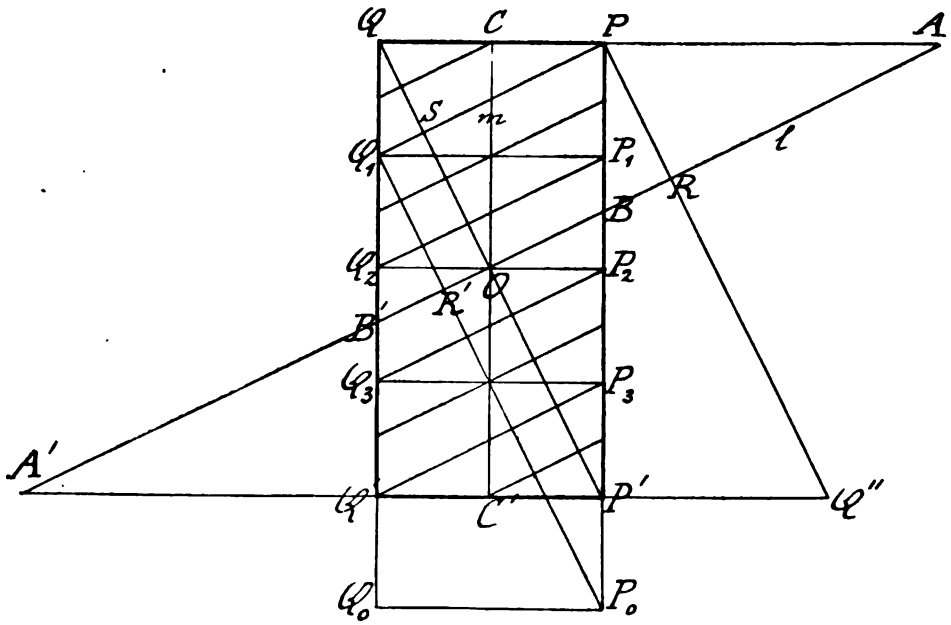


Fig. 2.

$PQQ'P'$ met ribben $PQ = 2$, $PP' = 4$, die door drie lijnen evenwijdig aan PQ in vier gelijke rechthoeken wordt verdeeld. De door het middelpunt O gaande snijruimte R_4 staat volgens de loodlijn l, in O op de diagonaal PQ opgericht, loodrecht op het projectievlak. Denkt men zich (*Verslagen*, blz. 473) eenige in de richting van de ribbe PQ naar weerskanten tegen elkaar gelegde maatpolytopen $M_5^{(2)}$ tot een prisma vereenigd, waarvan de basis een $M_4^{(2)}$ is en de opstaande ribben de richting PQ hebben, dan is de doorsnee der door O gaande ruimte R_4 met dit prisma een rhombotoop Rh_4, waarvan AA' — ter lengte van $4\sqrt{5}$ — de as met de periode 4 voorstelt. Vergelijking van dit rhombotoop met het in de volgens m loodrecht op het projectievlak staande ruimte R_4 gelegen maatpolytoop $M_4^{(2)}$ van $M_5^{(2)}$ leert, dat het gevonden rhombotoop te verkrijgen is door dit polytoop $M_4^{(2)}$ in de richting der diagonaal CC' tot een bedrag van $OA : OC = \sqrt{5}$ uit te rekken. Dit rhombotoop nu wordt door de zich in de snijpunten B, B' van de as AA' met de zijden PP', QQ' van den rechthoek projecteerende ruimten R_3 loodrecht op de as afgeknot. Maken we weer gebruik van de notatie $a\,(p, q)$ vroeger ingevoerd (*Verhandelingen*, deel IX, N°. 7, blz. 17), dan is de centrale doorsnee een polytoop $4\sqrt{5}\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$ en vinden we, met weglating van de voor alle doorsneden gelijke aslengte $4\sqrt{5}$, voor de boven beschrevene overgangs- en tusschenvormen de navolgende rhombotoopsymbolen :

$$\frac{1}{10}M_3 = \left(0, \frac{1}{8}\right), \quad \frac{3}{10}M_3 = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right), \quad \frac{5}{10}M_3 = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right), \quad \frac{7}{10}M_3 = \left(\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \quad \frac{9}{10}M_3 = \left(\frac{7}{8}, \frac{8}{8}\right),$$

$$\frac{1}{5}M_3 = \left(0, \frac{1}{4}\right), \quad \frac{2}{5}M_3 = \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right), \quad \frac{3}{5}M_3 = \left(\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right), \quad \frac{4}{5}M_3 = \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right).$$

3. Het tweede deel der vraag, n.l. hoe de snijdende ruimte R_4 de overige maatpolytopen aandoet, kan nu zoowel met behulp van analytische als van beschrijvende meetkunde beantwoord worden.

Met betrekking tot het boven aangenomen coördinatenstelsel hebben de middelpunten en de hoekpunten van alle cellen $M_5^{(2)}$ van het net louter geheele getallen tot coördinaten, en wel de middelpunten louter evene, de hoekpunten louter onevene. Hieruit volgt algemeen, dat de afstanden der middelpunten tot de centrale ruimte $\sum_1^5 x_i = 0$ veelvouden zijn van vijfdedeelen der diagonaal, die der hoekpunten tot dezelfde ruimte oneven veelvouden van tiendedeelen der diagonaal. Zoo levert in het algemeen een snijruimte $\sum_1^5 x_i = p$ vijf verschillende doorsneden, waarvan de breuken geplaatst voor M_4 onderling $\frac{1}{5}$ verschillen. Gaat de snijruimte door een hoekpunt, dan vindt men de overgangsdoorsneden; gaat ze door een middelpunt, dan vindt men de tusschenvormen.

Tot dezelfde uitkomst nu voert fig. 2. Laat men dezelfde ruimte R_4, die de diagonaal $P'Q$ der centrale cel loodrecht middendoor deelt, de rechts aangrenzende cel met de diagonaal PQ' snijden, dan gaat het van de diagonaal der centrale cel afgesneden stuk QO in PR over, wat op een vermindering met $QS = \frac{1}{5} QP'$ neerkomt, en dit herhaalt zich telkens als men rechts een cel verder gaat. Vervangt men de centrale cel door een andere, waarvan de projectie $P_0P_1Q_1Q_0$ die der centrale voor drie vierde bedekt, dan gaat QO in Q_1R' over, wat weer een vermindering met $\frac{1}{5}$ is, en ook dit herhaalt zich bij het voortdurend opschuiven der projectie in de richting PP' tot een bedrag PP_1. Dus vinden we ook hier steeds vijf verschillende symbolen pM_4, waarvan de breuken p met $\frac{1}{5}$ opklimmen. Met behulp van de boven gegeven kleine tabel laat zich deze uitkomst van de notatie pM_4 weer in die der rhombotoopsymbolen overbrengen.

Hiermee is de aan het begin gestelde vraag beantwoord. Wil men R_4 vullen met C_4 en een enkele andere soort van grondvormen, dan kan de vorm (10, 30, 30, 10) met dezelfde ribbenlengte dienst doen; beide vormen komen dan in twee tegengesteld georiënteerde standen voor. Laat men naast C_4 ter vulling van R_4 twee andere soorten van grondvormen toe, dan kan men de vormen (20, 40, 30, 10) en (30, 60, 40, 10) van dezelfde ribbenlengte gebruiken; let men op verschil in oriëntatie, dan eischt deze ruimtevulling vijf vormen. En heeft men er geen

bezwaar tegen meer dan twee werkelijk verschillende grondvormen samen te voegen, dan kan men de vijf vormen $\frac{1}{20}M_5$, $\frac{5}{20}M_5$, $\frac{9}{20}M_5$, $\frac{13}{20}M_5$, $\frac{17}{20}M_5$, d.i. $\left(0,\frac{1}{16}\right)$, $\left(\frac{1}{16},\frac{5}{16}\right)$, $\left(\frac{5}{16},\frac{9}{16}\right)$, $\left(\frac{9}{16},\frac{13}{16}\right)$, $\left(\frac{13}{16},1\right)$, nemen, waarvan de eerste een $C_5^{(1\sqrt{2})}$ is; deze komen dan slechts in een enkelen stand voor.

4. Voor we tot het algemeene geval van R_n overgaan geven we den eenvoudigsten weg aan, langs welken men bij de vulling van een vierdimensionaal blok van een der gevonden vormen doch van k-maal grooter lineaire afmeting het aantal der samenstellende deelen berekenen kan. Ter voorbereiding van het algemeene geval eener willekeurige n voeren we daarbij een eenvoudiger notatie in. We onderscheiden de overgangsvormen en de tusschenvormen door de letters O en T van elkaar en geven dan door een exponent — en dat wel ter vermijding van wortelteekens in $\sqrt{2}$ als nieuwe eenheid — de afmeting, door een voetindex de plaats der doorsnee aan. Verder stellen we het polytoop, dat ontstaat door een regelmatige vijfcel met een ribbenlengte $p\sqrt{2}$ aan de vijf hoekpunten tot op de fractie q der ribbe regelmatig af te knotten, door het symbool $qS^{(p)}$ voor. Zoo is dan elk der vijf verschillende vormen voor te stellen door vier verschillende teekens als volgt:

$$\frac{1}{10}M_5^{(2)}=\left(0,\frac{1}{8}\right)=T_1^{(1)}=S_{,}^{(1)}$$
$$\frac{3}{10}M_5^{(2)}=\left(\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right)=T_2^{(1)}=\frac{1}{3}S_{,}^{(3)}$$
$$\frac{5}{10}M_5^{(2)}=\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)=T_3^{(1)}=\frac{3}{5}S_{,}^{(5)}$$

$$\frac{1}{5}M_5^{(2)}=\left(0,\frac{1}{4}\right)=O_1^{(2)}=S_{,}^{(2)}$$
$$\frac{2}{5}M_5^{(2)}=\left(\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right)=O_2^{(2)}=\frac{1}{2}S_{,}^{(4)}$$

terwijl de voorbij het midden optredende vormen $\frac{7}{10}M_5^{(2)}$, $\frac{9}{10}M_5^{(2)}$ en $\frac{3}{5}M_5^{(2)}$, $\frac{4}{5}M_5^{(2)}$ van tegenovergestelde orientatie door $T_{-2}^{(1)}$, $T_{-1}^{(1)}$ en $O_{-2}^{(2)}$, $O_{-1}^{(2)}$ worden aangeduid.

Door beschouwing van de afgeknotte vijfcellen $qS^{(p)}$ vindt men nu onmiddellijk

$$\left.\begin{aligned} O_1^{(2k)} &= T_1^{(2k)} \\ T_2^{(k)} &= T_1^{(3k)} - 5T_1^{(k)} \\ O_2^{(2k)} &= T_1^{(4k)} - 5T_1^{(2k)} \\ T_3^{(k)} &= T_1^{(5k)} - 5T_1^{(3k)} + 10T_1^{(k)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Van deze betrekkingen wordt bijv. de laatste als volgt afgeleid. De vorm $T_3^{(k)} = \frac{3}{5} S^{(5k)}$ ontstaat door de vijfcel $S^{(5k)} = T_1^{(5k)}$ tot op $\frac{3}{5}$ der ribben af te knotten. Wijl elke twee der vijf polytopen $S^{(3k)} = T_1^{(3k)}$, die door de afknotting worden weggenomen, een $S^{(k)} = T_1^{(k)}$ gemeen hebben, trekt men dus bij vermindering van $T_1^{(5k)}$ met $5T_1^{(3k)}$ tienmaal $T_1^{(k)}$ te veel af.

Gezamenlijk voeren de vergelijkingen (1) tot de volumebetrekkingen

$$\frac{T_1^{(k)}}{1} = \frac{O_1^{(2k)}}{16} = \frac{T_2^{(k)}}{76} = \frac{O_2^{(2k)}}{176} = \frac{T_3^{(k)}}{230} = \frac{R^{(2k)}}{384},$$

waarin $R^{(2k)}$ het rhombotoop is, dat door de vereischte uitrekking van een $M_4^{(2k)}$ in de richting eener diagonaal ontstaat. Is het getal 384 afgeleid uit de opmerking, dat $O_1^{(2k)} = \frac{1}{4!} R^{(2k)}$ is, dan kunnen de twee betrekkingen

$$2(16 + 176) = 384 \quad , \quad 2(1 + 76) + 230 = 384,$$

die uitdrukken, dat $R^{(2k)}$ zoowel uit de vier vormen $O_i^{(2k)}$ als uit de vijf vormen $T_i^{(k)}$ op te bouwen is, tot controle dienen.

We wijzen nu ten voeten uit aan, hoe de gevonden betrekkingen ons geheel over de moeilijkheid van de bepaling der gezochte aantallen heen helpen. Daartoe merken we op, dat de hoekpunten van de k^5 maatpolytopen $M_5^{(2)}$, die gezamenlijk een blok $M_5^{(2k)}$ vormen, zich op een diagonaal van dat blok behalve in de uiteinden in de $5k-1$ punten projecteeren, die deze diagonaal in $5k$ gelijke deelen verdeelen. Duiden we (fig. 3) de aldus op de diagonaal verkregen $5k+1$ punten door $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{5k}$ aan, dan draagt het segment

A_0A_1 de projectie van een enkele $M_5^{(2)}$, het segment A_1A_5 die van een groep van vijf, het segment A_5A_7 die van een groep van vijftien

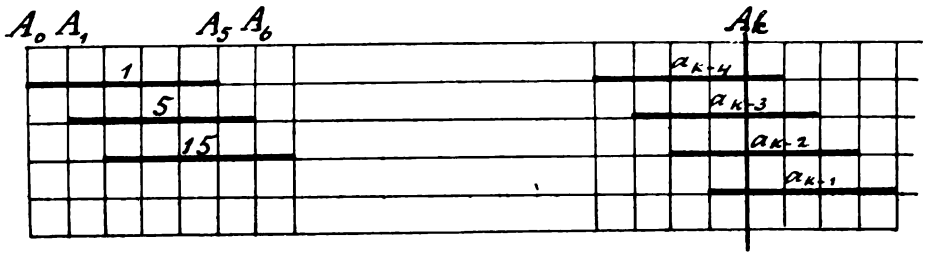


Fig. 3.

maatpolytopen, enz., waarbij de aantallen 1, 5, 15, enz. der maatpolytopen met dezelfde projectie de coëfficienten a_p zijn van de termen x^p in $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1})^4$ voor $p = 0, 1, 2$, enz. Bij de bepaling van de doorsnee $\frac{1}{5} M_5^{(2k)}$ treft de snijdende ruimte R_4 de diagonaal van projectie in het deelpunt A_k, waaruit volgt, dat de groepen van polytopen $M_5^{(2)}$ overeenkomende met de coëfficienten $a_0, a_1, \ldots a_{k-5}$ nog niet, de groepen overeenkomende met de coëfficienten $a_k, a_{k+1}, \ldots a_{5k-5}$ niet meer gesneden worden, dat we dus alleen met de vier rechts in de figuur aangewezen groepen

$$a_{k-4}\, O_{-1}^{(2)}, \quad a_{k-3}\, O_{-2}^{(2)}, \quad a_{k-2}\, O_2^{(2)}, \quad a_{k-1}\, O_1^{(2)}$$

te doen hebben. Nu doet zich bij de coëfficienten a_p de bijzonderheid voor, dat ze zich voor $p \leqq k$ als binominaalcoëfficienten laten voorstellen en wel door de vergelijking

$$a_p = (p + 4)_4,$$

terwijl ze voor grooter waarden van p „afgeknaagde binominaalcoefficienten" zijn. Dus vinden we hier onmiddellijk

$$O_1^{(2k)} = T_1^{(2k)} = (k + 3)_4\, O_1^{(2)} + (k + 2)_4\, O_2^{(2)} + (k + 1)_4\, O_{-2}^{(2)} + (k)_4 O_{-1}^{(2)}, \ldots (2)$$

en geheel op dezelfde wijze

$$T_1^{(2k+1)} = (k+4)_4 T_1^{(1)} + (k+3)_4 T_2^{(1)} + (k+2)_4 T_3^{(1)} + (k+1)_4 T_{-2}^{(1)} + (k)_4 T_{-1}^{(1)}, \ldots (3)$$

welke beide betrekkingen, in verband met de volumeverhoudingen, tot de identiteiten

$$\left.\begin{aligned} k^4 &= (k + 3)_4 + 11\,(k + 2)_4 + 11\,(k + 1)_4 + (k)_4 \\ (2k + 1)^4 &= (k + 4)_4 + 76\,(k + 3)_4 + 230\,(k + 2)_4 + 76\,(k + 1)_4 + (k)_4 \end{aligned}\right\}$$

terugvoeren.

Uit (1), (2), (3) worden nu gemakkelijk alle uitkomsten afgeleid.

Ten bewijze hiervan deelen we voor de beide gevallen, waarin het blok uit een even of uit een oneven aantal maatpolytopen bestaat, de samenstelling der centrale doorsnee mee, in den vorm

$$T_3^{(2k)} = \frac{5}{12}k^2\Big\{(23k^2-11)\,O_1^{(2)} + (23k^2+1)\,O_2^{(2)} + \\ + (23k^2-1)\,O_{-2}^{(2)} + (23k^2+11)\,O_{-1}^{(2)}\Big\},$$

$$T_3^{(2k+1)} = \frac{5}{12}k(k+1)\Big\{(23k^2+23k-10)\left(T_1^{(1)}+T_{-1}^{(1)}\right) + \\ + (23k^2+23k+8)\left(T_2^{(1)}+T_{-2}^{(1)}\right)\Big\} \\ + \frac{1}{12}(115k^4+230k^3+185k^2+70k+12)\,T_3^{(1)}.$$

5. We beschouwen thans in de ruimte R_n het net der maatpolytopen $M_n^{(2)}$ en bespreken daarvan de overgangsdoorsneden en de midden tusschen twee naburige overgangsdoorsneden gelegen tusschenvormen, geleverd door ruimten R_{n-1} loodrecht op een diagonaal. We vinden dan:

$$\frac{1}{2n}M_n^{(2)} = \left(0, \frac{1}{2n-2}\right) = T_1^{(1)} = S^{(1)}, \qquad \frac{1}{n}M_n^{(2)} = \left(0, \frac{1}{n-1}\right) = O_1^{(2)} = S^{(2)},$$

$$\frac{3}{2n}M_n^{(2)} = \left(\frac{1}{2n-2}, \frac{3}{2n-2}\right) = T_2^{(1)} = \frac{1}{3}S^{(3)}, \qquad \frac{2}{n}M_n^{(1)} = \left(\frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}\right) = O_2^{(2)} = \frac{1}{2}S_2^{(4)},$$

$$\frac{5}{2n}M_n^{(2)} = \left(\frac{3}{2n-2}, \frac{5}{2n-2}\right) = T_3^{(1)} = \frac{3}{5}S^{(5)}, \qquad \frac{3}{n}M_n^{(2)} = \left(\frac{2}{n-1}, \frac{3}{n-1}\right) = O_3^{(2)} = \frac{2}{3}S^{(6)},$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

voor n even — voor n even

$$\frac{n-1}{2n}M_n^{(2)} = \left(\frac{n-3}{2n-2}, \frac{n-1}{2n-2}\right) = T_{\frac{1}{2}n}^{(1)} = \frac{n-3}{n-1}S^{(n-1)}, \qquad \frac{1}{2}M_n^{(2)} = \left(\frac{n-2}{2n-2}, \frac{n}{2n-2}\right) = O_{\frac{1}{2}n}^{(2)} = \frac{n-2}{n}S^{(n)},$$

voor n oneven — voor n oneven

$$\frac{1}{2}M_n^{(2)} = \left(\frac{n-2}{2n-2}, \frac{n}{2n-2}\right) = T_{\frac{1}{2}(n+1)}^{(1)} = \frac{n-2}{n}S^{(n)}, \qquad \frac{n-1}{2n}M_n^{(2)} = \left(\frac{n-3}{2n-2}, \frac{n-1}{2n-2}\right) = O_{\frac{1}{2}(n-1)}^{(2)} = \frac{n-3}{n-1}S^{(n-1)}.$$

Bepalen we ons tot deze vormen en laten we het enkele hoekpunt als overgangsvorm weer buiten beschouwing, dan hebben we dus steeds met n verschillende vormen te doen en wel voor n even met $\frac{1}{2}n$ overgangs- en $\frac{1}{2}n$ tusschenvormen, voor n oneven met $\frac{1}{2}(n-1)$

overgangs- en $\frac{1}{2}(n+1)$ tusschenvormen. Zoo verkrijgen we dan in R_{n-1} weer twee min of meer regelmatige ruimtevullingen, waaraan het regelmatige simplex dier ruimte deelneemt.

In verband met de symbolen ${}_qS^{(p)}$ gelden hier de betrekkingen

$$\begin{aligned} T_2^{(1)} &= T_1^{(3)} - (n)_1\, T_1^{(1)}, \\ O_2^{(2)} &= T_1^{(4)} - (n)_1\, T_1^{(2)}, \\ T_3^{(1)} &= T_1^{(5)} - (n)_1\, T_1^{(3)} + (n)_2\, T_1^{(1)}, \\ O_3^{(2)} &= T_1^{(6)} - (n)_1\, T_1^{(4)} + (n)_2\, T_1^{(2)}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

wat uitloopt

voor n even op

$$O_{\frac{1}{2}n}^{(2)} = T_1^{(n)} - (n)_1 T_1^{(n-2)} + (n)_2 T_1^{(n-4)} - \ldots + (-1)^{(\frac{1}{2}n-1)} (n)_{\frac{1}{2}n-1}\, T_1,$$

voor n oneven op

$$T_{\frac{1}{2}(n+1)}^{(1)} = T_1^{(n)} - (n)_1 T_1^{(n-2)} + (n)_2 T_1^{n-4} - \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} (n)_{\frac{1}{2}(n-1)}\, T_1,$$

terwijl de verhoudingen der volumina bepaald worden door

$$\frac{T_1^{(1)}}{1} = \frac{O_1^{(2)}}{2^{n-1}} = \frac{T_2^{(1)}}{3^{n-1} - (n)_1} = \frac{O_2^{(2)}}{4^{n-1} - (n)_1 2^{n-1}} = \frac{T_3^{(1)}}{5^{n-1} - (n)_1 3^{n-1} + (n)_2} = \text{enz.}$$

Verder gelden de herleidingsformules:

$$\left.\begin{aligned} T_1^{(2k)} &= (k+n-2)_{n-1} O_1^{(2)} + (k+n-3)_{n-1} O_2^{(2)} + \ldots + (k)_{n-1}\, O_{-1}^{(2)} \\ T_1^{(2k+1)} &= (k+n-1)_{n-1} T_1^{(1)} + (k+n-2)_{n-1} T_2^{(1)} + \ldots + (k)_{n-1}\, T_{-1}^{(1)} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots (1)$$

die ons in staat stellen het aantal deelen van verschillende soort te berekenen, waarin een blok van $(2k)^n$ of $(2k+1)^n$ maatpolytopen $M_n^{(2)}$ kan versneden worden.

Als voorbeeld, waaraan iets te rekenen valt, beschouwen we het geval van de middendoorsnee loodrecht op de diagonaal van een blok van 10^{10} maatpolytopen $M_{10}^{(2)}$. We vinden dan, in verband met de betrekkingen

$$\frac{O_1}{1} = \frac{O_2}{502} = \frac{O_3}{14608} = \frac{O_4}{88234} = \frac{O_5}{156190} = \frac{R}{9!},$$

waarin R het rhombotoop voorstelt, dat de som der negen vormen

$$O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4,\ O_5,\ O_{-4},\ O_{-3},\ O_{-2},\ O_{-1}$$

is, uitgaande van

$$\frac{1}{2} M_{10}^{(20)} = O_5^{(20)} = T_1^{(100)} - 10 T_1^{(80)} + 45 T_1^{(60)} - 120 T_1^{(40)} + 210 T_1^{(20)},$$

met toepassing van

$$T_1^{(20k)} = (10k + 8)_9 O_1^{(2)} + (10k + 7)_9 O_2^{(2)} + \ldots + (10k)_9 O_{-1}^{(2)}$$

voor $k = 5, 4, 3, 2, 1$, na eenige berekening, de uitkomst

$$394713550 (O_1^{(2)} + O_{-1}^{(2)}) + 410820025 (O_2^{(2)} + O_{-2}^{(2)})$$
$$+ 422709100 (O_3^{(2)} + O_{-3}^{(2)}) + 430000450 (O_4^{(2)} + O_{-4}^{(2)})$$
$$+ 432457640 O_5^{(2)},$$

die door invoeging der boven gegeven verhoudingen tot de identiteit

$$O_5^{(20)} = 10^9 O_5^{(2)}$$

terugvoert.

Sterrekunde. — De Heer J. C. KAPTEIJN biedt eene mededeeling aan van den Heer W. DE SITTER: „*Over de massa's en baanelementen der satellieten van Jupiter, en de massa van het systeem.*" (Vervolg van bladz. 599).

(Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN).

III. *Groote ongelijkheden.*

De waarden hiervan, uit de heliometerwaarnemingen van 1891, 1901 en 1902 afgeleid, zijn vereenigd in Tafel III, met hunne waarschijnlijke fouten. De photographische bepaling van 1902 is weder om de reeds genoemde reden buiten beschouwing gelaten.

Uit deze waarden van x_i zijn de conditie-vergelijkingen afgeleid, die beneden zullen worden medegedeeld.

De argumenten dezer ongelijkheden zijn $l_i + v$, waar gesteld is $v = l_3 - 2 l_2 = l_1 - 2 l_2 + 180°$. De perioden zijn derhalve zeer nabij die van de middelpuntsvergelijkingen en in een korte serie waarnemingen, zooals de gebruikte heliometer-reeksen zijn, zijn de groote ongelijkheden slechts onvolkomen van de middelpuntsvergelijkingen te scheiden. Dit is de oorzaak van de slechte overeenstemming der drie waarnemingsreeksen.

In de eclipsen is de periode der groote ongelijkheden voor de drie satellieten dezelfde, n. l. 438 dagen [1]), terwijl de perioden der

[1]) Zie LAPLACE. *Mécanique Céleste*, Tome IV, Livre VIII, Chapitre II.

TAFEL III. GROOTE ONGELIJKHEDEN.

Autoriteit	x_1	x_2	x_3
1891	$0^\circ.509 \pm 0^\circ.018$	$1^\circ.021 \pm 0^\circ.013$	$0^\circ.059 \pm 0^\circ.007$
1901	0.481 ± 47	1.089 ± 30	0.049 ± 20
1902	0.372 ± 34	1.171 ± 19	0.034 ± 12
DAMOISEAU	0.455	1.074	0.073
SOUILLART's theorie	0.432	1.026	0.063
Massa's (*C*)	$0\ 430 \pm .020$	$0.988 \pm .017$	0.064 ± 003

middelpuntsvergelijkingen van 11 tot 19 malen dit bedrag worden De beide onbekenden zijn dus door deze waarnemingen zeer goed te scheiden. Er ontstaat hier echter een andere complicatie, die bij de extra-eclipswaarnemingen niet voorkomt. De ongelijkheden van groep II n.l. hebben perioden die tusschen 406 en 486 dagen liggen, en zullen dus de bepaling van x_i uit de eclipswaarnemingen zeer bemoeielijken. Zoo is b. v. met de massa's (*C*) en de boven opgegeven excentriciteiten de coëfficient van de ongelijkheid in de lengte van satelliet II, die eene periode heeft van 463 dagen, $0^\circ.038$. Deze ongelijkheid wordt door DAMOISEAU (daar zij evenredig is aan e_2) geheel verwaarloosd, en het is dus te verwachten dat zij zijne waarde van x_2, die volgens de inleiding tot zijne tafels direct aan de waarnemingen is ontleend, in meerdere of mindere mate zal hebben vervalscht. Hetzelfde geldt in eenigszins mindere mate van de overeenkomstige termen in de lengtes van den eersten en derden satelliet.

Het is te hopen dat de bewerking der photometrische eclipswaarnemingen der Harvard-sterrenwacht er toe zal bijdragen de onzekerheid, die thans nog over het bedrag der groote ongelijkheden heerscht, te verminderen.

IV. *De Libratie.*

De middelbare lengtes l_1, l_2, l_3 zijn afgeleid uit de waarnemingen van 1891 (GILL, heliometer), 1892—93, 1893—94, 1894—95, 1895—96, 1897, 1898 (Helsingfors en Pulkowa, platen), 1901, 1902 (COOKSON, heliometer) en 1904 (Kaap, platen). De bewerking is uitgevoerd in Gron. Publ. 17. De massa's (A) zijn het resultaat van deze discussie. Daar de periode der libratie onafhankelijk is van $\varkappa'$ is zij voor de massa's (B) dezelfde als voor (A). Ook de overgang van (B) op (C) geeft geen verandering in de periode. Er behoeft dus alleen nage-

gaan te worden in hoeverre door den overgang van (A) op (C) de ongelijkheden van groep II worden veranderd, en wat de invloed hiervan op de libratie is. Deze invloed is gebleken zoo klein te zijn, dat eene nieuwe bepaling der libratie overbodig is. De definitief aangenomen libratie is derhalve dezelfde als in Gron. Publ. 17, n.l.

$$\vartheta = 0^{\circ}{\cdot}158 \sin \frac{T - 1895.09}{7.00},$$

waar T is uitgedrukt in jaren.

De waarschijnlijke fout van de periode overeenkomende met de aangenomen waarschijnlijke fouten der massa's (C) is $\pm$ 0.13.

Ook de correcties tot de middelbare lengtes op 1900 Jan 0.0 zijn onveranderd uit Gron. Publ. 17 overgenomen.

Tafel IV geeft de waargenomen correcties tot de middelbare lengtes met hunne direct uit de waarnemingen afgeleide waarschijnlijke fouten en de residus die bij substitutie der definitief aangenomen ongelijkheden van groep II en libratie overblijven. De beide laatste kolommen geven de w. f. van de grootheid $\Delta l_1 - 3\,\Delta l_3 + 2\,\Delta l_4$ en de residus voor diezelfde grootheid.

Bij de bepaling der libratie uit extra-eclips-waarnemingen vindt men de middelbare lengtes voor epoques die ongeveer samenvallen met het tijdstip der oppositie, en die dus gemiddeld 400 dagen van elkaar liggen. Deze tusschentijd verschilt slechts weinig van de periode der ongelijkheden van groep II. Deze doen zich derhalve voor als ongelijkheden met schijnbare perioden die tusschen 6 en 8 jaren liggen, en zijn dus van de libratie zelve moeilijk te scheiden. Bij eclips-waarnemingen bestaat dit bezwaar niet.

De methode van successieve benadering, die in Gron. Publ. 17 gebruikt is om de waarschijnlijkste waarden zoowel van deze ongelijkheden als van de libratie te bepalen, behoeft hier niet besproken te worden. Ik kan volstaan met naar die publicatie te verwijzen. De residus van Tafel IV zijn practisch dezelfde als de in Gron. Publ. 17 gevondene, en het is dus overbodig ze hier in bijzonderheden te bespreken. De residus van de satellieten I en III zijn, zooals l. c. uitvoerig besproken is, niet zeer bevredigend. Ook op dit punt behoeven de uit extra-eclipswaarnemingen afgeleide resultaten aanvulling uit eclipswaarnemingen.

V. *Middelbare lengtes en middelbare bewegingen.*

De correcties tot de middelbare lengtes op 1900 Jan. 0.0 der drie binnenste satellieten zijn bepaald tegelijk met de libratie, en de residus zijn reeds in Tafel IV gegeven. Voor de vierde satelliet is de aan-

TAFEL IV. MIDDELBARE LENGTES EN LIBRATIE.

Serie	Δl_1			Δl_2			Δl_3			ϑ	
	Waargen. correctie	w. f.	Residu	Waargen. correctie	w. f.	Residu	Waargen. correctie	w. f.	Residu	w. f.	Residu
1891	+ 0°100	± °006	— °034	+ 0°065	± °003	— °007	— 0°031	± °002	— °013	± °012	— °039
1892—3	+ ·073	± 8	— 22	+ ·051	± 5	— 17	— ·023	± 3	— 4	± 14	+ 21
'93—4	+ ·128	± 14	+ 31	+ ·019	± 9	— 26	— ·034	± 5	— 16	± 34	+ 76
'94—5	+ ·131	± 11	+ 11	— ·012	± 6	+ 9	— ·029	± 3	— 17	± 23	— 49
'95—6	+ ·152	± 6	— 8	— ·026	± 4	0	— ·004	± 2	+ 13	± 14	+ 18
'97	+ ·112	± 11	— 64	+ ·019	± 9	+ 6	— ·014	± 4	+ 9	± 30	— 59
'98	+ ·163	± 10	+ 2	+ ·120	± 5	+ 21	— ·002	± 3	+ 26	± 19	— 10
1901	+ ·136	± 9	+ 23	+ ·020	± 6	— 1	— ·038	± 4	— 26	± 23	— 24
'02	+ ·134	± 7	— 9	— ·025	± 4	+ 2	— ·023	± 3	— 7	± 17	— 29
'04	+ ·231	± 12	+ 64	+ ·063	± 7	+ 15	— ·006	± 4	+ 26	± 27	+ 71

genomen correctie — 0°.030, en de residus zijn gegeven in Tafel V.

TAFEL V. Δl_4.

Epoque	Waargen. correctie	w. f.	Residu
1891	— 0°.0248	± °.0010	+ °.0035
1901	— .0361	± 18	— 58
1902	— .0342	± 16	— 37

Telt men de correcties op bij de in de berekening der tabulaire plaatsen gebruikte waarden, en betrekt men die dan op het punt Aries door bijvoeging der aangenomen lengte van het punt *O*, dan vindt men voor 1900 Jan. 0, middelbare middag te Greenwich, de waarden die hieronder sub I zijn aangegeven.

DAMOISEAU geeft in de inleiding tot zijne tafels de waarden voor 1750 Jan. 0.5, middelbare tijd van Parijs. Vat men deze op als direct uit de waarnemingen afgeleid, dan behoeven ze nog een kleine correctie, daar DAMOISEAU voor den licht-tijd heeft aangenomen 493s.2, terwijl in de reductie der moderne waarnemingen de waarde 498s.46 is gebruikt. Had DAMOISEAU deze laatste waarden gebruikt, dan zou hij dezelfde lengtes hebben gevonden voor een tijdstip dat 5s.26 × Δ vroeger is, als Δ de gemiddelde afstand van Jupiter is. Aan de waargenomen lengtes moet dus de correctie[1])

$$+\frac{5.26}{86400}\,.\,\Delta\,.\,n_i = +\,0.000317\;n_i$$

toegevoegd worden. Doet men dit, en herleidt men dan de gecorrigeerde waarden met DAMOISEAU's middelbare bewegingen tot 1900 Jan. 0.0, M. T. van Greenwich, dan vindt men de waarden hieronder opgegeven onder II.

Middelbare lengtes voor 1900 *Jan.* 0.0.

	I (*modern*)	*II* (DAMOISEAU)
l_1	= 142°.604 ± 0°.010	142°.645 ± °.004
l_2	= 99 .534 ± .007	99 .569 ± .006
l_3	= 167 .999 ± .007	168 .028 ± .008
l_4	= 234 .372 ± .002	234 .360 ± .010.

[1]) In Gron. Publ. 17 heb ik, op gezag van COOKSON, Cape XII. 3. bladz. 56, aangenomen dat MARTH's lengtes voor 1750.0 met die van DAMOISEAU identisch zijn. Dit is evenwel niet zoo, daar MARTH de correctie voor de verbetering der aberratie-constante met het verkeerde teeken heeft aangebracht. Mijne aandacht is hierop gevestigd door den Heer BANACHIEWICZ.

De waarschijnlijke fouten voor DAMOISEAU berusten op schattingen, en bevatten *niet* de w. f. der middelbare bewegingen. Van deze laatste heeft Prof. OUDEMANS in deze Verslagen (October 1906) eene schatting gemaakt. Hij vindt voor de onzekerheid der vier middelbare bewegingen in eenheden der achtste driemaal:

$$\pm 73 \qquad \pm 55 \qquad \pm 37 \qquad \pm 24$$

Uit vergelijking der waarden I en II volgen de volgende correcties tot DAMOISEAU's middelbare bewegingen:

$$\delta n_1 = -\,0°.0000\,0075 \pm °.0000\,0020$$
$$\delta n_2 = -\,0\,.0000\,0064 \pm \qquad 16$$
$$\delta n_3 = -\,0\,.0000\,0053 \pm \qquad 20$$
$$\delta n_4 = +\,0\,.0000\,0022 \pm \qquad 18$$

Het is opmerkelijk dat deze correcties zeer nabij van de grootte zijn van de door OUDEMANS geschatte onzekerheden. Brengt men deze correcties aan, dan voldoen de resulteerende waarden niet aan de conditie

$$n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0.$$

Voegt men echter nog de correcties

$$\delta n_1 = -\,2 \qquad \delta n_2 = +\,3 \qquad \delta n_3 = -\,3$$

toe aan de laatste decimaal, dan is de conditie streng voldaan. De zoo verkregen middelbare bewegingen zijn de definitief geadopteerde. Zij zijn:

$$n_1 = 203°.4889\,9261 \qquad n_2 = 50°.3176\,4587$$
$$n_3 = 101\,.3747\,6145 \qquad n_4 = 21\,.5711\,0965$$

Dit zijn de bewegingen ten opzichte van het punt Aries. Om de siderische middelbare bewegingen te krijgen moeten ze met 0°.0000 3822 verminderd worden.

VI. De massa van het systeem

De klassieke bepaling van de massa van het Jupiter-systeem door NEWCOMB[1]) was gebaseerd op satellieten-waarnemingen, op storingen teweeggebracht in de beweging van kometen, en op die van de planeten Themis, Polyhymnia en Saturnus. Het schijnt mij beter toe van deze alleen de bepalingen uit de drie planeten te behouden. Van de oudere satellieten-waarnemingen is de onzekerheid der schaalwaarde (die drie malen vergroot op de massa overgaat) zoodanig dat hun gewicht in vergelijking met de moderne waarnemingen en met de bepalingen uit de planeten geheel te verwaarloozen is.

[1]) Astronomical papers of the American Ephemeris, Vol. 5, Part. 5.

Ook NEWCOMB kent om dezelfde reden aan deze satellieten-waarnemingen een uiterst klein gewicht toe.

Het gebruiken van kometen-waarnemingen schijnt mij zeer gevaarlijk. Het is zeer onzeker, zoo niet onwaarschijnlijk, dat het waargenomen licht-centrum op verschillende tijden van dezelfde verschijning, en à fortiori in verschillende verschijningen, dezelfde relatieve positie heeft ten opzichte van het zwaartepunt. Ook NEWCOMB erkent dat om deze reden de bepalingen uit kometen weinig vertrouwen verdienen. Toch kent hij aan de bepaling door VON HAERDTL uit de komeet van WINNECKE een groot gewicht toe, daar de voorstelling der waargenomen plaatsen der komeet zoo goed is. Het schijnt mij toe dat deze goede voorstelling niets aan de kracht van de juist gegeven consideratie ontneemt, en ik acht het verkieselijk ook deze bepaling, evenals die uit andere kometen te verwerpen.

Er blijven dus over de bepalingen uit de drie planeten, die ik overneem met dezelfde gewichten die NEWCOMB er aan toekent, en de moderne satellieten-waarnemingen, die NEWCOMB nog niet in zijne discussie kon opnemen. Voor deze laatste is de schaalwaarde op volkomen bevredigende wijze bepaald uit gelijktijdige waarnemingen van standaard-sterren. Toch heb ik aan de satellieten-waarnemingen een relatief kleiner gewicht toegekend dan aan de bepalingen uit planeten, om rekening te houden met de mogelijkheid van kleine systematische fouten bij de overdraging van de schaalwaarde van den afstand der standaard-sterren op de onderlinge afstanden der satellieten.

In mijne bewerking van GILL's waarnemingen van 1891 heb ik de onzekerheid van den afstand der gebruikte standaard-sterren in de waarschijnlijke fout van $\odot$ opgenomen. De w. f. van COOKSON bevatten deze onzekerheid niet. De afstand der door COOKSON gebruikte sterren is minder nauwkeurig bekend dan die der in 1891 gebruikte; ik heb derhalve aan COOKSON's beide bepalingen een kleiner gewicht toegekend dan aan die van GILL. De verschillende bepalingen met hunne w. f. en gewichten zijn vereenigd in Tafel VI.

Het gemiddelde volgens de gewichten is 1047.394 ± .026. Het eenvoudige gemiddelde is 1047.412. De waarde die ik voorstel te adopteeren is

$$\odot = \mathbf{1047.40 \pm 0.03}.$$

De waarschijnlijke fout is afgeleid uit de overeenstemming der verschillende bepalingen onderling. De verdeeling der residus vergeleken met de door de waarnemers opgegeven w. f. is geheel zooals ze volgens de foutenwet behoorde te zijn. De aangenomen w. f. kan

TAFEL VI. RECIPROKE DER MASSA VAN HET SYSTEEM.

Autoriteit	Waargenomen waarden	Gewicht	Residu
KRÜGER, Storingen van Themis	1047·54 ± 0·19	5	+ 0·14
HILL, „ „ Saturnus	·38 ± ·12	7	— ·02
NEWCOMB, „ „ Polyhymnia	·34 ± ·06	20	— ·06
GILL—DE SITTER, Satellieten, 1891	·50 ± ·06	10	+ ·10
COOKSON, „ 1901	·46 ± 09	4	+ ·06
COOKSON, „ 1902	·25 ± ·06	6	— ·15

dus als een betrouwbare maat van de nauwkeurigheid aangezien worden.

Het is mijn overtuiging dat het voorloopig niet mogelijk zal zijn deze waarde wezenlijk te verbeteren. Om uit satellieten-waarnemingen een kleinere w. f. dan ± 0.03, d. i. $^1/_{33000}$, te krijgen, zou de schaalwaarde tot op minder dan $^1/_{100000}$ moeten bekend zijn. Zoolang wij niet over de middelen beschikken om zoowel den onderlingen afstand van twee sterren met deze nauwkeurigheid vast te leggen, als de daaruit afgeleide schaalwaarde zonder gevaar voor systematische fouten op andere (kleinere) afstanden over te brengen, is het derhalve onnut eene nieuwe bepaling uit satellieten-waarnemingen te maken. Onderzoekingen van moderne heliometers schijnen er op te wijzen dat de overbrenging van de schaalwaarde van b.v. een afstand van 7000″ tot een van 700″ nog aan onzekerheden onderhevig is, die kunnen klimmen tot een bedrag ongeveer overeenkomend met een fout van 0″.1 in den grootsten afstand, en dus $^1/_{70000}$ van de schaalwaarde kunnen bedragen. Aan den anderen kant schijnt het voor onze tegenwoordige hulpmiddelen een zeer hooge eisch een afstand van ongeveer 2° tusschen twee sterren te bepalen met een onzekerheid kleiner dan 0″.07 = 0ˢ.005 [1]).

NEWCOMB heeft er reeds op gewezen dat opposities van Polyhymnia, even gunstig als de door hem gebruikte, vóór het einde der twintigste eeuw zich niet weer zullen voordoen, en iets dergelijks geldt voor Themis. HILL heeft er de aandacht op gevestigd [2]) dat Jupiter in de beweging van sommige kleine planeten (die van de Hecuba-groep) storingen van lange periode teweegbrengt, die geocentrisch verscheidene

[1]) De nauwkeurigheid van den afstand der in 1891 gebruikte sterren was ± $^1/_{60000}$. (Zie mijne dissertatie, bladz. 8).

[2]) Collected works I, bladz. 105.

graden bedragen. Zoo ondergaat b.v. Freia een storing, die geocentrisch een amplitude heeft van 12°.7 met eene periode van 121 jaren. De lengte van de periode is oorzaak dat een verbeterde bepaling der massa van Jupiter door deze methode in de naaste toekomst niet te verwachten is.

Afleiding der definitieve massa's.

De tweede leden der conditie-vergelijkingen die gebruikt zijn ter bepaling van correcties tot de massa's (B) zijn boven onder I tot IV afgeleid, en wel uit:

I. de bewegingen der knoopen θ_2 en θ_3 (die van θ_1 en θ_4 laat ik, als te klein gewicht hebbend, buiten beschouwing),

II. de beweging van het perijovium $\tilde{\omega}_4$,

III. de groote ongelijkheden x_1, x_2, x_3,

IV. de periode der libratie.

De vergelijkingen zijn:

I.

$$-.0266\,\delta x' - .0030\,\delta\nu_1 - .0001\,\delta\nu_2 - .0040\,\delta\nu_3 - .0002\,\nu_4 = -.000\,10 \pm .000\,08$$
$$-.0051 \quad -.0003 \quad -.0007 \quad 0 \quad -.0007 \quad = -.000\,41 \pm \quad 15$$

Door vergelijking met bladz. 592 blijkt dat de aangenomen tweede leden binnen de w. f. overeenstemmen met de uit de moderne (extra-eclips) waarnemingen afgeleide. Wenschte men dus deze alléén te gebruiken, dan zou het resultaat slechts binnen de w. f. kunnen veranderen.

II.

$$+.00077\,\delta x' + .00004\,\delta\nu_1 + .00007\,\delta\nu_2 + .0082\,\delta\nu_3 - .00005\,\nu_4 = -.000036 \pm .000020$$

Deze vergelijking berust, evenals de vorige, gedeeltelijk op de bepaling van DELAMBRE. Het is boven reeds opgemerkt (bladz. 597) dat de door COOKSON geheel uit extra-eclips waarnemingen afgeleide waarde practisch hetzelfde resultaat geeft.

III.

				1891	1901	1902	Aangenomen
$-.003\,\delta\nu_1$	$+.403\,\delta\nu_2$	$-.014\,\delta\nu_3$	$=$	$+.080$	$+.051$	$-.058$	$+.020 \pm .040$
$+.195$	$-.008$	$+.816$	$=$	$+.019$	$+.087$	$+.169$	$+.050 \pm 40$
$-.001$	$+.060$	$-.006$	$=$	$-.004$	$-.014$	$-.029$	$-.009 \pm 10$

De w. f. der afzonderlijke bepalingen zijn boven in Tafel III gegeven.

IV.

$$+2.40^s\,\delta\nu_1 + 0.24^s\,\delta\nu_2 + 1.35^s\,\delta\nu_3 = 0.000 \pm 0.18$$

Brengt men nu al deze vergelijkingen op hetzelfde gewicht, en wel zoo dat de w.f. van hun tweede lid $\pm$ 0.10 wordt, dan komt er, als men tevens de teekens van I omkeert:

							Res	Res. Souill.
I.	$+33.3\delta x'$	$+3.8\delta v_1$	$+0.1\delta v_2$	$+5.0\delta v_3$	$+0.2v_4$	$=+0.12^s$	+.02	−.78
	+ 3.4	+0.2	$+0.4^s$	0	+0 5	=+0.27	+.25	+.16
II.	+ 3.8^s	+0.2	$+0.3^s$	+4.1	-0.2^s	=−0.18	−.12	−.82
III.		0	+0.6	0		=+0.05	+.05	$+.05^s$
		+0.5	0	$+2.0^s$		=+0.12	+.16	$+.06^s$
		0	$+0.1^s$	0		=−0.09	−.09	−.09
IV.		+1.4	$+0.1^s$	+0.8		= 0.00	.00	+. 7

De ten slotte aangenomen correcties zijn:

$\delta x' = +0.005 \pm .0075$

$\delta v_1 = +0.010 \pm .030$ $\qquad$ $\delta v_2 = 0 \pm .050$

$\delta v_3 = -0.020 \pm .020$ $\qquad$ $v_4 = 0 \pm 0.25$

De hiermee overeenkomende massa's zijn:

$Jb^2 = 0.0214\,180 \pm .0001543$ $\qquad$ ($b = 1$ voor $d = 39''.0$)

$= 0.0000\,0000\,518169 \pm 3975$ $\qquad$ (astronomische eenheden)

$m_1 = 0.0000\,260 \pm .0000\,012$

$m_2 = 0.0000\,231 \pm 11$

$m_3 = 0.0000\,804 \pm 16$

$m_4 = 0.000\,424\,751 \pm .0000\,106$

} (C)

Deze laten de opgegeven residus over. Substitueert men SOUILLART's massa's dan blijven er de in de laatste kolom gegeven residus over.

De vergelijkingen II en III strijden met elkaar, II eischt eene negatieve, III een positieve waarde van δv_3. Wegens de slechte overeenstemming der verschillende bepalingen van x_3 heb ik aan de vergelijking III een zeer klein gewicht toegekend. Het verdient opmerking, dat de groote negatieve correctie δv_3 gedeeltelijk had kunnen vermeden worden door een groote positieve waarde van v_4 aan te nemen, b. v. $v_4 = \pm 0.5$. Zelfs dan zou echter een goede overeenstemming tusschen II en III niet te verkrijgen zijn geweest zonder de voorstelling van I en IV te bederven.

De opgegeven w.f. der correcties $\delta x'$ en δv_i berusten geheel op schatting. Daarbij is zoo goed mogelijk rekening gehouden met de onvolmaaktheden zoowel van de waarnemingen waaruit de tweede leden der vergelijkingen zijn afgeleid, als van de theorie, waarop de eerste leden berusten. Het is mijne bedoeling geweest de *waarschijnlijke* fouten juist te schatten, met andere woorden; de massa's (*C*) houd ik op het tegenwoordige standpunt van onze kennis van

het Jupiter-systeem voor de waarschijnlijkste, en ik acht het even waarschijnlijk dat de ware waarden meer, als dat ze minder dan de aangegeven w.f. van de waarden (C) afwijken.

Hiermede is alles bereikt, wat uit de moderne extra-eclipswaarnemingen kan worden afgeleid. Behalve voor zoover betreft de hellingen en knoopen en de massa van het systeem (de groepen A en C van bladz. 583), kunnen de gevonden resultaten niet als definitief aangenomen worden, voor ze bevestigd zijn door die afgeleid uit de photometrische eclipswaarnemingen der Harvard-sterrenwacht. Wat betreft de hellingen en knoopen, heb ik er reeds in Cape XII. 3 op gewezen (bladz. 121) dat eene nieuwe bepaling omstreeks 1920 wenschelijk is. Ter bepaling van m_4 zal het noodig zijn h_3 en k_3 omstreeks 1780 te bepalen uit eene nieuwe bewerking van eclipswaarnemingen. Deze zijn in zeer voldoend aantal aanwezig. Tusschen 1772 en 1799 heb ik in de litteratuur 63 eclipsen gevonden, waarvan zoowel ingang als uitgang door den zelfden waarnemer zijn waargenomen, terwijl ongeveer een derde deel hiervan door meer dan een waarnemer is waargenomen.

Om geheel bevredigende resultaten te verkrijgen zal ook SOUILLART's theorie moeten worden herzien. Ik heb hierop reeds in Gron. Publ. 17, bladz. 118, gewezen.

Hoewel de hier gevondene massa's en elementen niet als definitief kunnen beschouwd worden, zijn ze toch ongetwijfeld zeer veel nader bij de waarheid dan de aan SOUILLART's theorie ten grondslag liggende. Ik heb het daarom wenschelijk geoordeeld ze in te voeren in de uitdrukkingen voor de breedtes, lengtes en voerstralen, zooals die door die theorie worden gegeven. Om met de onzekerheid der massa's rekening te houden zal ik de coëfficienten uitdrukken in functie der kleine grootheden ϱ en λ_i, gedefiniëerd door

$$Jb^2 = (Jb^2)_0 (1 + \varrho)$$
$$m_i = (m_i)_0 (1 + \lambda_i),$$

waar $(Jb^2)_0$ en $(m_i)_0$ de waarden (C) zijn. De quadraten en producten van ϱ, λ_1, λ_2 en λ_3 zullen verwaarloosd worden. Deze ontwikkelingen berusten geheel op die in Gron. Publ. 17, art. 17, en het daar gezegde (bladz. 83) omtrent hunne betrouwbaarheid geldt dus ook hier. De halve groote assen overeenkomend met de aangenomen middelbare bewegingen en de aangenomen massa van het systeem zijn berekend volgens de formule [1]:

[1]) Ik adopteer dus hier LAPLACE's definitie der halve groote assen. Alle andere constante termen van de voerstralen worden bij $\rho_i = r_i/a_i$ ingelijfd(zie onmczijde). Deze verhoudingen ρ_i moeten niet verward worden met de kleine grootheid ρ, die eene mogelijke correctie tot Jb^2 voorstelt.

$$n_i^2 a_i^3 = f \frac{1 + m_i}{\mathcal{M}(1 + \Sigma m_i)} \left(1 + \frac{Jb^2}{a_i^2}\right).$$

Hunne logarithmen zijn

$$\log a_1 = 7.450\,1443 + 0.000\,101\,\varrho$$
$$\log a_2 = 7.651\,8277 + .000\,040\,\varrho$$
$$\log a_3 = 7.854\,6197 + .000\,016\,\varrho$$
$$\log a_4 = 8.099\,8338 + .000\,005\,\varrho$$

De waarden der coëfficienten τ_{ij}, die in de middelpuntsvergelijkingen optreden zijn:

$\tau_{21} = +0.0280 - 031\,\varrho + .027\,\lambda_1 - .002\,\lambda_2 + .055\,\lambda_3$
$\tau_{41} = -0.0053 - .003\,\varrho - .005\,\lambda_1 - .004\,\lambda_2 - .001\,\lambda_3$
$\tau_{41} = 0.0000$

$\tau_{12} = -0.0320 + .058\,\varrho + .027\,\lambda_1 - .011\,\lambda_2 - .061\,\lambda_3$
$\tau_{32} = -0.0447 + .022\,\varrho + .003\,\lambda_1 - .042\,\lambda_2 + .006\,\lambda_3$
$\tau_{42} = 0.0000$

$\tau_{13} = +0.0171 - .013\,\varrho + .002\,\lambda_1 + .014\,\lambda_2 + .015\,\lambda_3$
$\tau_{23} = +0.1619 - .098\,\varrho - .005\,\lambda_1 + .019\,\lambda_2 + .116\,\lambda_3 + .0019\,\lambda_4$
$\tau_{43} = -0.1173 + .112\,\varrho + .006\,\lambda_1 + .024\,\lambda_2 - .142\,\lambda_3 + .0163\,\lambda_4$
$\tau_{14} = +0.0016 - .002\,\varrho + .001\,\lambda_2 + .001\,\lambda_3 + .0014\,\lambda_4$
$\tau_{24} = +0.0139 - .018\,\varrho - .001\,\lambda_1 - .001\,\lambda_2 + .010\,\lambda_3 + .0112\,\lambda_4$
$\tau_{34} = +0.0828 - .072\,\varrho - .001\,\lambda_1 - .017\,\lambda_2 + .009\,\lambda_3 + .0726\,\lambda_4$

De dagelijksche bewegingen der eigen perijovia (gerekend van af het punt Aries) zijn:

$(\tilde{\omega}_1)$	$+0^\circ.14703$	$+^\circ.1295\,\varrho$	$+^\circ.0070\,\lambda_1$	$+^\circ.0166\,\lambda_2$	$+^\circ.0007\,\lambda_3$	$+^\circ.0001\,\lambda_4$
$(\tilde{\omega}_2)$	+0.038955	+.02590	− 00371	+.00406	+.01974	+.00019
$(\tilde{\omega}_3)$	+0.007032	+.00530	+.00024	+.00100		+.00066
$(\tilde{\omega}_4)$	+0.001896	+.00075	+.00003	+.00007	+.00082	−.00005

De groote ongelijkheden zijn:

$$x_1 = 0^\circ.4303 - .0024\,\lambda_1 + 4228\,\lambda_2 - .0145\,\lambda_3$$
$$x_2 = 0.9875 + .1273 - .0090 + .8188$$
$$x_3 = 0.0636 - .0010 + .0629 - .0063$$

De coëfficienten der ongelijkheden van groep II zijn:

$x_{11} = \{-2.49 - .04\,\varrho + .04\,\lambda_1 - 2.46\,\lambda_2 + .17\,\lambda_3\}\,e_1$
$x_{12} = \{+0.98 - .19\,\varrho - .13\,\lambda_1 + .97\,\lambda_2 - .10\,\lambda_3\}\,e_2$
$x_{13} = \{+0.083 - .03\,\varrho - 02\,\lambda_1 + .02\,\lambda_3\}\,e_3$
$x_{14} = \{+0.0062 - .003\,\varrho - .002\,\lambda_4\lambda_2 - .005\,\lambda_3 + .002\,\lambda_4\}\,e_4$
$x_{21} = \{+2.26 - .05\,\varrho + 2.20\lambda_1 - .03\lambda_2 + .03\lambda_3\}\,e_1$
$x_{22} = \{+2.19 + .16\,\varrho - .74\lambda_1 + .08\lambda_2 + 2.93\lambda_3\}\,e_2$
$x_{23} = \{-0.535 - .27\,\varrho - .03\lambda_1 + .15\lambda_2 - .02\lambda_3\}\,e_3$
$x_{24} = \{-0.0368 + .005\varrho - (.002 - .017\lambda_4)\lambda_1 + .022\lambda_2 + .045\lambda_4\lambda_3 - .046\lambda_4\}e_4$

$$x_{21} = \{-0.01 - .01\lambda_1\} e_1$$
$$x_{22} = \{-0.67 - .65\lambda_2\} e_2$$
$$x_{23} = \{+0.109 + .07\varrho - 01\lambda_1 + .07\lambda_2\} e_3$$
$$x_{24} = \{+0.0078 + (.002 + .009\lambda_4)\lambda_2 + .011\lambda_4\} e_4$$

De grootheden, die de libratie bepalen zijn:

$$Q_1 = + \{.003440 - 00022\lambda_1 - .00050\lambda_2 - 00142\lambda_3\}(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)$$
$$Q_2 = - \{.005161 - .00021\lambda_1 - .00015\lambda_2 - .00135\lambda_3\}(1+\lambda_1)(1+\lambda_3)$$
$$Q_3 = + \{.000452 - 00002\lambda_3\}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)$$
$$\beta^2 = Q_1 - 3Q_2 + 2Q_3 \qquad \psi = \beta(t - t_0)$$
$$\vartheta = 0°.158 \sin\psi$$
$$\vartheta_1 = + 0.1735\,\vartheta \quad \vartheta_2 = - 0.2603\,\vartheta \quad \vartheta_3 = + 0\,0228\,\vartheta$$

De ligging van de baanvlakken der satellieten wordt in SOUILLART's theorie gegeven ten opzichte van het baanvlak van Jupiter, waarvan de helling en de knoop [1]) ten opzichte der ecliptica en middelbare equinox zijn (volgens LEVERRIER, maar met NEWCOMB's precessie):

$$\varphi = 1°\,18'\,31''.1 - 0''.2051\,T$$
$$\vartheta = 99\;\;26\;\;36 \quad + 36.396\,T$$

Hierin is T de tijd in tropische jaren, geteld van 1900 Jan. 0.0 M. T. Greenwich.

Het is echter verkieselijk de breedtes der satellieten te betrekken op den middelbaren equator van de planeet. De helling en knoop van dezen ten opzichte van het baanvlak zijn:

$$\omega = 3°\;\;6'\,55''.1 + 0''.0243\,T$$
$$\theta = 315\;\;48\;\;0 \quad + 50\,.158\;\;T$$

De helling en knoop van den middelbaren equator ten opzichte van de ecliptia zijn derhalve:

$$\mathcal{I} = 2°\,12'\;\;8''.7 + 0''.4231\,T$$
$$\mathcal{N} = 336\;\;24\;\;24 \quad + 48\,.916\;\;T$$

De helling en knoop van het baanvlak ten opzichte van den middelbaren equator worden dan [2]):

---

[1]) Onder knoop versta ik altijd klimmende knoop.

[2]) De knoop θ is natuurlijk geteld „in het baanvlak", de knoop θ' „in den equator". Bij de berekening der tabulaire plaatsen werd, volgens MARTH aangenomen (voor 1900.0

$$\omega = 3°\;\;4'\;\;4''.75$$
$$\mathcal{I} = 2\;\;9\;\;3\,.94$$
$$\mathcal{N} = 336\;\;21\;\;28\,.4$$
$$\theta = 315\;\;25\;\;48\,.4$$

Hieruit volgt $\theta' = 135\;\;24\;\;34\,.3$

MARTH telt zijne lengtes van af het punt O, waarvan de lengte is

$$O = 135\;\;27\;\;2.5$$

MARTH heeft bedoeld de lengtes te tellen van af den knoop θ', maar heeft waarschijnlijk de correctie, noodig om θ' uit $\theta + 180°$ af te leiden, met het verkeerde teeken aangebracht.

$$\omega = \quad 3^\circ \; 6' \; 55''.1 + \quad 0''.0243 \; T$$
$$\theta' = 135 \quad 46 \quad 44 \quad + 50 \; .155 \; T$$

De ligging der baanvlakken der satellieten — zonder periodieke, maar met seculaire storingen — ten opzichte van den middelbaren equator worden bepaald door de formules:

$$i_i \sin (\theta' - \Omega_i) = p_i = \Sigma_j \sigma_{ij} \gamma_j \sin \Gamma_j$$
$$i_i \cos (\theta' - \Omega_i) = q_i = \Sigma_j \sigma_{ij} \gamma_j \cos \Gamma_j + (1 - \mu_i) \omega$$

Ten opzichte van het baanvlak van Jupiter hebben wij [1])

$$I_i \sin N_i = \Sigma_j \sigma_{ij} \gamma_j \sin \theta_j + \mu_i \omega \sin \theta$$
$$I_i \cos N_i = \Sigma_j \sigma_{ij} \gamma_j \cos \theta_j + \mu_i \omega \cos \theta$$

en men heeft [2])

$$\Gamma_i = 180^\circ + \theta - \theta_i$$

Stelt men de periodieke storingen voor door δp_i, δq_i, δs_i, dan is de breedte van den satelliet boven den middelbaren equator

$$\beta_i = (q_i + \delta q_i) \sin (v_i - \theta') + (p_i + \delta p_i) \cos (v_i - \theta')$$

en de breedte boven het baanvlak

$$s_i = I_i \sin (v_i - N_i) + \delta s_i .$$

Onder v_i moet verstaan worden de ware lengte in de baan van den satelliet. In beide formules zijn grootheden van de derde orde in de hellingen verwaarloosd. De verwaarloosde termen zijn dus in β_i van de orde van 0°.00003, in s_i van de orde van 0°.01.

De waarden der coëfficienten σ_{ij} en μ_i zijn:

$$\sigma_{21} = - 0.019 + .012 \, \varrho - .019 \, \lambda_1$$
$$\sigma_{31} = - 0.001 + .001 \, \varrho - .001 \, \lambda_1$$
$$\sigma_{41} = \quad 0.000$$
$$\sigma_{12} = + 0.0203 - .020 \, \varrho + .020 \, \lambda_2$$
$$\sigma_{22} = - 0.0347 + .028 \, \varrho + .002 \, \lambda_1 - .035 \, \lambda_2 + .005 \, \lambda_3 - .0005 \, \lambda_4$$
$$\sigma_{42} = - 0.0010 - .001 \, \varrho - .001 \, \lambda_2 + .001 \, \lambda_3$$

---

[1]) Streng genomen gelden deze formules ten opzichte van het *vaste* baanvlak, en behoeven dan eene correctie om de breedte boven het bewegelijke baanvlak te krijgen. Het is evenwel voldoende nauwkeurig de zelfde formules te gebruiken voor de breedte boven het bewegelijke baanvlak, als dan maar, zooals hier gedaan is, voor ω en δ de helling en knoop worden genomen van den middelbaren equator ten opzichte van dat zelfde bewegelijke baanvlak. Voor de beweging van den knoop δ ten opzichte van het bewegelijke baanvlak is aangenomen — 0''.0979 in plaats van — 0''.0710 (Souillart II blz. 166). Dit is de waarde die men vindt als Souillart's definitieve b_4 wordt gebruikt, inplaats van de benaderde waarde die Souillart zelf gebruikt.

[2]) De beteekenis van Γ_i; is dus hier eenigszins anders dan bij het onderprobleem 1 (eerste mededeeling).

$$\sigma_{13} = +\,0.0056 - .013\,\rho + .003\,\lambda_2 + .010\,\lambda_3 - .0001\,\lambda_4$$
$$\sigma_{23} = +\,0.1488 + .132\,\rho - .011\,\lambda_1 + .005\,\lambda_2 + .125\,\lambda_3 + .0026\,\lambda_4$$
$$\sigma_{43} = -\,0.1772 + .176\,\rho + .008\,\lambda_1 + .028\,\lambda_2 - .211\,\lambda_3 + .0282\,\lambda_4$$

$$\sigma_{14} = -\,0.0018 - .003\,\rho + .001\,\lambda_2 + .0018\,\lambda_4$$
$$\sigma_{24} = +\,0.0183 - .034\,\rho - .002\,\lambda_1 - .002\,\lambda_2 + .017\,\lambda_3 + .0207\,\lambda_4$$
$$\sigma_{34} = +\,0.1203 - .110\,\rho - .005\,\lambda_1 - .016\,\lambda_2 + .021\,\lambda_3 + .1064\,\lambda_4$$

$$\mu_1 = 0.99944 + .0009\,\rho - .0002\,\lambda_2 - .0002\,\lambda_4$$
$$\mu_2 = 0.99428 + .0095\,\rho + .0002\,\lambda_1 + .0001\,\lambda_2 - .0022\,\lambda_3 - .0023\,\lambda_4$$
$$\mu_3 = 0.97271 + .0294\,\rho + .0012\,\lambda_1 + .0040\,\lambda_2 - .0010\,\lambda_3 - .0088\,\lambda_4$$
$$\mu_4 = 0.86245 + .0555\,\rho + .0018\,\lambda_1 + .0045\,\lambda_2 + .0503\,\lambda_3 - .0056\,\lambda_4$$

De dagelijksche bewegingen der knoopen θ_i zijn:

$$(\theta_1)\ -0^\circ.13614 - .1327\,\rho - .0023\,\lambda_2 - .0010\,\lambda_3 - .00008\,\lambda_4$$
$$(\theta_2)\ -0.032335 - .02602\,\rho - .00198\,\lambda_1 - .00013\,\lambda_2 - .00399\,\lambda_3 - .000191\,\lambda_4$$
$$(\theta_3)\ -0.006854 - .00493\,\rho - .00021\,\lambda_1 - .00071\,\lambda_2 - .00004\,\lambda_3 - .000695\,\lambda_4$$
$$(\theta_4)\ -0.01772 - .00077\,\rho - .00003\,\lambda_1 - .00007\,\lambda_2 - .00075\,\lambda_3 + .000098\,\lambda_4$$

en we hebben:

$$\frac{d\Gamma_i}{dt} = 0^\circ.000038 - \frac{d\theta_i}{dt}$$

Wij hebben dus:

$$p_1 = +0.02720\,\sin\Gamma_1 + 0.00951\,\sin\Gamma_2 + 0.00103\,\sin\Gamma_3 - 0.00046\,\sin\Gamma_4$$
$$p_2 = -\ .00052 + .46830 + .02734 + .00464$$
$$p_3 = -\ .00003 - .01625 + .18390 + .03051$$
$$p_4 = \ .00000 - .00047 - .03259 + .25360$$

Dezelfde coëfficienten treden op in q_i. De constante termen $(1-\mu_i)\omega$ van q_i en de coëfficienten van $\sin\theta$ en $\cos\theta$ in $I_i \sin N_i$ en $I_i \cos N_i$ zijn:

$$(1-\mu_1)\,\omega = 0^\circ.00174 \qquad \mu_1\,\omega = 3^\circ.1136$$
$$(1-\mu_2)\,\omega = 0.01792 \qquad \mu_2\,\omega = 3.0974$$
$$(1-\mu_3)\,\omega = 0.08502 \qquad \mu_3\,\omega = 3.0303$$
$$(1-\mu_4)\,\omega = 0.42851 \qquad \mu_4\,\omega = 2\ 6868$$

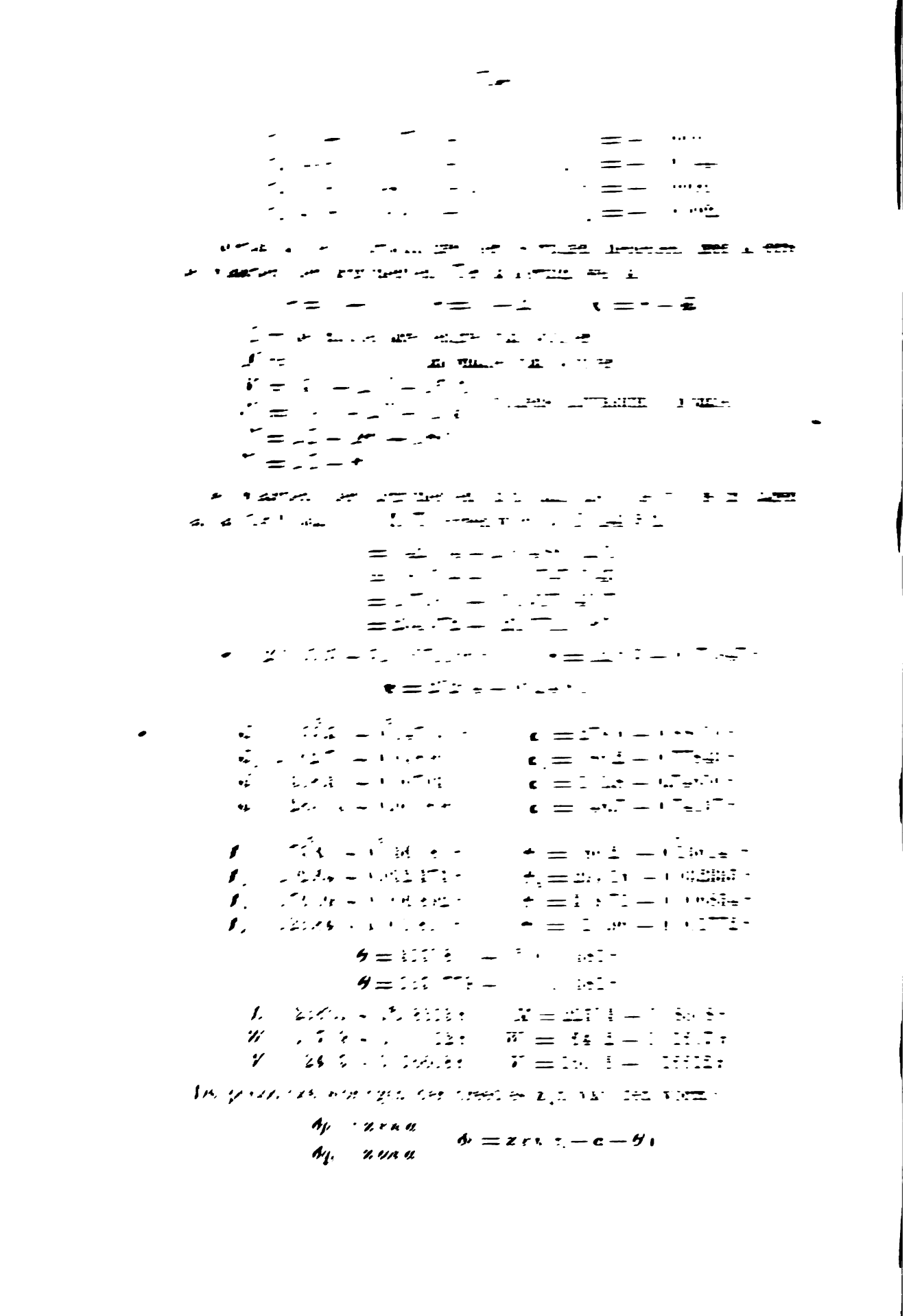
De ligging van den waren equator ten opzichte van den middelbaren wordt bepaald door zijne helling ω_1 en knoop ψ_1, die gegeven zijn door de formules

$$\omega_1 \sin(\theta' - \psi_1) = \Sigma_j\, \sigma_{oj}\, \gamma_j \sin \Gamma_j$$
$$\omega_1 \cos(\theta' - \psi_1) = \Sigma_j\, \sigma_{oj}\, \gamma_j \cos \Gamma_j.$$

De helling Ω en knoop Ψ van den waren equator op het baanvlak zijn dan

$$\Omega \sin \Psi = \Sigma_j\, \sigma_{oj}\, \gamma_j \sin \theta_j + \omega \sin \theta$$
$$\Omega \cos \Psi = \Sigma_j\, \sigma_{oj}\, \gamma_j \cos \theta_j + \omega \cos \theta.$$

Men heeft:



Daar alle storingen zeer klein zijn kan in het argument v_i door l_i vervangen worden en het verschil tusschen θ' en $180° + \theta$ verwaarloosd worden. De coëfficienten en argumenten zijn:

	coëfficient	*argument* δp_i, δq_i	*argument* δs_i
Sat. I	+ 0.00042	$\Gamma_1 - 2v - 2\theta'$	$l_1 + 2v + \theta_1$
	+ 0.00025	V	$l_1 - V'$
Sat. II	— 0.00099	$\Gamma_2 - 2v - 2\theta'$	$l_2 + 2v + \theta_2$
	+ 0.00010	$V + \Gamma_2$	$l_2 + \theta_2 - 2L$
	+ 0.00078	V	$l_2 - V'$
Sat. III	+ 0.00010	$V + \Gamma_3$	$l_3 + \theta_3 - 2L$
	+ 0.00177	V	$l_3 - V'$
Sat. IV	+ 0.00032	$V + \Gamma_4$	$l_4 + \theta_4 - 2L$
	+ 0 00380	V	$l_4 - V'$

De uitdrukkingen voor de lengtes en voerstralen volgen hieronder. De ongelijkheden zijn gerangschikt in groepen, als aangegeven op bladz. 581—582. Ongelijkheden, die kleiner zijn dan 1″ in lengte en 0.000005 in voerstraal zijn verwaarloosd. Van de middelpuntsvergelijkingen, de groote ongelijkheden (argumenten 4τ, 2τ en τ voor de satellieten I, II, III respectievelijk), de ongelijkheden van groep II en de libratie (argument ψ) zijn de theoretische uitdrukkingen boven reeds gegeven. De meer belangrijke der kleinere ongelijkheden worden beneden eveneens in functie van ϱ en λ_i gegeven. Waar dit niet het geval is zijn de coëfficienten uit SOUILLART's theorie overgenomen, in overeenstemming gebracht met de verbeterde excentriciteiten (en hellingen), doch zonder invoering der nieuwe massa's. De factoren van ϱ en λ_i zijn aangegeven in eenheden van de laatste decimaal van den coëfficient waar ze bij behooren.

De ware lengtes zijn:

$$v_1 = l_1 + 0.0276 \sin\psi + \delta v_1$$
$$v_2 = l_2 - 0\ 0411 \sin\psi + \delta v_2$$
$$v_3 = l_3 + 0.0036 \sin\psi + \delta v_3$$
$$v_4 = l_4 + \delta v_4$$

De voerstralen zijn:

$$r_i = a_i (1 + \varrho_i)$$

$$\varrho_1 = 1.000\ 0066 + \delta\varrho_1$$
$$\varrho_2 = 1.000\ 0549 + .000\ 014\ \lambda_1 + .000\ 084\ \lambda_3 + \delta\varrho_2$$
$$\varrho_3 = 1.000\ 0155 + 000\ 009\ \lambda_1 + .000\ 011\ \lambda_2 - 000\ 002\ \lambda_4 + \delta\varrho_3$$
$$\varrho_4 = 1\ 000\ 0755 + .000\ 008\ \lambda_1 + 000\ 008\ \lambda_2 + .000\ 034\ \lambda_3 + \delta\varrho_4$$

Ia. Middelpuntsvergelijkingen.

$$\delta v_i = a_{i1} \sin(l_i - \tilde{\omega}_1) + a_{i2} \sin(l_i - \tilde{\omega}_2) + a_{i3} \sin(l_i - \tilde{\omega}_3) + a_{i4} \sin(l_i - \tilde{\omega}_4)$$

$a_{11} = +\,0\overset{\circ}{.}0062$	$a_{12} = -\,0\overset{\circ}{.}0011$	$a_{13} = +\,0\overset{\circ}{.}0030$	$a_{14} = +\,0\overset{\circ}{.}0014$
$a_{21} = -\,0.0002$	$a_{22} = +\,0.0344$	$a_{23} = +\,0\ 0281$	$a_{24} = +\,0.0118$
$a_{31} = \ \ 0\ 0000$	$a_{32} = -\,0.0015$	$a_{33} = +\,0\ 1736$	$a_{34} = +\,0.0706$
$a_{41} = \ \ 0.0000$	$a_{42} = \ \ 0.0000$	$a_{43} = -\,0.0204$	$a_{44} = +\,0.8528$

$$\delta\varrho_i = a'_{i1} \cos(l_i - \tilde{\omega}_1) + a'_{i2} \cos(l_i - \tilde{\omega}_2) + a'_{i3} \cos(l_i - \tilde{\omega}_3) + a'_{i4} \cos(l_i - \tilde{\omega}_4)$$

$a'_{11} = -.000054$	$a'_{12} = +.000010$	$a'_{13} = -\ 000026$	$a'_{14} = -.000012$
$a'_{21} = +.0000\ 2$	$a'_{22} = -.000300$	$a'_{23} = -.000245$	$a'_{24} = -.000103$
$a'_{31} = \ \ .000000$	$a'_{32} = +.000013$	$a'_{33} = -.001516$	$a'_{34} = -.000616$
$a'_{41} = \ \ .000000$	$a'_{42} = \ \ .000000$	$a'_{43} = +.000178$	$a'_{44} = -.007445$

De ongelijkheden der groepen I*b* en I*c* zijn van den vorm

$$\delta v_i = \varkappa \sin \alpha \qquad \delta\varrho_i = \varkappa' \cos \alpha.$$

Zij zijn :

Argument	*coëfficient in* δv_i	*coëfficient in* $\delta\varrho_i$
Satelliet I.		
2τ	$+0\overset{\circ}{.}0034\,(1+\lambda_3)$	$-.000\ 017\,(1+\lambda_3)$
3τ	$+0.0016\,(1+\lambda_3)$	$-.000\ 011\,(1+\lambda_3)$
4τ	$+0.4303$	$-.003\ 755$ (x_1, *zie boven*)
8τ	$+0.0014+23\lambda_3$	$-.000\ 012-20\lambda_3$
Satelliet II.		
τ	$-0\overset{\circ}{.}0123\,(1+\lambda_3)$	$+.000\ 061\,(1+\lambda_3)$
2τ	$+0.9875$	$-.008\ 617$ (x_2, *zie boven*)
3τ	$+0.0052\,(1+\lambda_3)$	$-.000\ 058\,(1+\lambda_3)$
4τ	$+0.0051+1\lambda_1-1\lambda_2+109\lambda_3$	$-.000\ 034+8\lambda_1+1\lambda_2-83\lambda_3$
5τ	$+0\ 0004\,(1+\lambda_3)$	$-.000\ 006\,(1+\lambda_3)$
6τ	$+0.0005+3\lambda_1+2\lambda_3$	$-.000\ 008-5\lambda_1-2\lambda_3$
l_3-l_4	$-0.0006\,(1+\lambda_4)$	$+.000\ 004\,(1+\lambda_4)$
$2(l_3-l_4)$	$+0.0005\,(1+\lambda_4)$	$-.000\ 006\,(1+\lambda_4)$
$\tau+\varphi_3$	-0.0005	$+.000\ 002$
$2\tau+\varphi_3$	-0.0003	$+.000\ 006$
$2\tau+\varphi_3$	$+0.0026$	$-.000\ 021$
$2\tau+\varphi_4$	$+0.0010$	$-.000\ 008$
$l_1-\tilde{\omega}_2$	-0.0004	$+.000\ 003$
$l_1-\tilde{\omega}_3$	$-0.\ \ 4$	$+.000\ 002$

Argument	*coefficient in* δv_i	*coefficient in* $\delta\varrho_i$
Satelliet III.		
τ	$-0.^{\circ}0636$	$+.000\,555$ (x_3, *zie boven*)
2τ	$-0.0011\,(1+\lambda_3)$	$+.000\,015\,(1+\lambda_3)$
3τ	$-0.0008-6\lambda_1-2\lambda_3$	$-.000\,006-11\lambda_1+4\lambda_3$
l_3-l_4	$-0.0041\,(1+\lambda_4)$	$+.000\,022\,(1+\lambda_4)$
$2(l_3-l_4)$	$+0.0138\,(1+\lambda_4)$	$-.000\,132\,(1+\lambda_4)$
$3(l_3-l_4)$	$+0.0010\,(1+\lambda_4)$	$-.000\,012\,(1+\lambda_4)$
$\tau+\varphi_3$	-0.0008	$+.000\,007$
$\tau+\varphi_4$	-0.0003	$+.000\,003$
$l_3-2l_4+\tilde{\omega}_3$	$+0.0004$	$-.000\,000$
$l_3-2l_4+\tilde{\omega}_4$	-0.0004	$+.000\,001$
$2l_3-3l_4+\tilde{\omega}_4$	-0.0004	$+.000\,003$
$l_3-2L+\tilde{\omega}_3$	$+0.0006$	$-.000\,005$
Satelliet IV.		
l_4-l_1	$-0.^{\circ}0003\,(1+\lambda_1)$	$+.000\,005\,(1+\lambda_1)$
l_4-l_2	$-0.0005\,(1+\lambda_2)$	$+.000\,008\,(1+\lambda_2)$
l_3-l_4	$-0.0023\,(1+\lambda_3)$	$+.000\,101\,(1+\lambda_3)$
$2(l_3-l_4)$	$-0.0012\,(1+\lambda_3)$	$+.000\,018\,(1+\lambda_3)$
$2l_4-2L$	$+0.0012$	$-.000\,015$
$l_3-2l_4+\tilde{\omega}_3$	-0.0006	$+.000\,002$
$l_3-2l_4+\tilde{\omega}_4$	$+0.0007$	$-.000\,006$
$l_4-2L+\tilde{\omega}_4$	$+0.0064$	$-.000\,056$
$2l_4-2\tilde{\omega}_4$	$+0.0040$	$-.000\,028$

Ongelijkheden van groep II. (De uitdrukkingen der coëfficienten in functie van ϱ en λ_i zijn boven reeds gegeven).

Argument	*Coëfficienten in* δv_i		
	Sat. I	*Sat. II*	*Sat. III*
φ_1	$-0.^{\circ}0077$	$+0.^{\circ}0070$	$-0.^{\circ}0000$
φ_2	$+0.0169$	$+0.0377$	-0.0115
φ_3	$+0.0072$	-0.0464	$+0.0095$
φ_4	$+0.0026$	-0.0157	$+0.0033$

In de voerstralen zijn deze ongelijkheden te verwaarloozen, behalve in Satelliet II de term :

$$\delta\varrho_2 = +\,.000\,006\,\cos\varphi_2.$$

Ongelijkheden van groep III. Ook deze zijn in de voerstralen te verwaarloozen. De grootste is

$$\delta\varrho_3 = +\,.000\,001\,\cos(\tilde{\omega}_3-\tilde{\omega}_4).$$

In de lengtes hebben wij :

Argument	*Coëfficienten in δv_i*			
	Sat I	*Sat II*	*Sat. III*	*Sat IV*
M	+ 0°.0006	— 0°.0102	— 0°.0135	— 0°.0320
W		— 0.0008	— 0.0012	— 0.0029
W_1		— 0.0001	— 0.0001	— 0.0003
Γ_2	+ 0.0099	+ 0.0028	+ 0.0001	
Γ_3		+ 0.0016	+ 0.0024	— 0.0018
Γ_4	— 0.0001	+ 0.0019	+ 0.0029	+ 0.0010
$\Gamma_2 - \Gamma_3$	— 0.0027	— 0.0011	— 0.0005	
$\Gamma_2 - \Gamma_4$	— 0.0005	— 0.0002	— 0.0001	
$\Gamma_3 - \Gamma_4$	+ 0.0011	— 0.0005	— 0.0013	— 0.0010
$\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_4$	— 0.0005	+ 0.0002	+ 0.0009	— 0.0011

Het is misschien niet overbodig er nogmaals uitdrukkelijk op te wijzen dat al het bovenstaande berust op SOUILLART's theorie. In zijne formules zijn andere getallen-waarden voor de massa's en elementen ingevoerd, maar aan de formules zelve is niets veranderd. De eenige uitzondering is de periode der libratie, die tot en met derde ordes werd berekend, terwijl SOUILLART zich met tweede ordes tevreden stelt (Zie Gron. Publ. 17, art. 18).

Geophysica. — De Heer VAN DER STOK biedt een mededeeling aan van den Heer W. VAN BEMMELEN: *„De Beginstoot van Magnetische Storingen"*.

Verleden jaar berichtte ik [1]) over het opmaken van een statistische lijst der magnetische storingen, welke door den magnetograaf te Batavia gedurende het tijdperk 1880—1899 opgeteekend zijn geworden. Hierbij vestigde ik de aandacht op het verschijnsel van den beginstoot, d. w. z. de plotseling intredende verandering der magnetische elementen, waarmede zeer vaak de magnetische stormen een aanvang nemen.

Naar aanleiding van de gelijkvormigheid, waarmee dit verschijnsel te Batavia en elders zich voordoet, uitte ik eene onderstelling over de wijze, waarop men zich misschien het optreden van magnetische storingen zou kunnen voorstellen. Om nadere kennis over dit, naar mijne meening leerrijk verschijnsel te bekomen, richtte ik in het einde van 1906 aan alle Magnetische Observatoria een verzoek om gegevens voor een aantal door mij uitgekozen gevallen.

[1]) Zittingsverslag van 29 September 1906,

Ook: Observations made at the R. Magn. and Met. Observatory ot Batavia, Vol. XXVIII App. III.

Met groote hulpvaardigheid werden mij van verscheidene observatoria die gegevens verstrekt, en het is mij een aangename plicht, daarvoor mijn dank hier uit te spreken.

Behalve dit van vele kanten ontvangen materiaal heb ik alle te Batavia en te Buitenzorg geregistreerde gevallen bewerkt en ook het gedrag van den elektrischen aardstroom bij het optreden van het verschijnsel kunnen nagaan. Van de uitkomsten over dit materiaal wil ik hier het meest belangrijke mededeelen, daarbij met dat voor Batavia aanvangende.

BATAVIA.

Uit de in het tijdperk 1882—1899 verkregen diagrammen, mat ik voor 131 gevallen de grootte en den duur van de aanvangsbewegingen der drie componenten (Horizontale Intensiteit = H, Declinatie = D, Verticale Intensiteit = Z.

Zin der aanvangsbeweging.

Δ H. was zonder uitzondering positief.

Δ D. op enkele uitzonderingen na Westelijk; maar 12% van het aantal gevallen werd ingeleid door eene kleine Oostelijke beweging.

Δ Z. was negatief; maar in 6% van het aantal werd de beweging door eene kleine positieve beweging ingeleid.

Duur.

Hierbij heb ik den duur der kleine inleidende beweging *niet* medegerekend.

124 gevallen gaven:

$\Delta H = 4.5$ min. $\Delta D = 3.2$ min. $\Delta Z = 12.0$ min.

De duur van de Z-beweging is over 't algemeen moeilijk te bepalen, daar de afneming der verticale kracht meestal veel langer blijft aanhouden.

Het is van gewicht op te merken, dat de aanvangsbeweging van de D ophoudt of omkeert terwijl van H de aangroeiende beweging nog aanhoudt.

Grootte.

De gemiddelde uitslag der beweging, gerangschikt volgens de verschillende deelen van den dag waarin zij plaats greep was, uitgedrukt in 0.00001 C. G. S. ($= \gamma$).

h	ΔH	ΔD	ΔZ
0—6 a.m.	+ 45	7 W	— 11
6—12 „	+ 41	10 „	— 16
0—6 p.m.	+ 52	7 „	— 16
6—12 „	+ 40	8 „	— 11

Van een karakteristieke ongelijkheid van den vector gedurende

den dag is weinig te bespeuren. De grootte van ΔH gerangschikt volgens den duur der beweging is:

Duur	ΔH	Aantal gevallen.
0— 2 min.	53 γ	15
2— 4 „	43	45
4— 6 „	42	35
6— 8 „	33	20
8—15 „	46	6

Dus de grootte van de beweging is vrij wel onafhankelijk van den duur, waaruit omgekeerd volgt, dat *hoe korter de aangroeiing van H duurt, des te sneller zij is.*

Ten slotte zij nog vermeld, dat het voorkomen van de kleine oostelijke vóórbeweging geen voorkeur tot zekere tijden van dag noch jaar vertoonde.

BUITENZORG.

Sedert Mei 1906 registreert te Buitenzorg een TÖPFER-SCHULZE magnetograaf, waarbij de kromme lijnen der drie elementen op dezelfde registreerstrook worden opgeteekend en die door deze omstandigheid, nevens die van het geven van fijnere lijnen, grootere gevoeligheid en ruimeren tijdmaat, zeer geschikt voor de studie der beginbeweging is.

Voor het tijdvak Mei 1906 — Nov. 1907 mat ik 29 gevallen, en uit dat materiaal bleek ten duidelijkste, dat in de meeste gevallen de bewegingen der elementen een zekere onafhankelijkheid van elkaar vertoonen en *niet altijd op hetzelfde oogenblik aanvangen.*

Ik berekende het azimuth van de horizontale component van den vector voor het eerste gedeelte der beweging, dus vóór dat de beweging van D een omkeerpunt vertoont, en vond in 20 gevallen richtingen tusschen de uitersten N en $N\ 58°\ W$, gemiddeld:

$$N\ 21°\ W.$$

Verticale Intensiteit.

De uitkomsten voor ΔZ waren verrassend; de verticale component toch vertoonde, afwijkend van Batavia, een inleidende positieve beweging gevolgd door de van Batavia bekende langzame negatieve beweging.

Hier was geen instrumenteele oorzaak in het spel; beide magnetische balansen (van ADIE en SCHULZE) registreerden deze vóórbeweging indertijd te Batavia uiterst zelden, maar te Buitenzorg geregeld. Gelukkig is er voor langer dan een jaar tegelijkertijd te Batavia en te Buitenzorg geregistreerd en uit die registraties bleek, dat de inleidende beweging te Buitenzorg aan die te Batavia voorafgaat. De

inleidende beweging te Buitenzorg vangt (volgens het gemiddelde van 29 gevallen) 0.3 minuut ná het ontstaan der H-beweging aan en duurt 1 à 3 minuten. Daarna vertoonen de Z-lijnen van beide plaatsen gelijktijdig een afneming.

ANTWOORDEN OP DE RONDVRAAG.

De opgaven over de beginbeweging zijn in mijn rondschrijven gevraagd voor een aantal gevallen, waarbij die beweging onder verschillende omstandigheden te Batavia was opgetreden. De antwoorden waren zeer verschillend van aard, en daarom maakte ik van ieder geval een overzichtsdiagram op, waarin, op gelijkvormige wijze onder elkaar, het registratie beeld van H, D en Z voor ieder station werd geteekend. Het zou in vele opzichten nuttig zijn deze teekeningen te reproduceeren, maar de bezwaren hieraan verbonden en de talrijke onvolkomenheden van het materiaal hebben mij daarvan doen afzien.

Deze onvolkomenheden worden hoofdzakelijk dáárdoor veroorzaakt, dat de tijdmaat van de diagrammen der verschillende observatoria niet ruim genoeg is om het al of niet simultane der verschillende bewegingen, die binnen enkele minuten afspelen vast te stellen.

Uit de opteekening van den TÖPFER-SCHULZE magnetograaf te Buitenzorg, waar de omstandigheden vrij gunstig waren, kon ik met zekerheid afleiden, dat het intreden der beweging der drie componenten vaak *niet* simultaan is. Nauwkeurigheid tot op onderdeelen van minuten is van de meeste magnetische diagrammen, waarbij 1 uur $= 10$, 15 of 20 mm. beslaat, niet te eischen. Het was daarom onmogelijk betrouwbare kaarten, waarop de storingsvector gedurende de beginbeweging in zijn veranderlijke grootte en richting werd voorgesteld, te teekenen en ik moet mij dus tot het volgende beperken.

In de volgende tabel is voor alle gevallen de richting der beweging opgegeven.

Was een inleidende beweging van geringe amplitude aanwezig, dan is dit voor $H +/-$ of $-/+$ aangegeven, voor D met w/E of e/W.

In sommige gevallen was de inleidende beweging van dezelfde orde van amplitude met de volgende beweging en dit is overeenkomstig met $+/-$ of $-/+$ en W/E of E/W aangegeven.

Wij zien in deze tabel de bewegingen van één of meer elementen voor verschillende stations constant van richting. Verdere inlichtingen verschaft nog de noot van Rev. P. DE MOIDREY in het „Bulletin des Observations de l' Observatoire de Zie-Ka-Wei T. XXXI" en de storingscopieën voor Greenwich, Parc st. Maur en Samoa. De eerste stelt voor Zi-Ka-Wei de frequentie van de positieve H en Z beweging op 95 pCt. en van de E beweging der D op 90 pCt.; terwijl

uit de Samoakrommen in 9 gevallen de H en Z beweging steeds + blijkt te zijn.

Volgens dien treden de onderstaande bewegingen vrij constant op:

Station	H	D	Z	Geogr. Breedte
Batavia	+	W	—	—6°
Buitenzorg	+	W	+/—	—7°
Manila	+		+	15°
Zi-Ka-Wei	+	E	—	31°
Samoa	+		+	—13°
Honolulu	+		geen reg.	20°
San Antonio			+	29°
Coïmbra	+		geen reg.	40°
Greenwich			+	51
St. Maur			—	49
Perpignan	+			43°
Bombay	+	geen reg.	geen reg.	19°
Mauritius	+		+	—20°
Melbourne			—	—38°

Het schijnt dus, dat de standvastigheid in het optreden van een bepaalden bewegingszin met de geographische breedte afneemt en verder voor H het grootst en voor D het kleinst is, bovendien voor H altijd bij een *positieven* bewegingszin.

UITBREIDING DER BEWEGING OVER DE AARDE.

Het karakter van de aanvangsbewegingen, die gelijktijdig op verschillenden punten van het aardoppervlak plaats grepen, liet zich door de, als bovenvermeld, opgemaakte overzichts-diagrammen bestudeeren.

Duidelijk bleek uit hen, dat voor H en D, maar niet voor Z, nabij elkaar gelegen plaatsen ongeveer hetzelfde beeld vertoonen, maar dat dit voor plaatsen in andere werelddeelen vaak geheel anders is.

Het gering aantal stations liet slechts toe om voor Noord-Amerika en Europa dat onderscheid nader te onderzoeken. Ik geef daarom hieronder een overzicht van de beweging voor H en D in Europa en Noord-Amerika, waarbij evenwel het laatste voor de jaren 1892—94 slechts door twee stations (Poronto in Canada en San Antonio in Texas) is vertegenwoordigd.

Datum	Europa		N.-Amerika	
	ΔH	ΔD	ΔH	ΔD
18 Mei 1892	+/−	*w/E*	−/+	*e/W*
16 Juli „	−	*E en W*	ontbreken	
12 Aug. „	−	*E en W*	+	*E en W*
18 „ 1893	+	*e/W*	ontbreken	
25 Sept. „	+	*W*	ontbreken	
2 Jan. 1894	+	*w/E*	−/+	*E/W* (alleen San Antonio)
20 Febr. „	−/+	*w/E*	−/+	*w/E*
20 Juli „	+	*e/W*	+	*e/W*
20 Aug. „	+	*e/W*	+	*w/E*
13 Nov. „	−/+	*e/W*	+/−	*w/E*
16 Aug. 1902	+	*e/W*	+	*w/E*
5 April 1903	+	*e/W*	−/+	*w/E*
3 Febr. 1905	+	*e/W*	+	*w/E*

Herhaaldelijk zien wij hier de Europeesche en de Amerikaansche groep tegenovergesteld en wel treedt in Europa meestal een N.W. vector op, in Amerika een *N.E.* hetgeen wijst op een storingscentrum nabij Groenland, dus nabij de magnetische – en de Aurora-Borealis of storingspool gelegen.

Voor eenige gevallen heb ik gepoogd door het in kaart brengen van de gelijktijdige storingsvectoren een overzicht te krijgen, maar hierbij treedt de bijna onoverkomelijke moeilijkheid op, dat men geen simultane waarden van ΔH en ΔD, die werkelijk betrouwbaar zijn, kan opmaken.

Hierboven wees ik, naar aanleiding van de metingen op de Buitenzorgsche magnetogrammen, er reeds op, dat dit een ruimen en zeer betrouwbaren tijdmaat vereischt. Al was het mij daarom onmogelijk juiste waarden voor het azimuth dier vectoren te berekenen, toch kon ik ongeveer de richting opmaken.

Voor de aanvangsbeweging van de storing op 3 Februari 1905, wezen nu de vectoren van de inleidende beweging naar een centrum aan de Westkust van Noord-Amerika en die der hoofdbeweging naar een centrum nabij Groenland. Voor de storingen op 16 Augustus 1902 en op 5 April 1903 vond ik eenigszins hetzelfde [1]).

VERTICALE KRACHT.

Opvallend is het, hoe plaatsen op geringen afstand van elkaar gelegen, eene tegenovergestelde verandering in de verticale component

[1]) Dit schrijvende komt mij eene mededeeling van Dr. BRÜCKMANN (Meteor. Zeitschrift 1907 No. 12) over hetzelfde onderwerp in handen, waarin ik lees, dat ook hij tot een in de nabijheid der magnetische pool optredend storingscentrum komt.

vertoonen. Boven deelde ik reeds mede, dat Batavia en Buitenzorg in dit opzicht verschillend zijn en ik kwam tot de ontdekking dat Greenwich en Parijs (Parc. St. Maur) doorloopend een tegenovergestelde beweging vertoonen. Uit de voor verscheidene jaren uitgegeven reproducties van storingsdiagrammen maakte ik de volgende lijst op.

St. Maur en Greenwich.

	St. Maur				Greenwich		
Datum	Uur	ΔH	ΔD	ΔZ	ΔH	ΔD	ΔZ
1891 Maart 2	2	+	*e/W*	−	+	*e/W*	+
Juni 14	9	+	*E*	−	+/−	*e/W*	+/−
1892 Januari 4	19	+	*E*	−	+	*w/E*	−
Februari 13	5	+	*E/W*	−	−/+	*E/W*	+
„ 20	19	+	*E/W*	−	+	*W*	+
Maart 11	23	+	*E/W*	−	+	*W*	+
Mei 16	22	+	*E*	−	+	*E*	+
„ 18	8	+	*w/E*	−	+/−	*w/E*	+/−
Juni 27	5	+	*E*	−	+	*W*	+
Juli 12	18	+	*W*	−	+	*W*	+
Juli 16	13	+	*e W*	+/−	+	*E/W*	−/+
Aug. 3	14	+	*W*	−	+	*W*	+
Sept. 5	23	−/+	*E/W*	−	−/+	*E/W*	+
1893 Maart 25	4	+	*E*	−	+	*E*	+
April 26	16	−/+	*W*	−	−/+	*e/W*	−/+
Juni 9	13	+	*W*	−	−/+	*e/W*	−/+
Augustus 6	4	+	*e/W*	−	+	*e/W*	+
September 8	1	+	*W*	−	−/+	*w/E*	+
1894 Januari 11	20	+	*W*	−	+	*W*	+/−
Februari 20	20	+	*E*	−	−/+	*W/E*	+
„ 22	22	+	*W*	+/−	+	*W*	+
„ 28	15	+	*W*	−	−/+	*e/W*	−/+
Juli 20	6	+	*E*	−	+	*E*	+
1895 Mei 29	15	−/+	*e/W*	−	−/+	*e/W*	−/+
1896 Juli 23	18	−/+	*W*	−	−/+	*e/W*	+
Aug. 29	17	−/+	*W*	−	−/+	*e/W*	−/+
1898 Maart 15	1	+	*W*	−	+	*W*	+
„ „	13	+	*W*	−	−/+	*W*	+
September 9	14	+	*W*	−	+	*W*	+ [1]
1899 Januari 28	19	+	*W*	−	+	*W*	+
Juni 28	22	+	*W*	−	+	*W*	+ [1]

[1]) Te midden van een storing.

Men ziet hoe ΔH en ΔD meestal overeenstemmend zijn; alleen is te Greenwich voor H de inleidende beweging frequenter; maar ΔZ is doorloopend tegenovergesteld en wel voor Greenwich positief, voor Parijs negatief.

Merkwaardig is het, om uit de gereproduceerde registratielijnen op te merken, hoe de schommelingen, die op de beginbeweging volgen, voor beide plaatsen weer overeenstemmen; een enkele opvallende snelle beweging te midden der storing, als het ware een nieuwe beginstoot, is dan weer tegenovergesteld. Deze herhaling schijnt een reëel phenomeen te zijn. Zoo was de stoot van 30 October 1903 een duidelijke beginbeweging te midden van een reeds sedert uren aan den gang zijnde storing. Op plaatsen op hoogere breedte verloor zij zich in de schommelingen dier oudere storing. De phenomenale heftigheid van het tweede gedeelte der storing is misschien daaraan toe te schrijven, dat twee storingen gesuperponeerd waren. Ook bij de heftige storingen van 13 Februari, 6 Maart en 27 Juni 1892, alsmede 6 Augustus 1893, kwamen twee beginstooten voor.

DE OORZAKEN DER BEGINBEWEGING.

De merkwaardige ongelijkheid van de beweging in de verticale kracht, zoo standvastig voor dicht bij elkaar gelegen plaatsen, geeft ons misschien een middel om het raadselachtige van het phenomeen te ontsluieren.

Wanneer wij, wat alle waarschijnlijkheid voor zich heeft, het optreden dier storingsvectoren aan het ontstaan van electrische stroomen toeschrijven, dan is het onmogelijk om aan te nemen, dat de electriciteitsbeweging, die deze vectoren verwekt, in den vrijen dampkring zulk een aan de plaats gebonden verdeeling zou hebben. Dat kan niet anders dan in het optreden van den electrischen aardstroom zijn oorsprong vinden. Wij moeten aannemen, dat bij het plotseling optreden van een storing de daarbij opgewekte aardstroom standvastige wegen door de aardkorst kiest.

Dat de aardstroom voor verschillende dicht bij elkaar gelegen deelen der aarde verschillend kan zijn, is hoogstwaarschijnlijk; tenminste voor den oppervlakte-stroom heb ik dat kort geleden [1]) voor Noord- en Zuid-Java gevonden. Die ongelijkheid bestond daarin, dat bij het korter worden van de overeenstemmende magnetische variaties, de aardstroomvariaties sterker in amplitude toenamen zoowel voor het vulkanische Zuidelijk- als voor het alluviaal en diluviaal Noordelijke gedeelte.

Dit sterke verschil in aardstroom moet voor de diepere aardlagen

[1]) Zie ditzelfde Zittingsverslag: Aardstroom-Registratie te Batavia, 2de mededeeling.

veel minder worden ; dat bewijst wel de gelijkheid van de magnetische variaties te Batavia aan Java's Noordkust en te Buitenzorg aan den rand van het vulkanische gedeelte gelegen.

Maar de mogelijkheid van een verschil bij het plotseling optreden van een stroom, ook voor diepere lagen, is door deze uitkomsten zeer waarschijnlijk gemaakt.

Op de diagrammen, bij die aardstroom-registratie te Batavia verkregen, komen ook eenige gevallen van een beginstoot voor en daar de tijdmaat zeer ruim was (1 millim. = 1 min.) en verder de magnetische component met groote gevoeligheid meêgeregistreerd werd, zijn deze gevallen zeer leerrijk.

Datum en Uur.			Beginbeweging van den *E-W* Aardstroom vangt eerder aan dan die van de magnet. Noord-component.	
14 Mei	1906,	4^h *a.m.* Bat. *T*	0.0 min.	Aanvang geleidelijk
30 Juli	,,	3 ,, ,,	0.6 ,,	,, id.
3 September	,,	7 *p.m.* ,,	0.0 ,,	,, vrij plotseling
22 ,,	,,	8 ,, ,,	0.0 ,,	,, plotseling
10 November	,,	12 ,, ,,	0.0 ,,	,, vrij plotseling
26 ,,	,,	1 *am* ,,	0.0 ,,	,, plotseling
26 December	,,	11 *p.m.* ,,	0.0 ,,	,, ,,
8 Januari	1907	12 ,, ,,	0.0 ,,	,, ,,
15 ,,	,,	3 *am.* ,,	0.0 ,,	,, vrij plotseling
14 Februari	,,	3 ,, ,,	0.0 ,,	,, plotseling
27 Januari	1908	9 *p.m.* ,,	0.0 ,,	,, ,,

Op één geval na, waarbij trouwens de tijdsbepaling door het geleidelijke ontstaan der aanvangsbeweging minder scherp was, vinden wij dus gelijktijdigheid voor de beginbeweging bij aardstroom en magnetischen vector.

Zooals vaak het geval is geweest, moet men een verklaringshypothese, gevormd bij eerste kennismaking met de feiten, wijzigen, wanneer men naderhand een omvangrijker kennis door uitbreiding van het materiaal van feiten heeft verkregen.

Zoo ook hier.

Dacht ik eerst den zetel van de electriciteitsstrooming, die kan geacht worden den beginstoot te verwekken, in de hoogste atmosfeerlagen te moeten zoeken, het nu blootgelegde gedrag van de verticale component brengt mij er toe, dien zetel eerder in de aarde zelf te zoeken.

De strooming moet in het eerste begin een, in het algemeen,

DE

Stoneyhul		Dun	Barrackpore			Mauritius			Melbourne			Victorialand		
H	*D*	*Z*	*H*	*D*	*Z*	*H*	*D*	*Z*	*H*	*D*	*Z*	*H*	*D*	*Z*
−/+	*E*													
						+	*W*	+	−/+	*E*/*W*	+/−			
+	*W*					+	*W*	+	+	*E*	−			
						+	*W*	+	+	*w*/*E*	−			
−/+	*E*/*W*					+	*W*	+	−/+	*W*/*E*	+/−			
									+/−	*e*/*W*	−			
+	*E W*					+			+	*E*	−			
+	*E*					+	*W*	+						
+	*E*					+		+	+	*w*/*E*	−			
+/−	*e*/*W*					+	*e*/*W*	−	+	*e*/*W*	−			
+	*W*					+	*E*	+	−/+	*E*/*W*	+			
+	*W*					+		+	+	*W*	−			
						+	*W*	+	+/−	*E*	−	+	*w*/*E*	
+	*e*/*W*					+	*w E*	+	+/−	*E*	−	−/+	*e*/*W*	
+	*e*/*W*		+	*W*		+	0	+	−/+	*E*/*W*	−			
−/+	*W*/*E*		+	*E*					+	*e*/*W*	−			

Oostwestelijke strooming van positieve of Westoostelijke van negatieve electriciteit zijn, omdat overal de horizontale magnetische component aangroeit. De ligging en vorm dier strooming schijnt veranderlijk te zijn en een sterken invloed van het eigen magnetisme der aarde te ondergaan; ook schijnt zij tijdens het aangroeien in sterkte en ligging te veranderen. Voor de, op den beginstoot volgende magnetische storing zelf, moeten wij aannemen, dat vooral extraterrestrische stroomingen de oorzaak zijn, ten minste zoowel voor de magnetische nastoring, als voor het deel, dat een regelmatige dagelijksche variatie vertoont, heb ik dat waarschijnlijk gemaakt. [1]) Bovendien wijst het Noorderlicht daarop. De magnetische nastoringsvector is de gemiddelde storingsvector ontdaan van de grootere en kleinere schommelingen die tijdens de storing plaats grijpen. Hij groeit na den beginstoot snel aan en neemt daarna langzaam af.

Daar hierbij de horizontale intensiteit juist afneemt, moeten we dus tot een evenzoo W-E gerichte strooming van negatieve electriciteit in de hoogere atmospherische lagen besluiten. Een open vraag blijft het nu, waarom de intra-terrestrische strooming bij den aanvang en de extra-terrestrische gedurende het verdere verloop van de storing beide standvastig een Oostwestelijke richting hebben.

Geophysica. — De Heer VAN DER STOK biedt eene mededeeling aan van den Heer W. VAN BEMMELEN: *„Aardstroom-registratie te Batavia"*. 2de mededeeling.

In mijn eerste mededeeling over de registratie van elektrische aardstroomen te Batavia, ter onderzoeking van het verband tusschen de schommelingen in aardstroom en magnetische kracht, moest ik op verscheidene onbeantwoorde vragen wijzen.

Ten eerste het feit, dat de aardstroom tusschen Anjer en Batavia viermaal grooter is dan tusschen Batavia en Cheribon. Ik hoop weldra den stroom tusschen Batavia en een plaats O. en Z. van Anjer te meten, om te trachten over die abnormaliteit licht te verschaffen.

Verder bleef het raadselachtig, waarom dat verband met de magnetische kracht voor den stroom tusschen Semarang en Batavia (en ook Soerabaja en Batavia) zulk een karakteristiek onderscheid vertoonde met dat voor den stroom tusschen Batavia en dichterbij gelegen plaatsen. Dat verschil bestond in hoofdzaak daarin, dat bij het korter worden van den duur eener magnetische schommeling,

[1]) Met. Zeitschrift 1895. p. 321. T. M. VIII p. 153.

de amplitude van den aardstroom veel sterker aangroeide voor de lange lijn dan voor de korte.

Ik wees er op, dat hier mogelijkerwijze een invloed van den afstand in het spel kwam, en dat een registratie van den stroom te Semarang over de afstanden Semarang—Cheribon en Semarang—Soerabaja daaromtrent waarschijnlijk nader zou kunnen inlichten.

Dit denkbeeld heb ik inderdaad kunnen verwezenlijken door een bezoek aan Semarang in de maand December 1907. In het post- en telegraafkantoor aldaar werd welwillenderwijze gedurende eenige dagen een vertrek te mijner beschikking gesteld, waar ik de te Batavia gebruikte instrumenten kon opstellen. Hoewel ik door een klein ongeval eenigen tegenspoed ondervond, kon ik toch gedurende twee nachten uitnemende diagrammen verkrijgen.

De uitkomst was ondubbelzinnig; n.l. *de aardstroom tusschen Semarang—Soerabaja en Semarang—Cheribon stemt in karakter en sterkte overeen met dien tusschen Batavia—Cheribon.*

Schommeling van de magnetische Noordcomponent.		Amplitude van den aardstroom in Volt per K.M. / Amplitude magnetische component in dynes.			
Halve Duur,	Amplitude	Sem.-Cheribon	Sem.-Soerabaja	Batavia-Cheribon Vroeger gevonden.	Aantal gevallen.
		18—19 December 1907.			
0.5 min.	1.2 γ	22 6	19.3	21.2	14
1.0 „	1.5 „	20.9	16.9	20.5	11
13.5 „	3.0 „	16.2	14.4	16.0	8
		19—20 December 1907.			
0.6 min.	0.5 γ	26.3	23.6	23.0	33
1.4 „	1.1 „	23.4	20.0	20.5	16
9.5 „	2.4 „	20.3	16.7	16.5	19

Derhalve:

Halve duur schommeling		Aardstroom Batavia-Cheribon / Aardstroom Semarang-Cheribon	Aardstroom Batavia-Cheribon / Aardstroom Semarang-Soerabaja
18—19 XII '07	0.5 min.	0.94	1.10
	1.0 „	0.98	1.21
	13.5 „	0.99	1.11
19—20 XII '07	0.6 min.	0.87	0.97
	1.4 „	0.88	1.02
	9.5 „	0.81	0.99

De registratie van beide nachten te zamen gevat geeft:

Halve Duur	Amplitude	Sem.-Cher.	Sem.-Soerabaja	Aantal gevallen
0.36 min.	0.6 γ	24.3	21.4	20
0.65 „	0.9	26.3	22.8	20
0.87 „	0.9	26.5	22.7	20
1.08 „	1.2	23.7	19.7	10
3.65 „	1.0	22.9	18.3	10
13.10 „	3.2	22.0	18.2	11

Uit deze getallen vinden wij ook de aanvankelijke toeneming van de aardstroomamplitude voor een (halven) duur, kleiner dan ongeveer 0.7 min., evenals dat voor den Batavia—Cheribon- en Batavia—Anjerstroom werd gevonden.

Voor het phaseverschil werd uit 14 gevallen gevonden, Semarang—Cheribon 17°.5, Semarang—Soerabaja 16°7, terwijl voor Batavia—Cheribon vroeger 22° werd gevonden.

De registratie te Semarang leverde dus een hoogst belangrijke bevestiging van de voor Batavia—Cheribon gevonden uitkomsten. Maar toch kon nu niet besloten worden tot een invloed van den afstand op de amplitude-verhouding.

Inderdaad nieuwe waarnemingen, te Batavia gedaan, gaven weldra een anderen blik op de quaestie.

Ik vernam, dat de verbinding met Semarang tegelijkertijd door lijnen, die door de Noordkustvlakte loopen en door de reeds gebruikte lijn om de Zuid langs den spoorbaan mogelijk was.

Registratie nu met deze lijnen, die tusschen *dezelfde* aardplaten te Semarang en Batavia (observatorium) loopen, gaven de merkwaardige uitkomst, dat de stroom in beide lijnen ongelijk was.

De Noordlijn gaf overeenstemming met de vroeger gevonden uitkomsten op de Batavia—Cheribonlijn gevonden, de Zuidlijn gaf weer de verhoogde toeneming van de aardstroom-amplitude bij korter worden van den duur der schommeling.

Halve duur schommeling X	Amplitude Aardstroom in Volt per K.M. / Amplitude magnet. component in dynes		Aantal gevallen
	Zuidlijn	Noordlijn	
0.50 min.	62	28	20
0.77	48	29	20
1.53	50	34	20
5.53	24	27	20
8.60	23	27	10
21.77	13	20	10

PHASE-VERSCHIL

Halve duur schomm. X	Zuidlijn	Aantal gevallen	Halve duur schomm X	Noordlijn	Aantal gevallen
0.8 min.	31°	39	1.3 min.	16°	68
6.8 „	31	18	6.5 „	18	40
16.4 „	31	20	17.0 „	26	23

Dus ook het phaseverschil is voor beide lijnen verschillend. Zonderling is hier het optreden van eene toeneming van het phaseverschil bij de Noordlijn, wat op andere lijnen niet werd aangetroffen.

Vroeger werd voor het phaseverschil op de lijn Semarang—Batavia 36° gevonden. Of het verschil met het nu gevonden phaseverschil van 31° reëel is, moet nog twijfelachtig genoemd worden.

Deze nieuwe uitkomsten leidden tot het besluit, dat het vroeger gevonden verschil in karakter niet aan den grooteren afstand mocht toegeschreven worden, maar aan eigenaardigheid van de lijn zelf.

Daar de 2 lijnen, om de Zuid en de Noord, tusschen dezelfde aardplaten stonden, en ongeveer gelijken weerstand hadden, moest ik besluiten tot een optreden van electromotorische kracht in de lijn zelf. Hiervoor zijn twee mogelijkheden:

1°. inductie dadelijk in den draad.

2°. contact met den bodem.

Het is nu zeer wel mogelijk, dat beide oorzaken in de diluviale en alluviale noordkustvlakte en de vulkanische zuidelijke streken zeer verschillend zijn.

Om deze twee oorzaken te scheiden heb ik de volgende dubbele proef genomen.

Batavia en Cheribon zijn o.a. door de twee evenwijdig loopende koperdraden der intercommunale telefoon verbonden; evenzoo loopen tusschen Batavia en Soerabaja op dezelfde palen twee telegraafdraden.

Zulk een dubbele lijn verbond ik nu met mijn galvanometer, en schakelde tusschen galvanometer en aarde een weerstand in, die groot was, vergeleken bij die van den draad. (Voor Cheribon was die weerstand 5000 Ohm, voor Soerabaja 40.000 Ohm). Vervolgens liet ik eenige uren beide draden met den galvanometer in verbinding blijven, en verbrak daarna de verbinding met één der draden.

Na weer enkele uren schakelde ik dezen draad weer in, maar verbrak de verbinding met den anderen, om ten slotte nog met beide draden verbinding te geven.

Indien nu de aardstroom alleen een stroom was van grondplaat tot grondplaat, dan mocht hij bij deze veranderingen maar weinig in sterkte veranderen, daar de gezamenlijke weerstand zoo weinig veranderde.

Daarentegen, wanneer de aardstroom voor een gedeelte niet van de plaat afkomstig was, maar onmiddellijk veroorzaakt door inductie of een andere werking (b.v. het opvangen van zich in de atmosfeer bewegende electronen), dan zou dat gedeelte bij verbinding met één draad de helft zijn van dat met twee draden en dus een belangrijk verschil in sterkte van den stroom opgemerkt moeten worden,

Het zou nu mogelijk zijn, dat deze invloed verschilde met den duur van de schommeling van de magnetische component, en ook anders ware in de kustvlakte dan in de hoogere vulkanische streken in Zuid-Java, zoodoende zou dan het verschil in karakter, boven gevonden, kunnen verklaard worden.

Alvorens de uitkomsten van deze proef te vermelden, wil ik nagaan wat de invloed van isolatieverlies is.

Het isolatieverlies zal hoofdzakelijk langs toevallig den draad aanrakende boomtakken en telegraafpalen ontstaan. De eerste invloed zal onregelmatig zijn, en somme voor beide lijnen gelijk.

Bij de tweede zal iedere telegraafpaal een aardverbinding met grooten weerstand, voor beide draden tegelijk, geven, daar de draden over dezelfde jukken loopen.

Langs deze aardverbinding zal een stroom gaan, indien de aardpotentiaal daar ter plaatse afwijkt van die in den draad.

Die stroom zal dus weer weinig invloed gevoelen van het feit of één of beide draden met den galvanometer zijn verbonden.

De uitkomst van de proef zoowel voor de lijnen naar Cheribon, als voor die naar Soerabaja was ondubbelzinnig, zooals onderstaande cijfers aantoonen.

Halve duur schommeling.		Amplitude aardstroom in m.m. aflezing.		
		Amplitude X in m.m. aflezing.		
Beide lijnen	Eén lijn	Beide lijnen	Eén lijn	
1.0 min.	1.2 min	2.5	2.5	Batavia-Cheribon
5.4 „	6.6 „	2.0	2.0	
0.6 min.	0.8 min.	6.1	5.7	Batavia-Soerabaja
8.3 „	19.3 „	1.4	1.5	

Deze eenvoudige proef komt mij voor van fundamenteele beteekenis te zijn, daar zij aantoont, *dat geen opwekking van electromotorische kracht in de lijn zelf plaats grijpt*, iets wat a priori niet zoo onwaarschijnlijk kan genoemd worden.

Er bleef nu niets anders over dan aan te nemen, dat het verschil in karakter van den stroom in de Noord- en de Zuidlijn daardoor ontstaat, dat door het isolatieverlies gedeeltelijk de stroom wordt opgenomen uit den bodem, waarover de lijn liep en dat die stroom anders was in de Noordkustvlakte dan in de bergen. Was dit zoo, dan moest dus de aarstroom in den Preanger, daar waar de Zuidlijn in een niveau van ± 600 M. tusschen talrijke vulkanen loopt, diezelfde eigenaardigheden vertoonen. Om dit aan te toonen, was het gelukkig niet noodig weer met de instrumenten te verhuizen, maar kon worden volstaan met de volgende verbinding te maken.

Aarde te Buitenzorg—Galvanometer—Observatorium—Batavia—Buitenzorg—Tasikmalaja—Aarde aldaar. Buitenzorg ligt aan den N.W.-voet van het gebergte, en Tasikmalaja aan den Oostvoet. Beide plaatsen liggen nog op een hoogte van ± 300 M. boven zee.

Isolatieverlies langs de telegraafpalen op de heen-en-weer lijn Buitenzorg—Batavia—Buitenzorg kon nu geen aardstroom uit de vlakte tusschen Buitenzorg en Batavia in de lijn brengen, en alleen een gedeelde van den Preangerstroom doen wegloopen. Dat verlies kan dus de uitkomst niet vervalschen.

De stroom tusschen Buitenzorg en Tasikmalaja bleek nu inderdaad het bovenbedoelde karakter te bezitten d. w. z. een veel sterkere toeneming met afneming van den duur der schommeling te vertoonen, dan de

Noordkustlijnen	Batavia-Tasikmalaja
Halve Duur Schommeling X	Amplitude Aardstr. in Volt per K.M.
	Amplitude X in dynes
0.4 min.	60
0.8 „	56
1.2 „	55
9.0 „	15

Indien isolatieverlies de oorzaak is van de ongelijkheid van den stroom tusschen Batavia en Semarang om de Zuid en de Noord, dan zal dat verlies in het droge jaargetijde kleiner zijn dan in het natte.

Inderdaad vond ik dat, zooals onderstaande cijfers doen blijken.

18—21 Juni 1907				December 1907			
Halve Duur	Ampl. Sem.-Bat. stroom in Volt. p. K.M.			Halve Duur	Ampl. Sem.-Bat. stroom in Volt. per K.M.		
	Ampl.	X	in dynes		Ampl.	X	in dynes
0.6 min.		43		0.5 min.		62	
1.0 „		35		0.8 „		48	
1.4 „		31		1.5 „		50	
5.0 „		18		5.5 „		24	
11.5 „		13		8.6 „		23	
				21.8 „		13	

Deze hierboven behandelde karakteristieke verschillen kunnen wellicht aanleiding worden tot het vinden van eene verklaring van het wezen en de oorzaak der aardstroomen, maar meerdere waarnemingen onder andere omstandigheden zullen daartoe ongetwijfeld noodig zijn.

Het kwam mij belangrijk voor om te onderzoeken of dat groote verschil in aardstroom ook gepaard gaat met verschil in amplitude der magnetische variaties.

Buitenzorg toch ligt aan den rand van het vulkanische zuidgedeelte van Java en Batavia ligt in de Noordkustvlakte; bovendien zijn gelijktijdig registraties der magnetische component voor beide plaatsen beschikbaar.

Ik heb daarvoor gebruikt de registratie der X-component te Batavia op de aardstroomdiagrammen en van het TÖPFER-Unifilair van de X-component te Buitenzorg.

In Januari, Februari, Maart, Juli, Augustus, September registreerde het magnetische variatie-instrument op de aardstroomdiagrammen de magnetische component loodrecht op de richting Batavia—Anjer d. i. N4°E. Het verschil van richting met dat bij TÖPFER's instrument, waarmee de X-component werd geregistreerd, is te verwaarloozen.

Op ieder diagram vergeleek ik nu de amplitude van een kortdurende en een langerdurende variatie, zooveel mogelijk even ver van de basislijn gelegen. Ik was zoodoende onafhankelijk van verschil in schaalwaarde en andere verschillen.

Ik bekwam als gemiddelde van 30 gevallen in de maanden Januari—Maart '07 voorkomende, en 24 gevallen in de maanden Juni—September '07:

Gemiddelde Amplitude der			
Kortdurende variaties.		Langdurende variaties.	
Buitenzorg	Batavia	Buitenzorg	Batavia
1.44 m.m.	13.21 m.m.	2.68 m.m.	21.27 m.m.
1.01 „	8.71 „	2.93 „	24.03 „
1.25 m.m.	11.21 m.m.	2.79 m.m.	22.49 m.m.

Terwijl dus de langdurige variatie een verhouding $\frac{22.49}{11.21} = 2.01$ aanwijzen, is die bij de kortdurende pulsaties $\frac{2.79}{1.25} = 2.24$.

Dat verschil van 10 % meen ik evenwel aan de volgende omstandigheid te moeten toeschrijven.

Volgens het beeld der aardstroomdiagrammen, waarop de pulsaties groot en duidelijk zijn te zien, zijn de omkeerpunten spits. Op de

Buitenzorg-diagrammen, met een ± tien maal kleiner schaal, worden die scherpe punten afgestompt en krijgt men een te kleine amplitude.

Die verkorting bedraagt volgens schatting een tiende millimeter d. i. juist 10 % van de amplitude.

Bij de langdurende oscillaties treedt die onnauwkeurigheid in de opteekening natuurlijk niet op.

We komen dus tot het besluit, *dat de kort- en langdurende variaties der magnetische kracht te Batavia en Buitenzorg dezelfde verhouding van amplitude hebben en dat zij dus niet of slechts voor een zeer klein deel veroorzaakt kunnen zijn door den stroom, die door de buitenste korst van de aarde loopt.*

Verreweg het grootste deel van den aardstroominvloed moet derhalve afkomstig zijn van stroomen op grooter diepten en van grooter uitbreiding en meer gelijk van sterkte.

Natuurkunde. — De Heer DU BOIS biedt, mede namens de Heeren G. J. ELIAS en F. LÖWE, eene mededeeling aan uit het Bosscha-Laboratorium: *„Een autocollimatieve spectraaltoestel van groote lichtintensiteit, tevens monochromator"*.

Bij vele optische werkzaamheden is een illuminator wenschelijk, die groote helderheid paart aan monochromatische zuiverheid van het licht, liefst van de orde 0,1 $\mu\mu$. Ondanks de schier onafzienbare verscheidenheid der beschikbare spectraaltoestellen [1]) bleef hier o. i. een leemte bestaan. Weliswaar construeerde WÜLFING [2]) voor dit doel een monochromator en onderzocht de met verschillende lichtbronnen bereikbare intensiteiten; intusschen was de apertuur hier slechts $^1/_8$, de dispersie eveneens vrij gering. Een onlangs door FABRY en JOBIN [3]) beschreven autocollimator heeft een apertuur van slechts $^1/_{16}$. In den laatsten tijd werden door een van ons drie spectraaltoestellen met constante — loodrechte resp. evenwijdige — afwijking beschreven [4]), waarbij echter evenmin op groote lichtsterkte zoozeer behoefde te worden gelet.

De verbinding van laatstgenoemde voorwaarde met eene aanzienlijke dispersie leidt van zelve tot toepassing van het beginsel der auto-

[1]) H. KAYSER, Handb. d. Spectroscopie **1**, p.p. 489 en volgende geeft een overzicht gaande tot 1900

[2]) E. A. WÜLFING, N. Jahrb. f. Mineralogie Beil. **12**, p. 343, 1898. — S. NAKAMURA, Ann. d. Phys. (4) **20** p. 811, 1906.

[3]) CH. FABRY & A. JOBIN, Journ. de Phys. (4) **3** p. 202, 1904.

[4]) F. LÖWE, Zeitschr. f. Instr. Kunde **26**, p. 330, 1906 en **27**, p. 271, 1907.

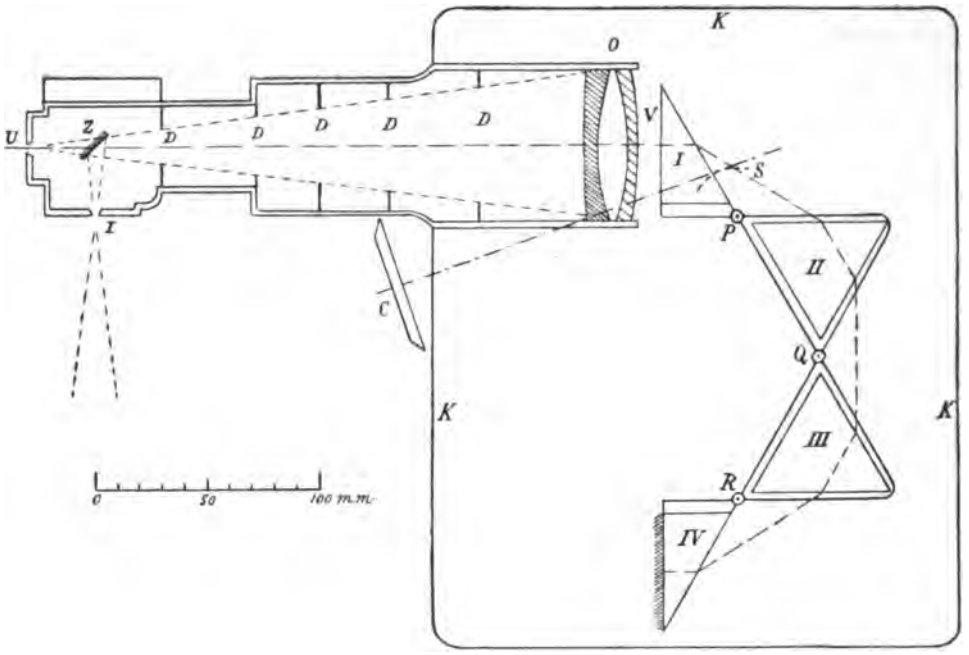
collimatie, bij voorkeur met 2 „halfprismas"; immers bij het gebruik als secundaire spectrale lichtbron moet onbewegelijkheid der intreespleet gevergd worden en is die der uittreespleet eveneens een vereischte — wellicht met uitzondering van kleine bewegelijke lichtbronnen. Wij ontveinzen ons daarbij de nadeelen niet, die dat beginsel aankleven, t. w. vooral een hoogere mate van valsche terugkaatsing, alsmede bezwaren wegens de z.g. „vignetteering" van den lichtbundel tengevolge der noodzakelijkheid om de spleten op verschillende hoogte te plaatsen.

De allergrootste helderheid wordt vooral vereischt voor polarisatieproeven, waarbij een bijkans gekruiste stand der nicols slechts een gering gedeelte van het licht laat doordringen. Hieruit volgt dat in zulke gevallen polarisatie door den toestel zelve geen bezwaar oplevert, en het kan zelfs voordeelig zijn dat elke breking onder den polarisatiehoek plaats grijpe; immers er is dan hoegenaamd geen verlies door terugkaatsing van licht, evenwijdig met de brekende ribben der prismas gepolariseerd. De toestel zoude dus bij den gewonen stand licht doorlaten, hetgeen eene sterke partiëele polarisatie volgens de verticaal vertoont.

Uit de wet van Brewster volgt dat de brekende hoek der heele prismas dan $(180° - 2 \text{ arc tg. } n)$ moet bedragen; men zal bij voorkeur prismas van 60° (resp. 30°) verkiezen, overeenkomende met $n = \sqrt{3} = 1{,}732$. Voor dit geval verkrijgt men met 2 heele en 2 halve prismas het eenvoudige schema van Fig. 1, waarbij alle invalshoeken blijkbaar ook 60° bedragen.

De glassoort moet nu aan de volgende hoofdeischen voldoen: 1) brekingsindex voor een gemiddelde kleur ten naastenbij 1,73; 2) Geen sterke absorptie van violet licht; 3) Homogeniteit en afwezigheid van blaasjes; 4) Bestendigheid; 5) Voldoende afmetingen der ruwe blokken. Ondanks de tegenwoordige ruime keuze bleek het toch voorshands onmogelijk die 5 voorwaarden alle in genoegzame mate te vervullen. Bij het in het voorjaar van 1907 door C. Zeiss geconstrueerde instrument werd dus voorloopig zwaar flint N°. 1771 van de firma Schott & Co. te Jena gebruikt, waarvoor $n_D = 1{,}794$; hierbij behoort volgens het voorafgaande eigenlijk een brekende hoek van ruim 58° (resp. 29°). De waarde δn tusschen C—F bedraagt 0,0309; hieruit volgt eene dispersie voor elk heel prisma van 4°4'; derhalve voor den geheelen stralengang $2 \times (^1/_2 + 1 + 1 + ^1/_2) \times 4°4' = 25°$ bijna.

Ten einde het stel in het minimum van afwijking te doen blijven moet blijkbaar elk prisma om de punten R, Q en P een gelijke draaing t. o. v. het voorafgaande ondergaan. Prisma I blijft onwrikbaar met de collimatorbuis verbonden; elk punt van II beschrijve



nu een cirkelboog α om P; dan beschrijven de punten van III cycloïden, die van IV hoogere cycloïden, waarbij de geheele draaing van III en IV t. o. der grondplaat 2α resp. 3α bedraagt, afgezien van hunne gelijktijdige translatie.

In een dergelijk geval werd door een onzer *(F.L.)* jaren geleden bij een kwarts-monochromator met goed gevolg een tandrad-mechanisme geconstrueerd, hetgeen ook thans gekozen werd. De vroegere inrichting voor het snijden der vrij ingewikkelde tandvormen werd ook nu weer in gebruik gesteld. Door HAMY[1]) werd trouwens onlangs een analoog mechanisme beschreven en door JOBIN uitgevoerd.

Eenvoudigheidshalve wordt prisma II primair gedraaid door de schematisch aangeduide schroefboog S, hetgeen met een bamboesstang van uit de plaats van den waarnemer kan worden bewerkstelligd. De aflezing geschiedt op den cirkel C; de prismatafels zijn met nieuwzilveren voetjes voorzien, die op een spiegelglasplaat glijden; prisma IV is aan de achterzijde verzilverd.[2]) De hoek van I bedraagt 30°40'; het intree-

[1]) M. HAMY, Journ. de phys. (4) **7**, p. 52, 1908; Zeitschr. f. Instr. Kunde **28**, Apr. 1908.

[2]) In menig opzicht verdient het wellicht de voorkeur een metaalspiegel met glycerine aan het achtervlak te hechten, immers men kan dien gemakkelijk wegnemen en het instrument ook voor doorgaand licht inrichten; hiertoe moet dan nog een kijker of spectograaf met camera worden aangebracht; dezelfde spiegel kan dan desnoods worden gebruikt om het licht de vereischte richting te geven. Trouwens reflecteeren sommige alliages in het ultraviolet (omstreeks 320 $\mu\mu$) aanmerkelijk beter dan zilver.

vlak V — 52 × 52 mm groot — vormt een hoek van omstreeks 40' met het golffront, waardoor de schadelijke terugkaatsing op zijde wordt geworpen. Het drieledige objectief heeft eene middellijn van 67 mm., een brandpuntsafstand van 260 mm. zoodat de apertuur $^1/_4$ bereikt. De laterale spherische aberratie is volgens de berekening van de orde 0,01 mm. Een klein gedeelte van het convexe voorvlak is zwart gemaakt ten einde terugkaatsing te verhoeden; kwadratische diaphragmas D in de collimatorbuis zijn tot hetzelfde doel aangebracht; het geheele stel prismas bevindt zich onder een gesloten metalen kap K; hierin worden bakjes met de noodige chemicaliën geplaatst ten einde de gevoelige glasvlakken te beschermen tegen waterdamp, koolzuur, zwavelwaterstof enz. Het al dan niet afdoende van deze maatregelen kan uiteraard eerst na geruimen tijd blijken.

Aan het einde der collimatorbuis bevindt zich de om zijne as draaibare „spleetkop". De met een vergelijkingsprisma voorziene bilaterale intreespleet I is 3.5 mm. lang, ietwat draaibaar en cirkelvormig (kromtestraal 70 mm), zoodat de helling en kromming der spectraallijnen voor een gemiddelde kleur wordt opgeheven; de spleet wordt met een spiraalsleuf gefocusseerd. Een aan de vóórzijde verzilverd spiegeltje richt de stralen naar de lens, die het op hun terugweg aan de boven- of onderzijde passeeren om de uittreespleet U te bereiken; deze is eveneens bilateraal, 3,5 mm lang, maar rechtlijnig. Zij kan worden vervangen door monocentrische reflexvrije oculairen van 9 of 25 mm. brandpuntsafstand òf wel door een normaalcassette 60 × 90 mm., waarmede uiteraard slechts een klein spectraalgebied gelijktijdig kan worden gephotographeerd.

De geheele toestel is ijzervrij en op een marmerplaat zeer compact samengesteld. De stelschroeven vormen een rechthoekigen driehoek, waarvan eene rechtshoekzijde onder de optische as ligt, wier hoogte boven het tafelvlak 125 mm bedraagt.

Voor metingen in het ultraviolet wordt het objectief vervangen door een kwarts-fluoriet achromaat ($\varphi = 33$ mm., $f = 260$ mm., apert. $^1/_8$); hier zoude het vullen der geheele apertuur te kostbaar worden; verder behooren hiertoe een paar kwarts-halfprismas volgens CORNU.

Door een onzer werd vroeger bij een spectrograaf eene eigenaardige schaalverdeeling volgens golflengten van 5 $\mu\mu$ tot 5 $\mu\mu$ aangebracht [1]), die veel gemak oplevert. Bij sterk dispergeerende instrumenten is dit beginsel echter niet aan te bevelen; men verkrijgt nauwkeuriger uitkomsten met een calibratiekromme, al is zulks ook tijdroovender.

---

[1]) F. LÖWE, Zeitschr. f. Instr. Kunde **26**, p. 332, 1906.

Voor deze calibratie bezigt men de lijnen der gasspectra van waterstof, helium en die eener kwikbooglamp; verder ook die van het vonkspectrum van koper en van het vlamspectrum van kalium; zoodoende bereikt men een vrij gelijkmatige verdeeling van lijnen tusschen 410 en 770 $\mu\mu$. De nauwkeurigheid der aflezing is van de orde 0.05 $\mu\mu$.

Niettegenstaande er van den beginne af op vermijding van dooden gang bij het bewegingsmechanisme werd gelet bleek het tot nu toe ondoenlijk dezen geheel onschadelijk te maken, zoodat het bij de aflezing noodig was de beweging steeds in denzelfden zin te doen plaats grijpen. Door verdere verbeteringen hopen wij echter dit euvel te kunnen ondervangen.

Met den als spectrometer gebruikten toestel bleek een verregaande splitsing van naburige spectraallijnen bereikbaar; het theoretisch oplossend vermogen der prismas in den gewonen zin bedraagt 65000. Zoo wordt b. v. met het sterke oculair de gele heliumlijn in hare twee componenten opgelost gezien, waarvan de afstand ongeveer 0,035 $\mu\mu$ bedraagt.

Bij FABRY en JOBIN (l.c. p. 208) vindt men eene vergelijkende tabel der in het spectrum door een golflengte-interval van 1 $\mu\mu$ ingenomen breedte, en wel in 't violet bij omstreeks 434 $\mu\mu$; in het rood is de dispersie natuurlijk heel wat geringer:

TOESTEL	DISPERSIE
BRUCE (Yerkes-Observatorium)	1,4 mm per $\mu\mu$
MILLS (Lick-Observatorium)	0,8 „ „ „
FABRY en JOBIN	2,0 „ „ „
DU BOIS, ELIAS en LÖWE	1,96 „ „ „
ROWLAND-tralie Berl. Universiteit, 1e orde (5684 lijnen per cm; 390 cm straal),	2,18 „ „ „

De viermaal grootere brandpuntsafstand bij FABRY en JOBIN wordt dus door onze zooveel grootere dispersie nagenoeg gecompenseerd.

Ofschoon zorgvuldig werd gelet op vermijding van reflexen bleek het toch ondoenlijk het diffuse licht — waarschijnlijk afkomstig van diffusie aan de vlakken van en binnen in de prismas — geheel te vermijden, zoodat men altijd te rekenen zal hebben met de aanwezigheid daarvan, zij het dan ook slechts in zeer geringe mate. Trouwens wij hebben geen enkelen toestel of prisma onderzocht, waarbij dit verschijnsel niet in meerderen of minderen graad storend optrad. De

vraag of een zekere diffusie ook nog bij een werkelijk makro-homogene, optisch „ledige" brekende middenstof optreedt, is moeilijk uit te maken en thans nog als aanhangig te beschouwen [1]).

De vignetteering bedraagt gemiddeld 25 % zooals men bij accomodatie op het kwadratische objectief-diaphragma waarneemt. Bij het gebruik van den toestel als monochromator voldeed de lichtsterkte aan de gekoesterde verwachting; met zonlicht is deze nog 5 tot 10 × hooger (naar gelang der meteorologische omstandigheden) dan wanneer een krater op de intreespleet wordt geprojecteerd; met monochromatisch licht van groote zuiverheid kunnen aldus nog zeer lichtzwakke polarisatietoestellen worden gebruikt. Bij deze toepassing als illuminator dient de geheele stralengang van de lichtbron tot aan het netvlies, inzonderheid de divergentie, aan dien binnen het instrument zelf te worden aangepast, wil men er werkelijk al het mogelijke voordeel uit plukken.

Natuurkunde. — De Heer DU BOIS biedt, mede namens den Heer G. J. ELIAS, eene mededeeling aan uit het Bosscha-Laboratorium: *„De invloed van temperatuur en magnetisatie op selectieve absorptiespectra"* II.

§ 12. Sedert onze vorige mededeeling (Febr. Verslag p. 635) werd de kryomagnetische inrichting nog in enkele opzichten verbeterd ten einde een sterker veld te verkrijgen en de hinderlijke ijzelvorming te beperken. De afgeknotte eindvlakjes der kegelvormige poolstukjes hadden 6 mm., de gespleten kernen [2]) 3.5 mm. middellijn; de spleetwijdte bedroeg aan het einde 0.4 tot 0.6 mm., terwijl de spleet verder wigvormig verliep in aansluiting met den stralengang tusschen twee lenzen; deze werd verder zoo geregeld dat het tralievlak juist geheel verlicht werd, zoodat het theoretisch oplossend vermogen — omstreeks 100.000 — tot zijne volle uitwerking kwam. In de richting der stralen volgde het nu op het laboratorium geädjusteerde dubbele kwartgolfplaatje volgens CORNU en W. KÖNIG [3]) met horizontale scheidingslijn. Wegens het aanzienlijke astigmatische verschil in de afbeelding van horizontale en verticale lijnen door een concaaf-

[1]) C. A. LOBRY DE BRUYN en L. K. WOLFF, Rec. d. Trav. Chim. **23**, p. 155, 1904; L. MANDELSTAM, Physik. Zeitschr. **8**, p. 603, 1907; M. PLANCK, ibid. **8**, p. 906, 1907.

[2]) H. DU BOIS, Zeitschr. für Instr. Kunde **19** p. 360, 1899.

[3]) A. CORNU, Compt. Rend. **125** p. 555, 1897. — W. KÖNIG, Wied. Ann. **62** p. 242, 1897. Het leek ons beter deze inrichting niet eerst bij de oculairloupe op te stellen wegens de polarisatie die ook bij onze tralie zeer merkbaar was; verg. P. ZEEMAN, Versl. nat. afd. **16** p. 286, 1907.

tralie werd het plaatje bij het brandpunt eener derde lens opgesteld ten einde door betrekkelijk kleine verplaatsingen dat astigmatisme voor verschillende deelen van het spectrum te kunnen opheffen. De scheidingslijn in het spectrum kon hierbij voldoende scherp worden ingesteld, hetgeen KÖNIG niet gelukt was. Hierop volgde een nicol, en daarop de hoofdspleet. Zooals men weet verschijnt een normaal duplet hierbij in het spectrum als een geknakte lijn, bijv. aldus ⌊⌋; terwijl dan bij 90° draaing van het nicol om de stralenrichting òf wel van het kwartgolfplaatje om zijn *verticale* middellijn ⌈⌉ ontstaat.

§ 13. De preparaten werden in den regel in een koperen plaatje gevat en aldus tusschen de poolvlakjes geklemd; de boringen moeten daarbij liefst luchtdicht sluiten ten einde koude luchtstroomingen en ijzelvorming te verhinderen. Het peil der vloeibare lucht kan dan boven de openingen staan zoodat het preparaat geheel is ondergedompeld. De in de boringen stagneerende lucht wordt door het voorloopige afkoelen met koolzuursneeuw reeds afdoende gedroogd. Met dunne preparaten bereikten wij zoodoende een veld van 40 kilogauss, hetgeen ook een beslist vereischte is voor de behoorlijke splitsing der hierna te beschrijven quadrupletten enz. Met zonlicht en een hoofdspleetwijdte van 0.05 mm. was er ook in het violet nog een overmaat van licht; echter bleken de FRAUNHOFER'sche lijnen in vele gevallen zoo hinderlijk dat het veel zwakkere booglicht moest worden gebruikt. Het spectrum werd afgelezen met behulp eener loupe en hiervoor verdeelde glazen schaal, wier partes 0.225 mm. bedroegen, juist overeenkomende met 0,1 $\mu\mu$ in het spectrum der eerste orde. De mede gebruikte autocollimator is intusschen beschreven (verg. de voorafgaande mededeeling).

Alle hieronder te beschrijven proeven geschiedden in een longitudinaal veld, m. a. w. *magneetaxialen* stralengang; het omzetten van den zwaren electromagneet vereischt vele nieuwe instellingen, zoodat wij de waarnemingen bij equatorialen stralengang later afzonderlijk hopen te doen.

§ 14. Derde reeks. Van het vrij groote aantal gekleurde verbindingen van trivalent titanium en vanadium onderzochten wij er enkele, zonder echter tot nu toe iets vermeldenswaardigs te vinden. De selectieve eigenschappen bereiken in deze reeks bij het chromium hun hoogtepunt; wij beperken ons dus tot een nader onderzoek van enkele reeds besproken chroomverbindingen.

Chroomaluin.

Uit de bekende regulaire kristallen werden plaatjes van omstreeks 2 tot 3 m.m. dikte geslepen. Bij 18° ziet men in het rood een vrij sterken band 669,8—671,6; bij —193° wordt deze aanmerkelijk smaller, t. w. 668,6—669,4, waarbij het midden zich 1.7 $\mu\mu$ naar het violet verplaatst; verder verschijnt een tweede vrij sterke lijn 670,2; trouwens tusschen 619 en 716 zijn 21 zwakkere en sterkere banden en lijnen zichtbaar.

In een veld van 34 kilogauss waren de beide hoofdlijnen geknakt; de horizontale afstand der overeenkomstige randen van hare bovenste en onderste helft, in 't vervolg kortheidshalve de *knak* genoemd, bedroeg omstreeks 0,10 $\mu\mu$; de zin was omgekeerd [1]). Band 668.6–669.4 vertoont aan de roode zijde één, naar het violet twee smalle fijne satellieten; in het veld verdween eerstgenoemde; de beide laatste werden zeer vaag en schenen, voor zooverre nog zichtbaar, aan den knak in meerdere of mindere mate deel te nemen.

Robijn.

§ 15. Bij het in de vorige mededeeling vermelde kwadratische plaatje (7 $\times$ 7 $\times$ 3 m.m.) bevatte een lange ribbe de optische as. Uit denzelfden robijnkegel werd thans een klein kwadratisch prisma (1,5 $\times$ 1,5 $\times$ 4 m.m.) geslepen, waarbij de as evenwijdig met een korte ribbe liep. Bij de geringe dikte van 1,5 m.m. verkrijgt men ook met traliedispersie reeds voldoende absorptie. Men heeft de gevallen te onderscheiden dat de optische as || of wel $\perp$ t. o. der veldrichting staat.

I. Optische as || veldrichting:

A. Bandenpaar in 't blauw bij —193°. Behalve de beide reeds beschreven banden in 't rood vallen onder de overige 8 een paar in 't blauw op, die wij kortheidshalve B_1 en B_2 noemen. De ligging is bij —193°: $B_2 = 474{,}2—474{,}9$ en $B_1 = 476{,}1—476{,}5$ (bij 18° liggen deze 474,9—475,7 en 476,5—477,1 dus meer naar het rood). De afstand der middenlijnen, in het traliespectrum gemeten, bedroeg 1,63 $\mu\mu$. In een veld van 36 kgs (= kilogauss) bedroeg de knak voor B_1 0,04 $\mu\mu$ en voor B_2 0.055 $\mu\mu$, waarbij de zin omgekeerd was; eene assymetrie in de mate van geknaktheid der banden naar beide zijden — t. o. van den veldvrijen stand der banden — scheen wel te bestaan naar kon hier niet met voldoende zekerheid worden gemeten. Bij een temperatuur, welke die der vloeibare lucht aan-

[1]) En wel omgekeerd met betrekking tot dien, welken men tot nu toe bij alle dampen vond; een dergelijke omgekeerde zin werd ook in de meeste gevallen door J. Becquerel waargenomen.

merkelijk overtreft, zijn de blauwe banden in het tralie-spectrum niet meer te bepalen.

§ 16 *B. Bandenpaar in 't rood*; wij noemen deze R_1 en R_2.

1) Bij $-193°$ is $R_2 = 691{,}7$ en $R_1 = 693{,}1$, de in het tralie-spectrum gemeten afstand 1,38 $\mu\,\mu$.

Lijn R_1: Veldvrije breedte 0,065 $\mu\mu$. Bij 23 kgs. begint men een *triplet* te zien, hetgeen bij 18 kilogauss nog niet goed zichtbaar werd; linkerlijn (roode zijde) niet scherp gescheiden van middelste lijn, te zamen vormende zware lijn, 0,10 $\mu\mu$ breed; rechterlijn (violette zijde) van middelste lijn gesplitst op afstand 0,09 $\mu\mu$. Bij 26,5 kgs. splitst het triplet zich verder, waarbij de afstand aan weerszijden 0,11 $\mu\mu$ wordt.

Bij 36 kgs. is de linkerlijn sterk, de middelste lijn wellicht nog sterker, niet scherp gescheiden, afstand 0,165 $\mu\mu$; de rechterlijn zwak, 0,14 $\mu\mu$ van middelste lijn verwijderd.

Lijn R_2: Veldvrije breedte 0,055 $\mu\mu$. Bij 23 kgs. triplet; linkerlijn niet gescheiden van middelste lijn, te zamen vormende zware lijn 0,075 $\mu\mu$ breed; rechterlijn van middelste lijn gesplitst op afstand 0,07 $\mu\mu$. Bij 26,5 kgs. splitst het triplet zich verder, afstand 0,08 en 0,09 respectievelijk.

Bij 36 kgr. is de linkerlijn vrij sterk, nog eenigszins met de middelste lijn samenhangend, op een afstand 0,115 $\mu\mu$; de rechterlijn zwak, duidelijker van middelste lijn gescheiden op een afstand 0,15 $\mu\mu$.

In al deze gevallen waren de laterale componenten circulair gepolariseerd in omgekeerden zin; daar de middelste lijn bij geen der beide standen van het kwartgolfplaatje verdween, kon zij niet circulair gepolariseerd zijn; een lineaire polarisatie kon reeds om redenen van axiale veldsymmetrie niet plaats hebben. Het is hier nog niet de plaats de verklaring van dit eigenaardige verschijnsel na te gaan; wellicht berust het slechts op onvoldoende oplossing der binnenste lijnen van een quadruplet. [1]) Een magnetische verplaatsing der middelste lijn t. o. van haren veldvrijen stand [2]) kon niet worden geconstateerd; in geen geval bedroeg zij meer dan 1 à 2 hondersten $\mu\mu$.

Er is in dit geval geen reden de evenredigheid der splitsing met de veldintensiteit te betwijfelen (verg. de tabel in § 17).

2) Bij $-79°$ waren de banden reeds aanmerkelijk verbreed en verwaterd zoodat het dikke robijnplaatje moest worden onderzocht, waarin het licht 7 mm. in de asrichting doorliep.

---

[1]) Verg. H. Kayser, Handb. d. Spectroscopie, **2** p. 655, Fig. 52. — Iets dergelijks werd ook somtijds waargenomen bij het sextuplet van D_2.

[2]) verg. P. Zeeman, Versl. Afd. Nat. **16** p. 618. 1908.

Verwarming van —193° tot — 79° verplaatste R_1 0,62 $\mu\mu$, R_2 0,58 $\mu\mu$ naar het rood, zoodat nu de afstand $R_1 - R_2 = 1{,}42$ $\mu\mu$ werd. In een veld van 18,5 kgs. vertoonde R_1 een linkschen knak van 0,12, een rechtschen van 0,065 $\mu\mu$, terwijl R_2 links 0,04, rechts 0,07 $\mu\mu$ afweek.

3) Bij + 18° en een veld van 18,5 kgs. vertoonde R_1 een knak van 0,07 $\mu\mu$ naar beide zijden, R_2 een van 0,055 $\mu\mu$. Verwarming van — 193° tot + 18° verplaatste R_1 0,76 $\mu\mu$, R_2 0,69 $\mu\mu$ naar het rood [1]), zoodat hun afstand nu 1,45 $\mu\mu$ bedroeg.

4) Bij + 200° was het verschijnsel vrij vaag. Naar schatting ondervonden beide lijnen bij 18,5 kgs. een symmetrischen knak van 0,04 $\mu\mu$. Verwarming van 18° tot 200° verplaatste R_1 en R_2 1,1 $\mu\mu$ naar het rood, de afstand bleef dus dezelfde. Voorloopig hebben wij den robijn niet hooger verhit.

Uit het vrij ingewikkelde verloop van het verschijnsel schijnt over 't algemeen echter wel te kunnen worden afgeleid dat de invloed der magnetisatie bij toeneming der temperatuur eenigszins vermindert. Daarentegen blijkt de afstand tusschen R_1 en R_2 ietwat grooter te worden.

§ 17. Wij gaan nu over tot het tweede geval.

II Optische as ⊥ veldrichting, waarbij te onderscheiden valt tusschen het gewone en buitengewone spectrum. Hierbij kwam enkel de nicol te pas, niet meer het dubbel kwartgolfplaatje, daar er geen ciculaire polarisatie optreedt.

1. *Gewoon spectrum*; polarisatievlak horizontaal.

A. Bandenpaar in 't blauw bij — 193°. De veldvrije breedte bedroeg voor B_1 0,17, voor B_2 0,14 $\mu\mu$, de afstand hunner middens 1,68 $\mu\mu$; de lijnen schenen ongeveer gelijk. In een veld van 36 kgs. groeide de breedte tot 0,26 $\mu\mu$ voor beide lijnen; de halve verbreeding bedroeg dus voor B_1 0,045, voor B_2 0,06 $\mu\mu$.

B Bandenpaar in 't rood bij — 193°. Men heeft (verg. § 7) $R_2 = 691{,}8$ en $R_1 = 693{,}2$; De veldvrije breedte bedroeg voor R_1 0,08, voor R_2 0,07 $\mu\mu$, hun afstand in het traliespectrum 1,41 $\mu\mu$.

Bij een veld van 20 kgs. werd R_1 breeder, waarbij zij in 't midden genuanceerd scheen, R_2 vertoonde een duplet op een afstand 0,3 $\mu\mu$; het aspect was dus ongeveer hetzelfde als hetgeen in § 7 voorloopig geschetst werd [2]).

---

[1]) Van het weergeven eener photographie hebben wij afgezien, daar de reproductie in onze vorige mededeeling in duidelijkheid verre ten achter staat bij onze afdrukken. Trouwens, waar meting mogelijk blijkt, is afbeelding wellicht overbodig.

[2]) Zooals in § 7 werd opgemerkt dragen de numerieke bepalingen aldaar een geheel voorloopig karakter; door een drukfout werd de schatting der toen gebruikte veldintensiteit 30 kilogauss; dit moet zijn 20 kgs. — De thans meegedeelde gegevens kunnen reeds op grooter betrouwbaarheid bogen; zij werden telkens uit 2 tot 5 aflezingen afgeleid.

Bij een veld van 23 kgs. gaf R_1 een *quadruplet*, waarvan de 4 componenten ongeveer gelijke intensiteit hadden en de afstanden naar het violet toe iets schenen af te nemen. De tusschenruimten schenen nu even helder als de spectrale achtergrond; enkel tusschen het aan de violette zijde liggende paar leek de tusschenruimte iets donkerder; de afstand der buitenste lijnen bedroeg 0,28 $\mu\mu$, terwijl de onderlinge afstanden weinig van het derde deel hiervan verschillen. R_2 vertoonde een quadruplet, waarvan de binnenste twee lijnen veel zwakker waren dan de buitenste, en symmetrisch verdeeld (bij onscherpe instelling der loupe meende men derhalve allicht een duplet te zien); de afstand der buitenste lijnen was hier 0,285 $\mu\mu$.

Bij 30 kgs. was het verschijnsel geheel gelijk, met afstanden 0,39 resp. 0,38 $\mu\mu$.

Bij 36 kgs. vertoont R_1 een quadruplet als boven, verder gesplitst. Van rood naar violet bedroegen

de afstanden der middens	0,15	0,145	0,14,	totaal	0,435 $\mu\mu$
de breedten der lijnen	0,07	0,025	0,035	0,065	$\mu\mu$

De afstand der uiterste grenzen bedroeg 0,50 $\mu\mu$; het midden tusschen deze bleek 0,04 $\mu\mu$ naar violet verplaatst t.o.v. den veldvrijen stand.

Voor R_2 daarentegen verkregen wij waarden voor

de afstanden der middens	0,15	0,20	0,085,	totaal	0,435 $\mu\mu$
de breedten der lijnen	0,055 zeer smal		0,045		$\mu\mu$.

De afstand der uiterste grenzen bedroeg 0,47 $\mu\mu$; de verplaatsing van het midden naar violet t.o.v. den veldvrijen stand was geringer dan bij R_1 en kon hier niet met zekerheid worden gemeten.

Noemen wij δR_1 en δR_2 de totale afstanden tusschen de buitenste quadrupletlijnen, en $\mathfrak{H}$ de veldintensiteit, dan hebben wij

$\mathfrak{H}$ (*Kilogauss*)	δR_1 ($\mu\mu$)	$\frac{1000\,\delta R_2}{\mathfrak{H}}$	δR_2 ($\mu\mu$)	$\frac{1000\,\delta R_2}{\mathfrak{H}}$
23	0,28	12,2	0,285	12,4
30	0,39	13,0	0.38	12,6
36	0,435	12,1	0,435	12,1

De vrij goede overeenstemming der verhoudingen bewijst de evenredigheid der splitsing met de veldintensiteit, althans bij eerste benadering; o. i. is het onwaarschijnlijk dat zwakkere velden afwijkingen hiervan zouden vertoonen.

§ 18. Vrij analoog gedragen zich de lijnen in het

2. *Buitengewoon Spectrum*; polarisatievlak verticaal.

A. Bandenpaar in 't blauw bij —193°. De veldvrije breedte bedroeg voor B_1 0,10, voor B_2 0,15 $\mu\mu$, de afstand der middens 1,70 $\mu\mu$; de lijnen schijnen iets verplaatst t. o. v. het gewone spectrum en wel B_1 0,025 $\mu\mu$ naar rood en B_2 0,007 naar violet; daarbij was B_2 vager en bleeker dan B_1.

In een veld van 36 kgs. werden de breedten 0,18 resp. 0,22 $\mu\mu$; de halve verbreeding bedroeg dus voor B_1 0,04, voor B_2 eveneens.

B. Bandenpaar in 't rood bij —193°. De veldvrije breedte bedroeg voor R_1 0,07, voor R_2 0,06 $\mu\mu$, hun afstand 1,41 $\mu\mu$.

Zij schijnen beiden 0,02 $\mu\mu$ naar het violet verplaatst t. o. v. hunnen stand in het gewone spectrum; R_1 is zwakker dan R_2.

Bij 36 kgs. vertoont R_1 een quadruplet van 4 ongeveer even sterke lijnen, op schijnbaar gelijke afstanden, echter te zwak om te meten; afstand der uiterste grenzen 0,49 $\mu\mu$; het midden scheen 0,02 $\mu\mu$ naar violet verplaatst t. o. v. den veldvrijen stand.

Voor R_2 waren van de 4 lijnen de binnenste waarschijnlijk iets sterker dan de buitenste; de afstandsbepaling was onzeker: afstand der uiterste grenzen ongeveer 0,4 $\mu\mu$.

§ 19. Vijfde reeks. Hiervan onderzochten wij thans nog enkele sulfaten van in 1899 gebruikt materiaal, die als octohydraten monoklien kristalliseeren; en wel in plaatjes, die beide optische assen bevatten. Uiteraard treedt hierbij geene circulaire polarisatie op; in dit opzicht verdienen éénassige en nog meer kubische kristallen, zooals bijv. chroomaluin, de voorkeur.

Neodymsulfaat [$Nd_2(So_4)_3 . 8 H_2O$] Rozenrood plaatje 0,8 mm. dik bij — 193°: Twee smalle banden in 't geel en drie in 't groen vertoonden in een veld van 40 kgs verbreedingen van 0,05 tot 0,08 $\mu\mu$; twee der laatstgenoemde werden in 't midden helderder en begonnen zoo op dupletten te gelijken.

Samariumsulfaat [$Sm_2(So_4)_3 . 8 H_2O$]. Lichtgeel doorschijnend kristalplaatje, 2,8 mm dik bij —193°: Twee smalle banden in 't geelgroen vertoonden in een veld van 28 kgs eene verbreeding, waarvan het bedrag met een beter doorzichtig preparaat moet worden bepaald.

Scheikunde. — De Heer FRANCHIMONT biedt eene mededeeling aan van Dr. F. M. JAEGER: *„Over de Tri-para-Halogeen-Substitutieproducten van het Triphenylmethaan en van het Triphenylcarbinol."*

(Mede aangeboden door den Heer P. VAN ROMBURGH).

§ 1. Vóór eenige jaren werden door mij [1]) de kristallen onderzocht van het *Tri-p-Chloor-Triphenylmethaan*, en wel van verschillende preparaten, welke door Dr. P. J. MONTAGNE op twee wijzen verkregen waren, nl. uit *p*-leukaniline door diazoteeren en daarop volgende invoering der drie chloor-atomen, en uit tetrachloor-chloorbenzopinakoline door intramolekulaire omlegging.

Van het merkwaardig optisch gedrag der verbinding in konvergent gepolariseerd licht heb ik destijds eene volledige beschrijving gegeven, en getracht deze door eene gekleurde figuur te verduidelijken.

Wenschend dit onderzoek ook tot de overige halogeenderivaten uit te strekken, heb ik vooreerst uit *p*-leukaniline volgens de door O. FISCHER en W. HESS aangegeven methode [2]) het tribroomderivaat bereid. Later kreeg ik van prof. FISCHER van elk der drie halogeenderivaten eene kleine hoeveelheid, welke mij bovendien in staat stelde, de drie korrespondeerende trihalogeen-carbinolen te bereiden, door oxydatie met chroomzuuranhydride in azijnzure oplossing, zoodat ook dèze drie lichamen in dit onderzoek konden worden begrepen. Ik wil niet nalaten, den genoemden geleerde ook hièr nog eens mijn vriendelijken dank voor zijne welwillende hulp uit te spreken.

Van het *Tri-p-Broom-Triphenylmethaan* [3]) is door mij vóór korten tijd eene beschrijving gegeven in het Zeits. f. Kryst. u. s. w. Bd. **44**, p. 57—58. (1907). De habitus der kristallen is geheel analoog aan dien der chloor-verbinding; zij zijn wat meer gedrongen van vorm, en gewoonlijk veel grooter, maar tegelijk door eene kromming der vlakken veel minder nauwkeurig meetbaar. Nochtans is de volkomen isomorfie met de chloorverbinding duidelijk aan te toonen; natuurlijk zijn de verschillen wèl wat grooter dan bij isomorfe substitutieprodukten, bij welke slechts één atoom door een ander vervangen is, en niet drie tegelijk, zooals hier 't geval is.

§ 2. In het volgende worden vooreerst de kristalvormen der diverse substitutie-produkten beschreven.

---

[1]) Receuil d. Trav. d. Chim. d. Pays-Bas, T, **24**. 124, 131. (1905).

[2]) O. FISCHER und W. HESS, Berl. Ber. **38**. 336. (1905).

[3]) F. M. JAEGER, Zeits. f. Kryst. und Miner. Bd. **44**. 57. (1907).

Tri-p-Jood-Triphenylmethaan.

$(C_6H_4J)_3:CH$; smeltpunt: 132° C.

Deze verbinding werd mij door prof. O. FISCHER te *Erlangen* welwillend tot onderzoek afgestaan.

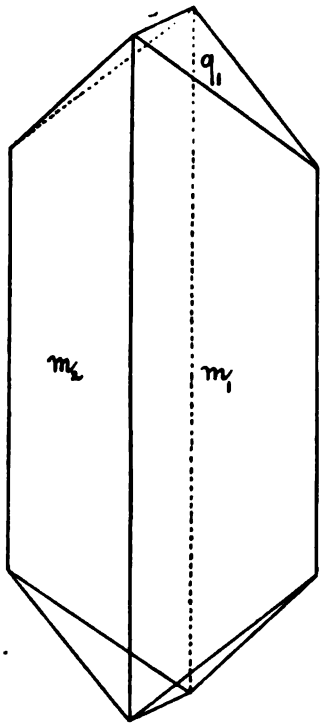


Fig. 1.
Tri-p-Jood-Triphenylmethaan.

Uit ligroïne kristalliseert zij in kleine, sterk lichtbrekende, lichtgele naaldjes, welke goed meetbaar zijn. Uit benzol daarentegen kristalliseert eene *dubbelverbinding* van Trijoodtriphenylmethaan + Benzol, welke in groote, glasheldere prisma's aanschiet. De chloor-, en broomverbinding echter vereenigen zich *niet* met benzol; uit de benzolische oplossingen verkrijgt men steeds de vroeger beschreven kristallen der zuivere verbindingen terug,

A. Tri-p-Joodtriphenylmethaan uit ligroïne.

De symmetrie is *rhombisch-bipyramidaal*; de assenverhouding wordt berekend op:

$$a : b : c = 0{,}5765 : 1 : 0{,}8798.$$

Blijkbaar is de stof direkt-isomorf met de *Cl*-, en met de *Br*-verbinding, ofschoon ook hier de verschillen weer aanzienlijker zijn dan gewoonlijk, wegens het vervangen van *drie* isomorphogene atomen tegelijkertijd.

Waargenomen vormen: $m = \{110\}$, goed ontwikkeld en glanzend; $a = \{100\}$, zeer smal en mat; $q = \{011\}$, goede reflexen leverend; $p = \{130\}$, zeer smal en lichtzwak.

Hoekwaarden:	Gemeten:	Berekend:
$m : m = (110) : (1\bar{1}0) =$	*59° 55½'	—
$m : q = (110) : (011) =$	70° 30½'	70° 44½'
$q : q = (011) : (0\bar{1}1) =$	*82° 41'	—
$m : q = (110) : (130) =$	30° 15'	30° 30'

Splijtbaar duidelijk volgens m.

Het optisch assenvlak voor *alle* stralen is {001}; de *a*-as is eerste bissectrix, met positief karakter. Middelsterke, rhombische dispersie, met: $\varrho > v$; de schijnbare assenhoek in cederolie (1,54)is cirka 68°.

Het specifiek gewicht der kristallen is 2,141 bij 15° C; 't aequiv. volume: 290,64.

Topische parameters: $\chi : \psi : \omega = 1{,}7883 : 8{,}3061 : 7{,}3077$.

B. Tri-p-Joodtriphenylmethaan + 1 Benzol.

Groote, zeer glanzende en doorzichtige kristallen.

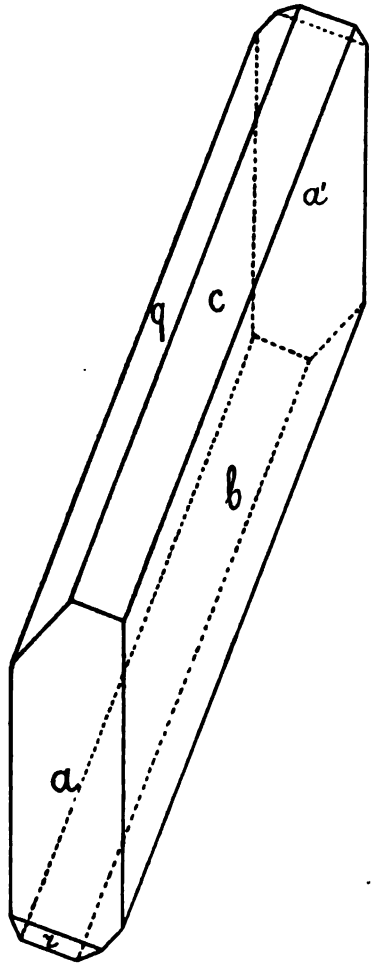


Fig. 2.
Tri-p-Jood-Triphenylmetaan + 1 Benzol.

Zij blijven, uit de moederloog genomen, tamelijk lang helder, doch verliezen na eenige uren, onder behoud van hunnen vorm al hun benzol; soms echter slechts voor een deel. Het is niet onwaarschijnlijk dat de hoeveelheid benzol wisselend is met temperatuur en druk.

De symmetrie is *triklien-pinakoïdaal*. Assenverhouding:

$a : b : c = 0{,}5719 : 1 : 1{,}4298.$

$A = 101° 12'$ $\quad \alpha = 109° 8'$

$B = 123° 15'$ $\quad \beta = 126° 21'$

$C = 98° 5'$ $\quad \gamma = 107° 32'$

Waargenomen vormen: $b = \{010\}$, sterk vóórheerschend en glanzend; $c = \{001\}$ en $a = \{100\}$, goed ontwikkeld en scherpe reflexen leverend; $q = \{0\bar{1}1\}$, eveneens vrij groot uitgegroeid; $r = \{\bar{1}02\}$, smal doch goed meetbaar.

De habitus is afgeplat naar {010}, met strekking volgens de *a*-as. Volkomen splijtbaar parallel {010}.

Hoekwaarden:	Gemeten:	Berekend:
$a : b = (100) : (010)$	$= *98° 5'$	—
$c : b = (001) : (010)$	$= *78° 48'$	—
$c : a = (001) : (100)$	$= *56° 45'$	—
$a : r = (100) : (10\bar{2})$	$= *50° 10'$	—
$b : q = (010) : (01\bar{1})$	$= *44° 4'$	—
$a : q = (100) : (01\bar{1})$	$= 106° 8^1/_2'$	

De verhouding der assen *a* en *b* bij beide derivaten is volkomer analoog.

In overeenstemming met de aanname van een wisselend benzolgehalte, varieeren ook de hoekwaarden aan de verschillende kristalindividuën vrij aanzienlijk.

§ 3. Wanneer wij de drie-para-gesubstitueerde, trihalogeen-verbindingen van het triphenylmethaan met elkaar vergelijken, dan is er aan de analoge molekulaire struktuur der derivaten in den vasten toestand niet te twijfelen. Slechts in *optische* orienteering wijkt de *chloor*verbinding duidelijk af:

Tri-p-Chloor-Triphenylmethaan:	*Tri-p-Br.-Triphenylmeth.*:	*Tri-p-Jood-Triphenylmeth.*
Rhombisch-bipyramidaal.	Rhombisch-bipyramidaal.	Rhombisch-bipyramidaal.
Vormen:	Vormen:	Vormen:
{110}; {011}; {010}; {130}; {012}; {102}	{110}; {011}; {010}; {102}	{110}; {011}; {130}
$a : b : c = 0{,}5904 : 1 : 0{,}9261.$	$a : b : c = 0{,}5896 : 1 : 0{,}9003.$	$a : b : c = 0{,}5765 : 1 : 0{,}8798.$
Splijtbaar naar {110}.	Splijtbaar naar {110}.	Waarschijnlijk splijtbaar naar {110}.
Naar de *c*-as dikprismatisch.	Naar de *c*-as kortprismat.	Naar de *c*-as langgestrekte prisma's.
$(110) : (1\bar{1}0) = 61° 7'$	$(110) : (1\bar{1}0) = 61° 3'$	$(110) : (1\bar{1}0) = 59° 55^1/_2'$
$(110) : (011) = 69° 47^1/_2'$	$(110) : (011) = 70° 8'$	$(110) : (011) = 70° 44^1/_2'$
$(011) : (01\bar{1}) = 85° 36'$	$(011) : (0\bar{1}1) = 83° 59^1/_2'$	$(011) : (0\bar{1}1) = 82° 41'$
Spec. Gew. = 1,435;	Spw. Gew. = 1,752;	Spec. Gew. = 2,141;
Aeq. Volum. 242,16.	Aeq. Volum 274,54.	Aeq. Volume: 290,64.

Hoofdafmetingen der kristalstrukt. $\chi : \psi : \omega = 4{,}5004 : 7{,}6225 : 7{,}0593.$	Hoofdafm. d. kristalstrukt. $\chi : \psi : \omega =$ $= 4{,}7327 : 8{,}0270 : 7{,}2267.$	Hoofdafm. d. kristalstrukt. $\chi : \psi : \omega =$ $4{,}7883 : 8{,}3061 : 7{,}3077.$
Optische orienteering: Voor *violet, blauw* en *groen* is {001} het assenvlak, voor de *oranje* en *roode* stralen echter {010}. De 1ste middellijn voor alle kleuren is de *a*-as, van — karakter. De assenhoek voor violet is bijna = 0°.	Optische orienteering: Voor *alle* kleuren is {001} 't assenvlak. De 1ste bissectrix is de *a*-as, van + karakter. Zwakke dispersie : $\varrho > v$. In cederolie is de schijnbare assenhoek cirka 50°.	Optische orienteering: Voor *alle* kleuren is {001} het assenvlak, met als 1ste middellijn de *a*-as, van + karakter. Middelste dispersie : $\varrho > v$. Schijnb. assenhoek in cederolie is cirka 70°.

Hierbij valt verder op te merken, dat dit *Tri-p-Chloortriphenylmethaan* bovendien eene zeer interessante optische variabiliteit vertoont, zooals uit de onderstaande waarnemingen duidelijk te erkennen is:

a. Kristallen van *Tri-p-Chloortriphenylmethaan* van O. FISCHER; de verbinding is uit petroleum-aether (kpt. 40°—60°) omgekristalliseerd.

Voor *alle* kleuren was 't optisch assenvlak: {010}. Zeer sterke dispersie: $\varrho > v$; de 1e middellijn is de *a*-as, en bezit negatief karakter. De schijnbare assenhoek in olijfolie is zeer klein, en bedraagt ongeveer 5°.

Aan andere kristallen, vooral aan de dikkere prisma's vond ik: Voor *violette* en *blauwe* stralen is 't assenvlak {001}, voor *alle* andere kleuren {010}; 1e middellijn is de *a*-as, maar thans van + karakter; de zeer sterke dispersie was: $\varrho >$ groen.

Weer andere kristalletjes vertoonden alleen 't *violet* in {001}, en 't blauw, groen, rood, geel, enz. in 't vlak {010}.

b. Kristallen van *Tri-p-Chloortriphenylmethaan* van P. J. MONTAGNE, uit de preparaten-verzameling van het Organisch-Chemisch Laboratorium te *Leiden. Zij waren optisch volkomen identiek met de vroeger door mij onderzochte kristallen.* [1]) Enkele kristallen waren porceleinwit geworden, onder behoud van hun vorm. Dit feit wordt reeds door MONTAGNE [2]) vermeld, die tevens opmerkt, dat het smeltpunt daarbij praktisch onveranderd blijft.

c. Op mijne aanvrage zond Dr. MONTAGNE mij eenig poeder van

[1]) Zie Receuil d. Trav. d. Chim. d. Pays-Bas, **24**. 124, 131. (1905).

[2]). loco cit. p. 122.

Tri-p-Chloor-Triphenylmethaan uit tetrachloorbenzopinakoline, dat na uit petroleumaether omgekristalliseerd te zijn, de volgende eigenschappen openbaarde :

Voor *alle* kleuren is 't assenvlak thans {001}. Zeer sterke dispersie: $\varrho > v$; de *a*-as is 1e middellijn van + karakter; de schijnbare assenhoek in olijfolie is veel grooter dan in 't eerste geval, en bedraagt circa 10°.

Omkristalliseeren uit petroleum-aether verandert de eigenschappen eener bepaalde kristalsoort niet; alle preparaten echter hebben hetzelfde smeltpunt en volkomen identieken kristalvorm.

Wij staan hier dus voor 't feit, dat de verbinding: $CH(C_6H_4Cl)_3$, Smpt. 92° C., onder verschillende omstandigheden in vormen voorkomt, die kristallografisch en chemisch *niet* te onderscheiden zijn, *doch wier optische oriënteering zeer verschillend is.* Soms zijn de kristallen +, dàn weer — dubbelbrekend; het eene kristal vertoont eene kruising der assenvlakken voor diverse kleuren, het andere voor slechts éene enkele kleur; weer andere voor geen enkele kleur, waarbij dàn eens {001}, dàn eens {010} het assenvlak is, terwijl de dispersie soms: $\varrho > v$, een andermaal $\varrho < v$ is.

Natuurlijk is de mogelijkheid niet uitgesloten, dat uiterst geringe sporen van vreemde stoffen deze veranderlijkheid der zoo gevoelige optische oriënteering te weeg brengen. Vooral is 't door de hier volgende onderzoeking van het *Tri-p-Chloorcarbinol*, en de daarbij aan 't licht gekomene volkomen isomorfotrope relatie tot 't derivaat in kwestie, niet onwaarschijnlijk, dat eene geringe bijmenging van dit oxydatie-product de oorzaak is van het verschijnsel.

Hiermee in overeenstemming zou ook het mij door den Heer MONTAGNE privatim medegedeelde feit zijn, dat troebeling der doorzichtige kristallen *nooit* optreedt bij de dunne, *snel* gevormde naalden, maar altijd bij de door *langzame* kristallisatie ontstane dikke en korte kristallen van *Tri-p-Chloortriphenylmethaan.*

Maar toch zou 't óók wel denkbaar zijn, dat zulke groote molekulen als die van 't *Tri-p-Chloor-Triphenylmethaan*, onder verschillende omstandigheden kleine afwijkingen van hunne gemiddelde atomistische konfiguratie kunnen ondergaan, welke nòch chemisch, nòch kristallografisch aantoonbaar zijn, maar zich optisch nog wèl kunnen openbaren.

Er zijn in de laatste jaren talrijke onderzoekingen gedaan, welke tot het besluit moeten voeren, dat vele eigenschappen der gekristalliseerde materie, zoo b.v. de aangroeiings-, en kohesie-verschijnselen, aan de regelmatige molekulaire aggregatie moeten worden toegeschreven, terwijl andere, b.v. de *optische* eigenschappen, althans voor

een groot deel, hun oorzaak in de eigenschappen der molekulen zèlve zouden hebben. O.a. leiden daartoe verschillende waarnemingen, welke bij zoogenaamde vloeiende kristallen en dubbelbrekende vloeistoffen gedaan zijn, alsmede enkele door WALLÉRANT, e.a. gedane proeven over 't optisch gedrag van gedeformeerde vaste kristallen. En dan kunnen verschijnselen als de hier bij het *Tri-p-Chloor-Triphenylmethaan* waargenomene, de mogelijkheid doen inzien van het binnen enge grenzen veranderlijk-zijn van den ruimtelijken bouw der chemische molekulen. Iets van analogen aard meen ik voor eenigen tijd gevonden te hebben bij een mij door prof. VAN ROMBURGH afgestaan *Dibromide van* 1-3-5 *Hexatrieen.* [1]) Ondanks identieken kristalvorm vertoonde 't preparaat, bereid door additie van broom aan de koolwaterstof, kleine optische verschillen met dat, 't welk uit divinylglycol door middel van PBr_3 was bereid.

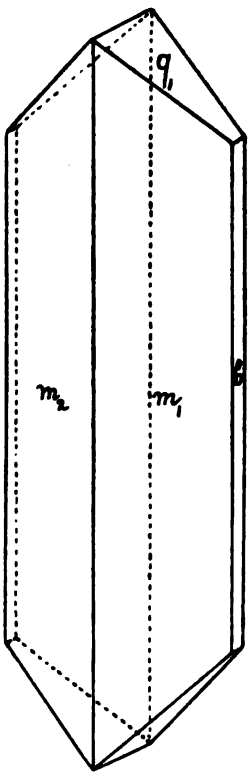


Fig. 3.
Tri p-Chloor-Triphenyl-carbinol.

En ofschoon ik mij thans nog niet aan eene beslissing in den eenen of anderen zin wil wagen, — zoo meen ik toch dat de zaak belangrijk genoeg is, om er naar aanleiding van de hier beschreven verschijnselen, de aandacht der chemici eens op te vestigen.

§ 4. Tri-p-Chloor-Triphenylcarbinol.

$(C_6H_4Cl)_3$: C-OH : smeltpunt :9 8° C.

Uit aethylalkohol in kleurlooze, sterk lichtbrekende, lange naalden; evenzoo uit aether + ligroïne. De kristallen bezitten sterken glans en zijn goed gebouwd.

Rhombisch-bipyramidaal.

$$a : b : c = 0{,}6009 : 1 : 0{,}9781.$$

Waargenomen vormen; $m = \{110\}$, levert ideale reflexen; $q = \{011\}$, eveneens onberispelijke beelden gevend; $b = \{010\}$ en $p = \{210\}$, smal, doch goed meetbaar. De habitus der kristallen is langgestrekt naar de *c*-as. Kristallen uit aethylalkohol zijn kortprismatisch, en vertoonen nog de vormen $o = \{133\}$ en $s = \{102\}$, meestal slecht spiegelend.

[1]) Zie over dit lichaam o.a. Journ. Chemic. Soc. (1908) Maart-aflevering.

	Gemeten :	Berekend :
$m : q = (110) : (011) =$	*68° 53½'	—
$m : b = (110) : (010) =$	*59° 0'	—
$m : m = (110) : (\bar{1}10) =$	62° 1'	62° 0'
$q : b = (011) : (010) =$	45° 46½'	45° 38'
$q : q = (011) : (0\bar{1}1) =$	88° 36½'	88° 44'
$b : p = (010) : (210) =$	42° 27'	42° 16⅔
$p : m = (210) : (110) =$	16° 47½'	16° 43½.

Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet gevonden.

Het optische assenvlak is {001}, met de *a*-as als eerste middellijn van positief karakter Zwakke dispersie : $\varrho > v$. De schijnbare assenhoek in olijfolie bedraagt circa 55°.

Het specifiek gewicht der kristallen is: 1,423; 't aequiv. volume 255,44.

Topische parameters. $\chi : \psi : \omega = 4{,}5516 : 7{,}5748 : 7{,}4089$.

Het preparaat van O. FISCHER was identiek met het mijne.

Eene vergelijking met het *tri-p-chloortriphenylmethaan* leert, dat de morfotrope relatie's der beide verbindingen van dien aard zijn, dat ze aan *isomorfie* grenzen. Beide verbindingen vormen dan ook mengkristallen met elkaar.

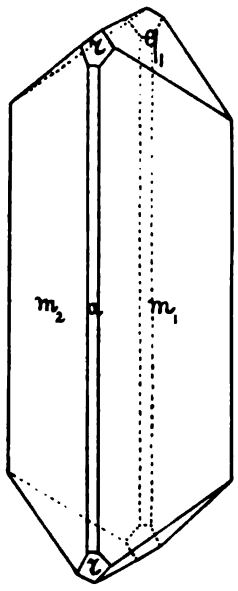


Fig. 4.
Tri-p-Broom-Triphenylcarbinol.

§ 5. Tri-p-Broom-Triphenylcarbinol.

$(C_6H_4Br)_3 : C.OH$; smeltpunt : 133° C.

Uit aethylalcohol in kleine, kleurlooze, glasheldere kristalletjes, met hoogen glans en goeden geometrischen bouw.

Rhombisch-bipyramidaal.

$a : b : c = 0{,}8407 : 1 : 0{,}8081$.

Waargenomen vormen : $m = \{110\}$, vóórheerschend en scherpe reflexen leverend; $a = \{100\}$, smal, doch goed meetbaar; $q = \{011\}$, spiegelt uitstekend, en is goed ontwikkeld; $r = \{101\}$, klein, en wat mat. De kristallen uit alcohol zijn in fig. 4 afgebeeld.

Hoekwaarden :	Gemeten :	Berekend :
$m : a = (110) : (100) =$	*40° 3¼'	—
$m : q = (\bar{1}10) : (0\bar{1}1) =$	*66° 8½'	—
$q : q = (011) : (0\bar{1}1) =$	77° 52'	77° 53'
$m : m = (110) : (1\bar{1}0) =$	80° 7½	80° 7½'
$m : r = (110) : (101) =$	57° 59'	57° 58'
$r : q = (101) : (0\bar{1}1) =$	55° 50½	55° 53½'
$r : r = (101) : (\bar{1}01) =$	87° 45'	87° 44'
$r : a = (101) : (100) =$	46° 7½'	46° 8'

Geen duidelijke splijtbaarheid.

Het optisch assenvlak is {001}; de *b*-as is eerste middellijn van negatief karakter. De schijnbare assenhoek in olijfolie is circa 65°. Niet sterke dispersie : $\rho > v$.

Het specifiek gewicht der kristallen is : 1,847 ; 't aequiv. volume is 269,08.

Topische parameters : $\chi : \psi : \omega = 6{,}1739 : 7{,}3439 : 5{,}9346$.

In tegenstelling van hetgeen bij de beide chloor-derivaten gevonden werd, vertoont het tribroom-carbinol geene duidelijke vormverwantschap met het tribroom-triphenylmethaan [1]). Tevens blijkt de substitutie van *H* door *—OH* hier een invloed op het aequivalentvolume te hebben, welke van tegengestelden aard is als die, welken dezelfde substitutie bij het chloor-derivaat ten gevolge heeft.

§ **6. Tri-p-Jood-Triphenylcarbinol.**

$(C_6 H_4 J)_3 : C—OH$; smeltpunt : 155° *C.*

Uit aethyllalkohol in vrij groote, geelachtige kristallen, welke echter òf geene, òf sterk gekromde eindvlakken bezitten.

In elk geval laat zich de isomorfie met de vorige verbinding duidelijk vaststellen.

Rhombisch-bipyramidaal.

$a : b : c = 0{,}8543 : 1 : 0{,}817$.

Waargenomen vormen : $m = \{110\}$, vóórheerschend en sterk glanzend ; $a = \{100\}$, smal en meestal ontbrekend. doch altijd goed reflecteerend ; $q = \{011\}$, duidelijk ontwikkeld, maar in de meeste gevallen krom en slechts bij benadering meetbaar ; $r = \{101\}$, werd eene enkele maal waargenomen.

	Gemeten :		Berekend :	
$m : m = (110) : (1\bar{1}0) =$	*81°	1′	—	
$q : q = (011) : (0\bar{1}1) =$	*78	29	—	
$a : m = (100) : (110) =$	40°	36½′	40°	30½′
$m : q = (110) : (011) =$	66	3½′	65	44½′
$m : r = (110) : (101) =$	58	10	58	18

Geene duidelijke splijtbaarheid.

Het optisch assenvlak is {001}, met de *b*-as als eerste bissectrix. Bijzonder groote dispersie : $\rho > v$. De schijnbare assenhoek in olijfolie bedraagt cirka 80°.

De verbinding kristalliseert uit benzol, verbonden met oplosmiddel.

B. **Tri-p-Jood-Triphenylcarbinol + Benzol.**

In groote, geelachtige naalden, met sterken glans, doch welke

[1]) Van direkte isomorfie is *geen* sprake. Bij verwisseling van *a*- en *b*-as, kan men $a' : b' : c'$ vinden : 1,189 : 1 : 0,9612; wat (met *dubbele* *a*-as) wel op de waarden, voor het broomderivaat iets lijkt.

meestal geen eindvlakken bezitten. Aan één enkel individu werden echter ook hier van enkele hoeken gemeten. Van verweeren der kristallen was geen spoor te ontdekken.

Triklien-pinakoïdaal.

$a : b : c = 1{,}3991 : 1 : 1{,}6135$

$A = 94° 12'$	$\alpha = 109° 16'$
$B = 123° 10'$	$\beta = 117° 36'$
$C = 70° 4^1/_2'$	$\gamma = 62° 52'$

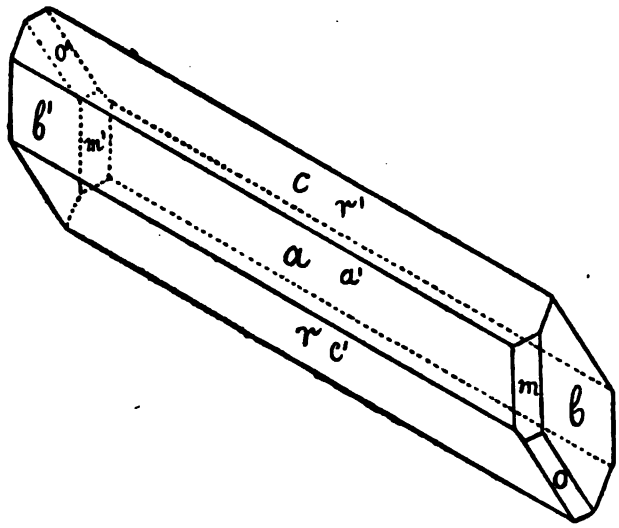


Fig. 5.
Tri-p-Jood-Triphenylcarbinol + 1 Benzol.

Waargenomen vormen: $c = \{001\}$ en $a = \{101\}$, even sterk ontwikkeld; $r = \{\bar{1}01\}$, breeder dan a en c en zeer glanzend; $b = \{010\}$, goed ontwikkeld; $o = \{11\bar{1}\}$ en $m = \{110\}$, ongeveer even groot, en goed spiegelend.

De habitus is langgestrekt naar de b-as. De verhouding $b : c$ is op weinig na het dubbel van die van 't *Tri-p-Joodtriphenylcarbinol* zelf.

$a : c = (100) : (001)$	$=* 56°.50'$	—
$c : r = (001) : (\bar{1}01)$	$=* 72\ 6$	—
$c : b = (001) : (0\bar{1}0)$	$=* 94\ 12$	—
$a : b = (100) : (0\bar{1}0)$	$=* 70\ 4^1/_2$	—
$c : o = (001) : (1\bar{1}\bar{1})$	$=* 80\ 22$	—
$m : o = (\bar{1}\bar{1}0) : (1\bar{1}\bar{1})$	$= 39\ 22$	$39.23^1/_2$
$m : c = (\bar{1}\bar{1}0) : (00\bar{1})$	$= 60\ 2$	59.45

Geen duidelijke splijtbaarheid.

Op $\{\bar{1}01\}$ bedraagt de uitdooving cirka $32^1/_2°$ ten opzichte der b-as.

Spec. Gew. der krist. = 2,079 bij 17° C.; Aeq. Vol. = 344,39.

Topische assen: $\chi : \psi : \omega = 8{,}4070 : 6{,}0090 : 9{,}6950$.

Groningen, Maart 1908.

Geophysica. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN doet eene mededeeling: *„Omtrent de hoogte van den gemiddelden zeestand in het Y voor Amsterdam van* 1700—1860".

In vroeger jaren heeft onze Afdeeling zich bezig gehouden met het onderzoek van de daling van den bodem van Nederland, en heeft vooral Dr. F. J. STAMKART, lid van de Commissie voor dat onderzoek, verschillende belangrijke mededeelingen gedaan omtrent dit onderwerp.

Voor een twintigtal jaren heb ik bij de bewerking van de uitkomsten der nauwkeurigheidswaterpassing enkele berekeningen ter bepaling van die daling verricht, doch deze niet bekend gemaakt. De belangrijke studie over dit onderwerp van den Heer RAMAER, hoofdingenieur-directeur van den waterstaat, gaf mij echter aanleiding mijne vroegere opteekeningen na te zien, en daar ze wellicht eene bijdrage kunnen leveren voor de beantwoording van de vraag, of de bodem van Amsterdam sedert 1700 gedaald is, deel ik ze hier mede als een vervolg op de vroegere verslagen van de Commissie voor de daling van den bodem.

Mijne uitkomsten heb ik hoofdzakelijk afgeleid uit de opteekeningen van de waterstanden in het Y voor Amsterdam, die in de jaren 1700—1860 des daags op elk uur en des nachts elk half uur, in het stadswaterkantoor, op de plaats der tegenwoordige vischmarkt bij de Nieuwe Markt, werden volbracht. Voor een deel komen ze voor in twee mededeelingen van STAMKART (Verslagen en mededeelingen der Kon. Akad. van Wetenschappen Afd. Natuurkunde, 15e deel 1863, p. 59—69 en 17e deel 1865, p. 261—303) en ook in de door STAMKART nagelaten papieren, die bij de Akademie berusten.

Zooals STAMKART in zijne verhandeling Deel XVII p. 273 meedeelt, geschiedden deze waarnemingen op de volgende wijze. Het waterkantoor was boven het water gebouwd en in den houten vloer van een der vertrekjes was een gat, waardoor een peilstok met een daarop geplaatst merk van het A. P. vertikaal naar beneden in het water werd gestoken tot zóóver, dat een aan dien stok bevestigde nok op den houten vloer kwam te rusten. Het punt tot waar de stok bevochtigd werd toonde den stand van het water aan met betrekking tot het op den peilstok aangegeven nulpunt.

Ten einde uit de uitkomsten aangaande den stand van het water in het Y gerechtvaardigde gevolgtrekkingen af te leiden aangaande den stand van de Noordzee op onze kust, is het noodig na te gaan of ook tijdens het beschouwde tijdvak wijzigingen hebben plaats gegrepen

in den toe- en afvoer van het water voor Amsterdam, door veranderingen in de diepte of wijdte van de toegangswegen van het water uit de Noordzee naar het Y. Deze veranderingen zullen hoogst waarschijnlijk een tegengestelden invloed uitoefenen op de vloed- en op de ebstanden, en dus in het verschil van hoog en laag water grooter wijzigingen teweegbrengen dan in den gemiddelden waterstand. De veranderingen in deze verschillen in de achtereenvolgende jaren zijn dus een goed kenmerk van de verandering in de toe- en afvoerwegen.

Uit de opteekeningen in het stadswaterkantoor kan men nu de volgende verschillen tusschen hoog en laag water gedurende 58 jaar afleiden.

TABEL I.

Jaar	Vloed min eb	Jaar	Vloed min eb	Jaar	Vloed min eb	Jaar	Vloed min eb
1700	309 mm.	1715	222 mm.	1805	303 mm.	1847	303 mm.
1701	323 „	1716	299 „	1806	342 „	1848	309 „
1702	331 „	1717	342 „	1807	345 „	1849	318 „
1703	320 „	1725	327 „	1808	331 „	1850	322 „
1704	320 „	1749	318 „	1809	327 „	1851	324 „
1705	312 „	1775	328 „	1810	338 „	1852	329 „
1706	319 „	1796	318 „	1811	330 „	1853	319 „
1707	314 „	1797	313 „	1812	316 „	1854	320 „
1708	308 „	1798	302 „	1813	323 „	1855	287 „
1709	286 „	1799	287 „	1825	341 „	1856	314 „
1710	318 „	1800	288 „	1843	325 „	1857	317 „
1711	325 „	1801	327 „	1844	313 „	1858	295 „
1712	332 „	1802	321 „	1845	310 „	1859	328 „
1713	322 „	1803	284 „	1846	328 „	1860	332 „
1714	332 „	1804	323 „				

Onderstelt men dat in elke der 3 18-jarige tijdvakken dit verschil standvastig is geweest, dan bedraagt het:

in het	1e	tijdvak	1700—1717	319 mm.
„ „	2e	„	1796—1813	318 „
„ „	3e	„	1843—1860	316 „

De middelbare fout van een jaargemiddelde is dan ± 14,8 mm. Onderstelt men dat van 1700—1860 het verschil standvastig is gebleven, dan volgt uit al de 58 jaren het verschil gelijk 318 mm. en de middelb. fout van een jaargemiddelde ± 14,4 mm. Wij zijn dus gerechtigd gedurende het geheele tijdvak 1700—1860 het verschil standvastig aan te nemen en wel gelijk 318 mm. ± 1,9 mm.

Verder leiden we hier uit af, dat er van 1700 tot 1860 geen merkbare verandering in den toe- en afvoer van het water van de Noordzee naar het Y heeft plaats gegrepen, en dus evenmin in de gemiddelde hoogte van de Noordzee met betrekking tot de gemiddelde hoogte van het Y.

Als gemiddelde waterhoogte van het Y, vóór Amsterdam, ten opzichte van het in het waterkantoor aangenomen nulpunt, stads- of Amsterdamsch peil, zullen wij de halve som van de eb- en vloedhoogten aannemen.

Voor dezelfde 58 jaren verkrijgt men daarvoor de volgende waarden.

TABEL II.

Jaar	Gemidd. Zeestand boven A.P.	Jaar	Gemidd. Zeestand boven A.P.	Jaar	Gemidd. Zeestand boven A.P	Jaar	Gemidd. Zeestand boven A.P.
1700	— 172 mm.	1715	— 166 mm.	1805	— 105 mm.	1847	— 79 mm.
1701	„ 169 „	1716	„ 163 „	1806	„ 69 „	1848	„ 102 „
1702	„ 148 „	1717	„ 159 „	1807	„ 69 „	1849	„ 64 „
1703	„ 187 „	1725	„ 154 „	1808	„ 147 „	1850	„ 53 „
1704	„ 146 „	1749	„ 134 „	1809	„ 112 „	1851	„ 66 „
1705	„ 179 „	1775	„ 89 „	1810	„ 90 „	1852	„ 59 „
1706	„ 199 „	1796	„ 84 „	1811	„ 99 „	1853	„ 76 „
1707	„ 160 „	1797	„ 115 „	1812	„ 103 „	1854	„ 12 „
1708	„ 153 „	1798	„ 96 „	1813	„ 114 „	1855	„ 76 „
1709	„ 193 „	1799	„ 136 „	1825	„ 51 „	1856	„ 48 „
1710	„ 167 „	1800	„ 134 „	1843	„ 20 „	1857	„ 101 „
1711	„ 144 „	1801	„ 55 „	1844	„ 15 „	1858	„ 96 „
1712	„ 126 „	1802	„ 123 „	1845	„ 54 „	1859	„ 64 „
1713	„ 149 „	1803	„ 132 „	1846	„ 40 „	1860	„ 75 „
1714	„ 106 „	1804	„ 92 „				

Uit deze getallen blijkt, dat de gemiddelde waterstand met betrekking tot het aangenomen A.P. niet onveranderd is gebleven.

Nog duidelijker blijkt het, zoo we gemiddelden vormen der 3 tijdvakken van 18 jaar. Men verkrijgt dan :

1708,5	—160,3 mm.	±	5,9 mm.
1725	—154 „	±	25,1 „
1749	—134 „	±	25,1 „
1775	— 89 „	±	25,1 „
1804,5	—104 „	±	5,9 „
1825	— 51 „	±	25,1 „
1851,5	— 61 „	±	5,9 „

Als men onderstelt dat gedurende elk der 18-jarige tijdvakken de gemiddelde waterhoogte onveranderd is gebleven, verkrijgt men uit de afwijkingen der jaargemiddelden van het gemiddelde over 18 jaar eene middelbare fout voor elk jaar van ± 25,1 mm. en in het gemiddelde van 18 jaar eene middelbare fout van ± 5,9 mm.

Onderstelt men daarentegen dat gedurende elk der tijdvakken van 18 jaren de gemiddelde zeestand met betrekking tot het aangenomen A.P. evenredig met den tijd is veranderd, dan verkrijgt men voor de middelbare fout van het jaargemiddelde ± 24,3 mm., en voor de jaarlijksche veranderingen :

van 1700—1717	+ 1,57 mm.	±	1,10 mm.
„ 1796—1813	+ 0,14 „	±	1,10 „
„ 1843—1860	— 2,30 „	±	1,10 „

In het 1e en 2e tijdvak zou dus, in overeenstemming met de algemeene verandering der gemiddelde zeestanden van 1700—1825, de gemiddelde zeestand tot het aangenomen A.P. zijn genaderd, doch in de 3e periode zich daarvan hebben verwijderd, in overeenstemming met de verandering van 1825—1851,5. De middelbare fouten van elk dier jaarlijksche veranderingen, ± 1,10 mm., zijn echter met betrekking tot die veranderingen zelve zoo groot, dat aan de gevonden getallen slechts een zeer kleine waarde kan worden gehecht, alleen aan de jaarlijksche verandering in het 3e tijdvak, ruim 2-maal grooter dan de middelbare fout, mag men een eenigszins grooter beteekenis toekennen. Neemt men tusschen de jaren 1708,5 en 1804,5 eene gelijkmatige jaarlijksche verandering aan, dan zou deze 0.58 mm. bedragen; de uitkomsten voor 1725 en 1749 zijn daar-

mede goed in overeenstemming, maar die voor 1775 vertoont eene afwijking van 32 mm.

De hoogten van het A.P. in het waterkantoor boven den gemiddelden zeestand in het eerste en het laatste jaar der waarnemingsreeks, 1700 en 1860, zijn volgens Tabel II 162 mm. en 75 mm. elk met eene middelbare fout van ± 25 mm. Ten einde voor deze hoogten waarden te verkrijgen met eene kleinere middelbare fout, kan men, in de onderstelling dat geen plotselinge veranderingen van het nulpunt van den peilstok hebben plaats gegrepen, zich bedienen van de hoogten waargenomen in dichtbij gelegen jaren, welke dan met eene aangenomen jaarlijksche verandering tot het jaar 1700 of 1860 moeten worden herleid. Daar die jaarlijksche verandering, zooals boven bleek, niet met groote juistheid bekend is, is het wenschelijk dat de jaren niet te ver van 1700 en 1860 verwijderd zijn; om deze reden heb ik mij beperkt tot het gemiddelde der 5 jaren 1700—1704 en 1856—1860. Aan die gemiddelden moeten dan worden toegevoegd de veranderingen gedurende een tijdvak van twee jaar, die vermoedelijk kleiner zijn dan 3 mm. en 5 mm. zooals uit de 18-jarige tijdvakken zou volgen; ik neem voor die veranderingen 1 mm. en 4 mm. aan, waardoor men verkrijgt:

aangenomen A.P. boven middelbare zee in 1700 = 164 + 1 = 165 mm.

„ A.P. „ „ „ „ 1860 = 76 + 4 = 80 „

Als middelbare fout dier waarden meen ik ± 12 mm. te mogen stellen.

Het blijft voorloopig onbeslist, of die verandering van 165 mm. tot 80 mm. een gevolg is van een langzame verandering in den gemiddelden stand van de Noordzee op onze kust met betrekking tot onzen bodem, dan wel van eene verandering van het aangenomen A.P. in het waterkantoor, hetzij door zakking van het geheele gebouwtje, of van den houten vloer, hetzij door toevallige of wellicht opzettelijke veranderingen in de plaats van het A.P. op den peilstok, die in het tijdvak van 1700 tot 1860 zeker meermalen is vernieuwd.

Eenige gegevens ter oplossing van dit dilemma kunnen wij ontleenen aan de hoogten der peilmerksteenen in de 5 sluizen: oude Haarlemmersluis, Nieuwebrugsluis, Kraansluis, Westindischesluis en Kolksluis, welke steenen omstreeks 1682 zijn geplaatst en door een duidelijke groef de hoogte van het A.P. aangeven. De goede overeenstemming van de hoogten van die groeven in het jaar 1875, blijkens een door ons medelid Dr. Lely uitgevoerde waterpassing

(het grootste onderlinge verschil bedroeg slechts 8 mm.), bewijst wel dat die groeven met groote zorg zijn gesteld, en doet ons vertrouwen dat, toen men in 1700 met de waarnemingen in het waterkantoor is begonnen, ook het op den peilstok aangegeven A.P. goed overeenstemde met dat der eenige jaren vroeger geplaatste steenen.

We mogen dus met vrij groote zekerheid aannemen dat in 1700 het A.P. van de 5 peilmerksteenen ook 165 mm. boven den gemiddelden stand van het Y was gelegen.

In het jaar 1860 is door eene waterpassing van den heer STAMKART de hoogte van het toenmalige A.P. in het waterkantoor vergeleken met de hoogte van twee bouten in den toren van de St. Anthoniewaag. STAMKART vond (Versl. en Meded. Deel XVII p. 276) voor hunne hoogten boven het A.P. in het waterkantoor:

onderste bout 3208,4 m.m.
bovenste bout 3705,4 m.m.

In datzelfde jaar hebben de Heeren STAMKART en V. D. STERR ook door eene waterpassing het verschil in hoogte bepaald van den bovensten bout in de St. Anthonie waag en de groeven in de 5 peilmerksteenen (Versl. en meded. XVII p. 277—284). Uit die waarnemingen volgt voor de hoogte van den bovensten bout boven het A.P. zooals dit volgt het gemiddelde der 5 peilmerksteenen in 1860:

volgens STAMKART	volgens V. D. STERR	gemiddeld
3628 mm.	3624 mm.	3627 mm.

Bij dit gemiddelde is, naar aanleiding van de middelbare fouten, aan de uitkomst van STAMKART een grooter gewicht gegeven.

In het jaar 1875 is door ons medelid Dr. LELY, onder de hoofdleiding van COHEN STUART door een nauwkeuriger waterpassing voor ditzelfde hoogteverschil 3622 mm. gevonden.

De verschillen tusschen de uitkomsten in 1860 en 1875 verkregen kunnen zeer goed verklaard worden door waarnemingsfouten, zoodat we met vrij groote zekerheid kunnen aannemen dat de stand van het merk in de St. Anthoniewaag ten opzichte van de 5 peilsteenen van 1860 tot 1875 niet is veranderd en dat de hoogte van het merk boven het A.P. der peilmerksteenen in 1860 was 3623 mm. met eene middelbare fout van ± 2 mm.

Trekken wij dit getal af van de hoogte 3705 waarop volgens STAMKART het merk boven het A.P. in het waterkantoor in 1860 was gelegen zoo verkrijgt men:

hoogte van het A.P. volgens het gemiddelde der 5 steenen boven het A.P. in het waterkantoor in 1860 gelijk 82 mm.

De middelbare fout van deze uitkomst is op ± 3 mm. te stellen.

Daar de hoogte van het A.P. in het waterkantoor in 1860 op

80 mm. boven den gemiddelden stand van het Y was gelegen, is:

A.P. uit het gemiddelde der 5 steenen boven den gemiddelden waterstand in 1860

$$80 + 82 = 162 \text{ mm.} \pm 13 \text{ mm.}$$

Vergelijkt men deze waarde met de overeenkomstige waarde in 1700, 165 mm., dan mogen wij besluiten dat de hoogte van den gemiddelden waterstand in het Y, en dus ook van den gemiddelden stand van de Noordzee op onze kust, ten opzichte van den bodem waarin de fundeeringen der 5 genoemde sluizen liggen, niet merkbaar is veranderd.

De onzekerheid van deze slotsom wordt aangegeven door een middelbare fout van ± 18 mm.

De 5 sluizen liggen niet onmiddellijk bij elkander, de uitersten op een onderlingen afstand van ongeveer een kilometer; over een vrij groote uitgestrektheid is dus de hoogte van den bodem, waarop een deel van Amsterdam rust, gedurende ruim anderhalve eeuw met betrekking tot de hoogte van de Noordzee onveranderd gebleven.

Met eene even groote zekerheid als deze onveranderlijkheid in stand, kan uit de waarnemingen eene daling van het A.P. in het waterkantoor ten opzichte van het A.P. der 5 sluizen worden afgeleid en wel van 1700 tot 1860 tot een bedrag van 165—80 of 85 mm.

De wijze waarop de hoogte van het A.P. in het waterkantoor werd verkregen, en de voor de hand liggende mogelijke oorzaken van deze daling, gevoegd bij de onveranderlijkheid der 5 peilmerksteenen en dus van een goed deel van den bodem van Amsterdam ten opzichte van de zee geeft een zeer groote mate van waarschijnlijkheid aan de meening dat deze daling een zuiver plaatselijk karakter heeft en dat het niet geoorloofd is er iets uit af te leiden omtrent een mogelijke daling van een grooter gedeelte van Amsterdam's bodem.

Vaak heeft men zich bezig gehouden met de vraag, wat het stads of Amsterdamsch peil voorstelt. Ons medelid Dr. v. Diesen heeft aan dit onderwerp een belangrijke studie gewijd, waarin hij uit oude geschriften heeft bijeengebracht alles wat kan dienen om uit te maken hoe men aan dit nulpunt is gekomen. Zekerheid geven die berichten niet. Uit de waarnemingen weten we echter: 1°. dat in 1700 het A.P. 165 mm. ± 12 mm. boven den gemiddelden waterstand in het Y was gelegen, 2°. dat de hoogte van den gemiddelden vloed $\frac{318}{2} = 159$ mm. ± 1 mm. boven dienzelfden gemiddelden waterstand lag, en we besluiten hieruit, dat, binnen de grenzen der waarnemingsfouten, het A.P. in 1700 en ook in 1860 overeenkwam met den gemiddelden vloed in het Y.

Natuurkunde. — De Heer HOOGEWERFF biedt eene mededeeling aan van den Heer A. P. H. TRIVELLI: *„Bijdrage tot de kennis van het solarisatie-verschijnsel en van verdere eigenschappen van het latente beeld."*

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

I. *De Beeldvorm.*

Ter onderzoeking van de dichtheidsgradatie kan men een fotografische plaat op 2 manieren belichten:

a. bij konstante lichtintensiteit en variabelen belichtingstijd;

b. bij gelijktijdige belichting met verschillende lichtintensiteiten.

Om eventueel veranderde omstandigheden vooral gedurende de ontwikkeling te elimineeren, wordt de eerste methode in dien zin uitgevoerd, dat de plaat strooksgewijs telkens langer belicht wordt. Het is de kombinatie van meerdere proefplaten tot één enkele. Naar mijne meening kan van het verschijnen van een „beeld" hierbij niet gesproken worden en ontstaat dit alleen bij de tweede methode.

De bij gelijktijdige belichting van verschillende lichtintensiteiten verkregen resultaten zal ik *kopieën* noemen. Een kopie vertoont altijd een beeld, dat positief of negatief kan zijn.

Onder eene *normale* of ongepolariseerde kopie versta ik de kopiëering: positief-negatief-positief- enz., hetgeen weergegeven kan worden door:

$$\pm \rightarrow \mp$$

Onder een gepolariseerde kopie versta ik de kopiëering: positief-positief- enz. of negatief-negatief- enz., hetgeen weergegeven kan worden door:

$$\pm \rightarrow \pm$$

Volgens de onderzoekingen van WARNERKE [1]), W, ABNEY [2]), K. SCHAUM en V. BELLACH [3]), R. NEUHAUS [4]) en W. SCHEFFER [5]) kan men de optredende dichtheidsverschillen van een fotografische plaat, na belichting en ontwikkeling, toeschrijven aan verschillen in diepte-uitgestrektheid van het ontwikkelde zilverhaloïd. Het beeld zou dan een overeenkomstigen plastische vorm (beeldvorm) hebben als bij den pigment-gelatinedruk voorkomt, waarbij het onoplosbare gedeelte een normale kopie, het oplosbare een gepolariseerde (monochrome pinatypie) is.

[1]) Phot. Archiv. 1881; S. 85 u. 119.
Phot. Mitt. Bd. 18; S. 65, 98 u. 235.
J. M. EDER, Handb. d. Phot. 1902; Bd. III; S. 106 u. 108.

[2]) J. M. EDER, Hand. d. Phot. 1902; Bd. III; S. 102.

[3]) Phys. Zeitsch. 1902; Bd. IV; S. 4.
J. M. EDER, Handb. d. Phot. 1903; Bd. III; S. 819.

[4]) Wied. Annal. d. Phys. u. Chem. 1898; Bd. 65; S. 164.

[5]) Phot. Chronik. 1904; S. 366.
Phot. Rundschau. 1904; S. 121.

Karakteristiek voor de normale kopie bij normale belichting en ontwikkeling is: dat men bij schuin reflekteerend licht op de plaatsen van grootere dichtheid een doffer opperlak ziet dan op de helderste plaatsen. De oorzaak hiervan is toe te schrijven aan het voorkomen van gereduceerd-zilverhaloïd-korrels direkt onder het vrije oppervlak.

Ligt het beeld tegen het vrije oppervlak dan kan dat een oppervlaktebeeld genoemd worden tegenover een dieptebeeld, waarbij dit niet het geval is.

De oorzaak van het optreden van het oppervlaktebeeld is door P. H. EYKMAN en mij[1]) toegeschreven aan de oppervlaktespanning der vochtige gelatine. Men kan dus een zilverhaloïd-gelatinelaag opvatten als te bestaan uit een reeks van lagen, waarvan de bovenste, d. i. diegene, welke aan het vrije oppervlak ligt, schijnbaar de hoogste gevoeligheid en elke volgende daaronder liggende eene geringere bezit. De belichtingstijd noodig om met den ontwikkelaar het begin van reductie zichtbaar te maken, de „Schwellenwert", is dus naar de diepte schijnbaar toenemende; die van de bovenste laag is gelijk aan de „Schwellenwert" van de plaat zelve. We zullen deze de „absolute Schwellenwert", die van de volgende lagen de „relatieve" noemen.

Ziet men ter verduidelijking verder af van de onderlinge verschillen in lichtgevoeligheid der zilverhaloïdkorrels in één enkele laag, waarop J. M. EDER[2]) en J. PLENER[3]) gewezen hebben, van de verschillen in grootte en vorm en van de topografische ligging der korrels, dan kan de normale kopie voorgesteld worden, zooals fig. 1 in doorsnede en grafisch aangeeft.

Men zou zich den beeldvorm van een gepolariseerde kopie kunnen voorstellen te zijn, zoo als in fig. 2 is weergegeven. Bij geen enkel fotografisch beeld blijkt mij deze verklaring te kunnen worden toegepast, wel bij de chemigrafische procédé's, de katatypie en de zilverpigmentlijmdruk.

Bij sommige gepolariseerde kopieën, als het kontra-positief en -negatief wordt eerst een normale kopie ontwikkeld, waarvan het gereduceerde zilverhaloïd opgelost wordt en na een diffuse belichting nogmaals ontwikkeld. Er ontstaat nu een dieptebeeld (fig. 3). Door de diffuse belichting zal zijn basis, afgezien van geringe lichtabsorptieverschillen zich overal ongeveer even ver van het vrije oppervlak bevinden.

---

[1]) Drude. Annal. d. Phys. 1907; Bd. 22; S. 119.

[2]) J. M. EDER, Handb. d. Phot. 1902; Bd. III; S. 64.
Phot. News. 1883; p. 81.

[3]) Phot. Korresp. 1882; S. 306.

Volgens de onderzoekingen van E. ENGLISCH [1]) en J. M. EDER [2]) heeft men bij de solarisatie met twee beelden te doen. Deze kwestie is nog niet geheel opgehelderd en er heerscht verwarring over de verdeeling van de normale en de gepolariseerde kopie.

Bij toenemenden belichtingstijd, resp. lichtintensiteit neemt het ontwikkelingsvermogen van het zilverhaloïd naar de diepte toe, ten laatste in die mate, dat de reduktie bij voldoenden ontwikkelingsduur zich tot op het glas toe uitstrekt, zooals ook door de uitnemende mikroskopische preparaten van W. SCHEFFER [3]) wordt aangetoond. Treedt de solarisatie op, dan zal dit het eerst gebeuren aan de schijnbaar meest gevoelige lagen, d. i. aan het vrije oppervlak ; het ontwikkelingsvermogen neemt dus daarvan te beginnen af en dit strekt zich bij toenemenden belichtingsduur, resp. lichtintensiteit steeds naar de diepte toe uit. Men krijgt dus een beeldvorm als in doorsnede en grafisch fig. 4 aangeeft, waaruit men onmiddellijk ziet, *dat het gesolariseerde beeld een normale kopie en een oppervlaktebeeld is.* Onder dit beeld bevindt zich een gepolariseerde kopie met grootere dichtheid met AB tot basis en vandaar tot op het glas ligt een sluierstrook, waarvan de dichtheid afhankelijk is van de dikte der gegoten laag.

Dat men bij solarisatie de kopie toch gepolariseerd ziet, komt dus doordat de normale kopie een geringere dichtheid bezit dan de gepolariseerde. Het zal evenwel de kontrasten en detailrijkheid min of meer opheffen. *Het is bijgevolg in strijd met de werkelijkheid om onder solarisatie polarisatie te verstaan, zooals steeds geschiedt.*

(In de figuur is de doorsnede van het gesolariseerde beeld met fijnere granulatie aangegeven, daarmede bedoelende, dat de dichtheid op die plaats verminderd is).

Hiermede is direkt verklaarbaar het door LÜPPO-CRAMER [4]) ontdekte

---

[1]) Phys. Zeitschr. 1900; Bd. 2; S. 62.
J. M. EDER, Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1902; S. 79.
Archiv. f. wiss. Phot. 1900; Bd. II; S. 260.

[2]) Zeitschr. f. wiss. Phot. 1905; Bd. II; S. 340.
J. M. EDER, Handb. d. Phot. 1906; Bd. I; T. 2; S. 287.
Sitzungsber. d. Kaiserl. Akad. d. Wiss. zu Wien. Mathem-Naturw. Klasse; Bd. CXIV; Abt. IIa; Juli 1905.

[3]) J. M. EDER, Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1907; S. 31.

[4]) Ik kan niet nalaten deze proef, welke het bovenstaande zoo duidelijk bevestigt, aan te halen:

„Eine auffallende Erscheinung beobachtete ich endlich noch bei einem *Solarisie-*
„*rungsversuch* mit Jodsilbergelatine. Unter einem Negativ ergaben die Platten in
„drei Sekunden bei diffusem Tageslicht ein ausexponiertes Bild. Eine sechs Stunden
„lang unter demselben negativ belichtete Platte schien sich in Amidolpottasche,
„in welcher sie neben der drei Sekunden belichteten Platte entwickelt wurde, zuerst

verschijnsel bij solarisatie van joodzilver-gelatine en dit wijst op het zeer snelle afnemen van het ontwikkelingsvermogen van het joodzilver bij solarisatie.

II. *Verklaring van eenige verschijnselen bij de solarisatie uit den beeldvorm.*

Uit den beeldvorm van fig. 4 blijkt, hoe het impregneeren der zilverhaloïd-gelatineplaat met bichromaat, vóór de belichting, op het te verkrijgen resultaat invloed kan hebben, hetgeen door BOLAS [1]) werd aangegeven. J. M. Eder en G. PIZZIGHELLI [2]) schreven het resultaat alleen toe aan de gelatinelooiïng, waardoor de ontwikkeling in den normalen beeldvorm gestoord werd, en waarbij de solarisatie nagenoeg geen rol speelt. Het is duidelijk, dat deze beeldvorm der gelooide gelatine meer of minder samenvalt met den beeldvorm van het gesolariseerde beeld, al naar de koncentratie der gebruikte bichromaat-oplossing, waardoor de ontwikkeling hiervan in sterkere mate vermindert en de gepolariseerde kopie kontrast- en detailrijker optreedt. Den sluier blijft men evenwel behouden.

Terwijl men dezen bij normale kopieën met den Farmer'schen afzwakker [3]) kan verwijderen, gelukt dit niet bij solarisatie. De door W. SCHEFFER [4]) ontdekte geringe diffusie van dezen afzwakker, waardoor de werking laag voor laag naar de diepte toe langzaam voortschrijdt, verklaart dit verschijnsel direkt. (zie fig. 4).

Van meer belang voor de kennis van het latente beeld is de z.g. opheffing der solarisatie door de verlangzaamde ontwikkeling. Dat men het genoemde verschijnsel als zoodanig opvat, is alleen toe te schrijven aan de onderlinge verwarring der begrippen solarisatie en polarisatie.

De verlangzaamde ontwikkeling treedt op door vermindering van

---

„gar nicht zu reduzieren, während das kurz exponierte schon in allen Einzelheiten „erschienen war. Nach einiger Zeit merkt man indes, dass auch auf der überbe„lichteten Platte ein Bild vorhanden ist; dasselbe sitzt nur in den *tieferen Schichten* „allerdings als normales Diapositiv, d. h. noch nicht solarisiert während in der „Aufsicht erst nach längerer Entwicklung etwas zu sehen ist. Beim Fixieren merkt „man deutlich, dass *in der obersten Schicht* der lange belichteten Platte kein Bild „vorhanden ist, indem nach kurzem Fixieren das Bild auch in der Aufsicht kräf„tiger wird, offenbar weil das unreduzierte Jodsilber der obersten Schicht wegge„nomen wird". (J. M. EDER, Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1903; S. 46. Zeitschr. f. wiss. Phot. 1903; Bd. I; S. 17).

[1]) J. M. EDER. Handb. d. Phot. 1902; Bd. III; S. 115.
Phot. News. 1880; Vol. 24; p. 304.

[2]) J. M. EDER. Handb. d. Phot. 1902. Bd. III; S. 115.

[3]) J. M. EDER. Handb. d. Phot. 1902. Bd. III; S. 555.

[4]) Brit. Journ, of Phot. 1906; p. 964.
J. M. EDER. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1907; S. 26.

het alkaligehalte des ontwikkelaars of door toevoeging van broomkalium. Dat alleen de reaktiesnelheid van den ontwikkelaar verminderd wordt, kon ik konstateeren door de z. g. opheffing der solarisatie met een ontwikkelaar (rodinal 1 : 10) bij lagere temperatuur. Er ontwikkelt zich eerst een normale kopie, die bij voortgezette ontwikkeling omslaat in een gepolariseerde.

De zoo verkregen normale kopie vertoont evenwel een groot verschil met de gewone. Bij schuin reflekteerend licht heeft de oppervlakte juist den hoogsten glans op de dichtste gedeelten ; de korrels liggen hier dus niet tegen het oppervlak aan. Na het omslaan der kopie in een gepolariseerde, waarbij het gepolariseerde dieptebeeld domineert, blijft de oppervlakte onveranderd, en vertoont nu op de heldere plaatsen den hoogsten glans. Het oppervlaktebeeld heeft dus geene omkeering in dichtheidsverhoudingen ondergaan, waaruit volgt, *dat de normale kopie, door verlangzaamde ontwikkeling verkregen, het gesolariseerde beeld moet wezen.*[1]) *Aan eene verandering van de solarisatie, d.w.z. aan eene verandering van de substantie van het gesolariseerde latente beeld, kan dit niet toegeschreven worden.*

In den oppervlakteglans heeft men dus een middel om bij solarisatie te kontroleeren of het een of ander agens reageert op de substantie van het latente beeld of op de ontwikkeling. Zoo kon ik o.a. vaststellen, dat het door J. M. Eder [2]) aangegeven chroomzuur en het door K. Schaum en W. Braum [3]) aangegeven ammoniumpersulfaat, welke beide een looiende werking uitoefenen op de gelatine, toch bovendien reageeren op de substantie van het latente beeld bij solarisatie, waardoor dit teruggevoerd wordt tot de substantie van het gewone latente beeld.

III. *De polarisatie van* Sabatier.

Laat men tijdens de ontwikkeling van een plaat licht toetreden, dan kunnen zich daarbij drie verschillende verschijnselen voordoen:

1. Bij zeer zwakke lichttoetreding vertoont de plaat in den ontwikkelaar eene verhooging van ontwikkelingsvermogen.

[1]) Het is begrijpelijk, dat gedurende het verschijnen der normale kopie in den ontwikkelaar, dus vóór dat de polarisatie intreedt, ook eene ontwikkeling van het niet-gesolariseerde zilverhaloïd in de diepere lagen kan plaats hebben. Het is dus beter te zeggen, dat het gesolariseerde beeld alleen ontwikkelt binnen een bepaalden ontwikkelingsduur.

[2]) Phot. Korresp. 1902; S. 647.
J. M. Eder. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1903; S. 23.
J. M. Eder. u. E. Valenta. Beiträge zur Photochemie. 1904; II; S. 168.
J. M. Eder. Handb. d. Phot. 1903. Bd. III; S. 828.

[3]) Phot. Mitt. 1902; S. 224.

2. Bij sterkere lichttoetreding verdwijnt het beeld voor een deel en men verkrijgt een meer of minder dun gesluierde plaat met gedeeltelijk een normale en gedeeltelijk een gepolariseerde kopie, die grooten weerstand vertoont tegen verdere ontwikkeling.

3. Bij nog sterkere lichttoetreding polariseert de kopie.

Dit laatste verschijnsel noem ik de polarisatie van SABATIER.

J. M. EDER [1]) schrijft de eerste waarneming hiervan toe aan SABATIER en zegt, dat SEELY de volgende verklaring er van gaf: Het begin der ontwikkeling is oppervlakkig; door de sekundaire belichting drukt dit ontwikkelende beeld zich op het daaronder liggende zilverhaloïd af en, daar deze lichtinwerking krachtiger is dan de eerste, ontwikkelt het tweede beeld zich ook sterker en de totale polarisatie resulteert.

Bij door mij gedane proeven bleek, dat het oppervlaktebeeld in zijne ontwikkeling bij de sekundaire belichting gestoord wordt, want in opzicht ziet men het niet meer aan dichtheid toenemen, terwijl toch te verwachten was eene totale ontwikkeling van het geheele oppervlak. Om na te gaan in hoe verre bij de polarisatie de kopiëerende werking van het ontwikkelende oppervlaktebeeld meewerkt, heb ik op raad van P. H. EYKMAN de sekundaire belichting op den glaskant der plaat genomen.

De belichte en kort ontwikkelde plaat werd even na het verschijnen van het beeld in den ontwikkelaar met een stuk ondoorzichtig, zwart papier bedekt, dat, overal glad tegen de emulsie aan gedrukt om blazen te vermijden, waardoor ongelijkmatige ontwikkeling zou kunnen ontstaan, daarna door den glaskant aan direkt daglicht werd blootgesteld. Daar de in het papier opgezogen hoeveelheid ontwikkelaar gering is en de temperatuur beneden normaal was, werd ter bespoediging de plaat in de donkere kamer weer in den ontwikkelaar teruggebracht, onder zorgvuldige vermijding van toetreding van licht van den voorkant. Na het fixeeren verscheen een gepolariseerde kopie.

Hieruit volgt dus, dat de kopiëering van het ontwikkelende beeld hoogstens een zeer ondergeschikte rol speelt bij het tot stand komen der polarisatie.

Deze kan alleen toegeschreven worden aan eene opheffing van de verdere ontwikkeling van het oppervlaktebeeld en aan eene toename van het ontwikkelingsvermogen van het daaronderliggende zilverhaloïd. Men krijgt hier dus weer 2 beeldvormen, die onder elkander vallen: boven een normale kopie met geringe dichtheid, daaronder een gepolariseerde met grootere dichtheid, overeenkomende met die van fig. 4. der gepolariseerde kopie bij solarisatie.

[1]) J. M. EDER. Handb d. Phot. 1898; Bd. II; S. 82.

De overeenkomst van de polarisatie van SABATIER met de solarisatie is zoo sterk, dat R. LYLE[1]) het zooeven onder 2 genoemde verschijnsel toeschreef aan het bereiken van den eersten zerotoestand der JANSSEN'sche periodiciteiten der solarisatie[2]). Mij bleek bij een mijner proeven deze overeenkomst niet verder te gaan, dan dat er geen beeld viel waar te nemen. De eerste zerotoestand kenmerkt zich juist door het optreden van de maximaal bereikbare dichtheid, terwijl de plaat zeer dun bleef. De oorzaak van het verdwijnen van het beeld kan dus daarin niet gezocht worden.

Bij doorzicht geeft ook de plaat niet de polarisatie op de door de primaire belichting het intensiefst belichte, maar op de zwakst belichte gedeelten. (Aan solarisatie kan dus de polarisatie van SABATIER niet toegeschreven worden). Het is begrijpelijk, dat de relatieve „Schwellenwert" van een dieptelaag daar het eerst bereikt wordt, waar de absorptie van het oppervlaktebeeld het geringste is en waar deze laag tevens het dichtst bij het vrije oppervlak ligt. Hierbij werkt dus de kopiëerende eigenschap van het oppervlaktebeeld mee.

IV. Het Herschel-effekt.

Onder het Herschel-effekt versta ik een polarisatie door dubbele belichting. Het onderscheid met de polarisatie door solarisatie ligt daarin, dat veel geringere hoeveelheden lichtenergie daartoe in staat zijn en dat bij de sekundaire belichting het ontwikkelingsvermogen van het primair belichte zilverhaloïd direkt afneemt.

De duur der primaire belichting moet altijd boven de „Schwellenwert" van de plaat liggen. Na een bepaald maximum bij de secundaire belichting *(de kritische belichting)* overschreden te hebben vertoont de plaat weer een normale kopie. De waarde der kritische belichting is geheel afhankelijk van de primaire belichting. Dit heeft aanleiding gegeven om in het z.g. CLAYDEN-effect[3]) (den zwarten bliksem) een nieuw verschijnsel der fotografische plaat te zien.

De eerste waarneming dateert in 1839 van J. HERSCHEL, welke meedeelde, dat de roode en gele stralen van het spektrum in staat waren het latente beeld der blauwe en violette op te heffen. Hiermede

[1]) Phot. Centralbl. 1902; S. 146.

[2]) Compt. rend. 1880: T. 90; p. 1447, T. 91; p. 199.
Moniteur de la Phot. 1880; p. 114.
Beibl. z. d. Annal. d. Phys. u. Chem. 1880; S. 615.
J. M. EDER, Handb. d. Phot. 1906; Bd. I; T. 2; S. 306. 1898; Bd. II; S. 78.
J. M. EDER, Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1894; S. 378.

[3]) J. M. EDER. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1901; S. 610.
Camera Obscura. 1901; bldz. 513.
J. M. EDER. Handb. d. Phot. 1906; Bd. I; T. 2; S. 312.
" " " " 1903; Bd. III; S. 834.

werd tevens gekonstateerd eene verandering in optredende kleurgevoeligheid. Bevestigd werd dit door CLAUDET[1]), H. W. VOGEL[2]), W. ABNEY[3]), P. VILLARD[4]) en R. W. WOOD[5]). E. ENGLISCH[6]), H. W. VOGEL en W. ABNEY zagen dit verschijnsel evenwel voor solarisatie aan. In een door P. VILLARD gepubliceerde proef ziet men duidelijk, dat bij vergevorderde belichtingen de kritische belichting niet meer optreedt en het geheele verschijnsel met de solarisatie samenvalt. De hoogste gevoeligheid der plaat ligt in het rood, de geringste in het groen.

WARNERKE[7]) nam het Herschel-effekt waar met drukbeelden en P. VILLARD, R. W. WOOD, R. LUTHER en W. A. USCHKOFF[8]) met Röntgenstralen bij primaire belichting. Tevens toonden zij aan, dat het verschijnsel bij omkeering dezer belichtingen niet meer optrad.

J. STERRY[9]) deelde nog eene variatie mede, dat bepaalde soorten van chemischen sluier door zwak licht opgeheven kunnen worden.

Eenigen tijd geleden toonde een van mijne vrienden mij een paar kamera-opnamen op EASTMAN-films[10]), welke ik als het door J. STERRY waargenomen verschijnsel herkende. Zij waren enkelvoudig belicht, maar hadden ongeveer 3 jaren in een kamera gelegen zonder eenige voorzorgen dan voorkoming van lichttoetreding. De diffuse belichting was hierbij dus vervangen door een analoog werkend chemisch ontledingsproces op het broomzilver door dampen, afkomstig van het celluloid, die in de broomzilver-gelatine gediffundeerd waren.

Fig. 5 is een kort belichte buiten-opname en geeft verschillende abnormaliteiten te zien. De geheele kopie is bijna gepolariseerd, met uitzondering van de lucht bij *a*, waar de kritische belichting overschreden is. De honden op den voorgrond, zijnde daar de sterkst lichtreflecteerende objekten, vertoonen begin van vorming van een normale kopie, evenals de schouders van de rechtsche vrouwenfiguur, waarvan vooral de linkerschouder daardoor een valsche plastiek geeft. De kritische belichting wordt dus bereikt, nadat de grootste doorzichtigheid van het beeld verkregen is.

[1]) Annal. d. Chimie et de Phys. 1848; 3e série; T. XXII.

[2]) H. W. VOGEL. Handb. d Phot. 1890; Bd. I; S. 221.

[3]) Phot. Archiv. 1881; S. 120.

[4]) Soc. d'encourag. pour l'Industrie nation. Extr. d. Bulletin; Nov. 1899.

[5]) Astrophys. Journ. 1903; Vol. XVII; p. 361.

[6]) J. M. EDER. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1902; S. 73.

[7]) Phot. Arch. 1881; S. 120.

[8]) Phys. Zeitschr. 1903; S. 866.

[9]) Dit stuk ken ik alleen als referaat uit J. M. EDER. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1903; S. 425.

[10]) Het objektief in de kamera was een lichtzwakke aplanaat en werd bij de interieur-opname met volle opening, bij de openlucht-opname gediaphragmeerd, gebruikt.

Tusschen dit begin van normaal kopiëeren en de gopolariseerde kopie bevindt zich een blanke strook, die bij sterkere belichting smaller verschijnt. De linksche hond vertoont eene grootere dichtheid van de normale kopie dan de rechtsche, waarbij de blanke strook breeder is. Deze strook strekt zich uit op de blankste gedeelten juist andersom als bij de omtrekken van de bladeren van den boom en van den kalen stam op den achtergrond; enkele uitloopers zijn zelfs geheel blank. Hierbij bevinden deze strooken zich op de donkerste gedeelten en nemen naar de rechtsche zijde der bladerkroon in breedte af, waar omheen eene geringere lichtintensiteit heeft gewerkt.

De muur is aan den linkerkant sterker belicht dan aan de rechterzijde, verschijnt daar iets donkerder en blijft toch gepolariseerd, hetgeen op de origineele film beter dan op de reproduktie is te zien. De linkerzijde van de bladerkroon van den boom vertoont een sterkere halo dan de rechter, terwijl bij het met grootere lichtkontrasten ingewerkte gedeelte der lucht bij *a* in het geheel geen halo is te bespeuren. Hierbij zou de halo evenwel omgekeerd hebben moeten werken, n.l. niet afnemend in dichtheid op de donkerste gedeelten, maar toenemend op de lichtere.

Opvallend is de betrekkelijk geringe dichtheid van de lucht bij *a* en de geringe kleurgevoeligheid voor groen (gras en bladeren), waar het donkerblonde en donkerbruine haar der beide vrouwenfiguren een sterkere lichtinwerking vertoont hebben, hetgeen op de oorspronkelijke opname beter te zien is. De muur op den achtergrond is wit, zoodat de kleurinwerking van het rood der steenen hierbij niet is te constateeren.

Fig. 6 geeft de kritische belichting nog treffender weer. Het is een interieur-opname van enkele seconden, welke alle voorwerpen in de kamer tot zelfs voor een groot gedeelte de halo van het rechter vensterlicht gepolariseerd weergeeft. Hetgeen dóór de vensters buiten wordt gezien, is normaal gekopiëerd; daarbij is dus de kritische belichting overschreden. De halo heeft voor een gedeelte de loodranden van het gekleurde glas weer normaal doen verschijnen, voor een ander gedeelte bij sterkere lichtinwerking rechts weer een groote dichtheid gegeven. Het rechter- over een grooter en het linker-beneden-gedeelte over een kleiner oppervlak vertoonen verschillen van dichtheid, die toegeschreven moeten worden aan ongelijke inwerking der chemische reactie's tijdens het bewaren der film. Fig. 5 vertoont dit ook, maar in geringer mate, doch daarbij is het door de detailrijkheid van het beeld minder opvallend. Bij de geringe inwerking rechts, ziet men de beelden daarmede overeenstemmend dunner worden.

Het overeenkomstige is te constateeren aan een röntgenogram van

P. H. EYKMAN, mij welwillend ter beschikking gesteld. De plaat is blootgesteld aan Röntgenstralen met een z.g. versterkingsscherm (calciumwolframaatscherm) en vóór het ontwikkelen eenigen tijd terzijde gesteld. Het calciumwolframaat luminesceert na [1]) tengevolge waarvan dus de plaat nog verder geëxposeerd werd. Geröntgenografeerd waren een stuk been, een dunne en een dikkere met isolatie omwoelde koperdraad. Fig. 7 geeft een reproduktie van het negatief. De plaatsen der dunne koperdraad vertoonen ontwikkeling van het broomzilver, die bijna even sterk is als op het veld, waar de Röntgenstralen en de luminescentie samen het sterkst hebben ingewerkt. Een smalle strook aan den rand geeft aan tot hoever het scherm de plaat dekte; daar hebben dus de R-stralen alleen ingewerkt. De plaats van den dunnen koperdraad vertoont daar geen spoor van ontwikkeling: de bestraling had dus beneden de „Schwellenwert" plaats gehad.

Aan iradiatie door het scherm kan de ontwikkeling van deze plaats niet toegeschreven worden: hetzelfde zou dan waargenomen moeten kunnen worden bij den dikken koperdraad en den rand van het scherm. De R-stralen moeten dus werkelijk op die plaats zoodanig hebben gewerkt, dat het scherm luminesceerde en dit op het broomzilver inwerkte, terwijl de belichting der R-stralen beneden de „Schwellenwert" bleef.

P. H. EIJKMAN toonde mij ook een plaat, waarbij het scherm na de bestraling alleen in kontakt was gebracht met een onbelichte plaat [2]) en dit vertoonde een zeer dun beeld, waaruit volgt, dat de sterkste inwerking van het scherm plaats heeft direkt na de transformatie der geabsorbeerde Röntgenenergie. Kon men dus bij een röntgenogram met een calciumwolframaatscherm de inwerking der R-stralen voorkomen, dan zouden veel kortere expositie's voldoende zijn om een goed beeld te geven. Dit is tot nog toe niet mogelijk gebleken.

Een feit van belang voor de kennis van het latente beeld is nog op te merken uit fig. 6. De rechterbenedenhoek geeft duidelijk weer, dat hoe dunner de sluier der diffuse belichting wordt, hoe dunner ook de gepolariseerde kopie is. Hieruit volgt, *dat bij de sekundaire belichting de „Schwellenwert" kleiner is dan bij de primaire belichting, d.w.z. de hoeveelheid licht om een begin van afname van het ontwikkelingsvermogen te bewerkstelligen is geringer dan voor een begin van toename van dit vermogen bij den oorspronkelijken toestand van het broomzilver noodig is.*

[1]) Fortschr. a. d. Geb. d R-Str. 1901; Bd. IV; S. 180.

[2]) Dit calciumwolframaatscherm was gelijktijdig met de opname van fig. 7 aan de R-stralen blootgesteld.

V. *De theorie van het latente beeld.*

Bij de theorie van het latente beeld heeft men twee feiten in acht te nemen, die in onmiddellijk verband met elkander staan:

1. De inwerking van het licht op de zilverhaloïden;
2. de physische of physische en chemische veranderingen van het zilverhaloïd als gevolg van die inwerking.

De eigenlijke theorie van het latende beeld beperkt zich alleen tot het laatste, omvat dus slechts de sekundaire verschijnselen. Van al de hieromtrent opgestelde theorieën heeft zich alleen de subhaloïdtheorie van CHOISEAT en RATEL [1]) gehandhaafd, vooral door de latere onderzoekingen van M. CAREY LEA [2]), H. WEISS [3]), J. M. EDER [4]) e.a. Terwijl J. M. EDER [4]) het zilversubhaloïd voor eene molekulaire verbinding houdt, vatten M. CAREY LEA [6]), E. BAUER [7]), L. GUNTHER [8]) en LÜPPO-CRAMER [9]) het op, als eene adsorptieverbinding van kolloïdaal zilver en zilverhaloïd, daarmede feitelijk de oude zilverkiemtheorie van ARAGO in een nieuwen vorm handhavende. Er is echter nog geen enkel feit in de fotografie aan te wijzen, waaruit blijkt, welke van deze beide theorieën de voorkeur verdient; alleen konden alle chemische reactie's op het latente beeld zoowel door de eene als door de andere theorie verklaard worden; eene afdoende verklaring der fotografische verschijnselen heeft tot nog toe geen der beide theorieën gegeven.

Waar het fotochemisch ontledingsproces op het zilverhaloïd zich

---

[1]) Compt. rend. 1843: T. 16; Nr. 25.
„ „ „ T. 17; Nr. 4.
J. M. EDER. Handb. d. Phot. 1898; Bd. II; S. 111.

[2]) Americ. Journ. of Science. 1887; Vol. 33; p. 349.
Phot. Korresp. 1887; S. 287, 344 u. 371.

[3]) Zeitschr. f. phys. Chemie 1905; Bd. 54; S. 305.
Chem. Centralbl. 1906; Bd. I; S. 807.
J. M. EDER. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1906; S. 473.

[4]) Sitzungsber. d. kaiserl. Akad. d. Wiss. zu Wien. Mathem.-naturw. Klasse. Bd. CXIV; Abt. IIa; Juli 1905.
Zeitschr. f. wiss. Phot. 1905; Bd. III; S. 329.
J. M. EDER. Handb. d. Phot. 1906; Bd. I; T. 2; S. 277.
Phot. Korresp. 1905; S. 425 u. 476.
„ „ 1906; S. 81, 134, 181 u. 231.
„ „ 1907; S. 79.

[5]) Zie noot 4.

[6]) Zie noot 2.

[7]) Zeitschr. f. phys. Chemie. Bd. 45; S. 618.

[8]) Abhand. d. naturh. Ges. Nürnberg. 1904; Bd. 15; S. 26.

[9]) Phot. Korresp. 1906 u. 1907.
LÜPPO-CRAMER. Photogr. Probleme. 1907; S. 193.

alleen kenmerkt door een kontinu reduktieproces, ligt het voor de hand dit ook aan te nemen bij het gesolariseerde latente beeld. Toch zijn er enkele verschijnselen, welke dit schijnbaar tegenspreken.

Zoo veronderstelde W. ABNEY [1]) de vorming van een oxybromide en grondde deze gevolgtrekking op de waarneming, dat kaliumbichromaat, kaliumpermanganaat, perhydrol en enkele anorganische zuren de solarisatie bevorderen De verdere door hem aangegeven solarisatieverhinderende werking van reduceerende stoffen, als pyrogallol, ferrosulfaat, ferrocyaankalium, nitrieten en sulfieten zijn alleen beoordeeld naar het al of niet optreden der polarisatie en kunnen geheel teruggebracht worden tot de verlangzaamde ontwikkeling.

LÜPPO-CRAMER [2]) acht de oxydatietheorie der solarisatie absurd. Hij wijst op het solariseeren der plaat ook buiten toetreding van zuurstof, en op de omstandigheid, dat al de agentien, welke de solarisatie verhinderen, halogeen-absorbeerende stoffen zijn. Als karakteristiek voorbeeld haalt hij het zilvernitraat aan, waarvan de solarisatiestorende werking, volgens hem, aan de halogeen-absorptie, niet aan de oxydatie is toe te schrijven en beschouwt deze werking analoog aan die van nitrieten, sulfieten en van het hydrochinon.

Deze opvatting is in strijd met zijne kritiek op de oxydatietheorie, waarbij hij ook wijst op het kontinue halogeenverlies bij voortgezette belichting van het zilverhaloïd en op zijne waarneming, dat broomzilver opheft, ja zelfs het geheele latente beeld kan opheffen [3]). *De halogeenabsorptie moet dus de solarisatie bevorderen.* De zooeven aangehaalde bevordering der solarisatie van W. ABNEY is niet aan oxydatie, maar aan halogeenabsorptie toe te schrijven.

Dat de oxydatie van de substantie van het latente beeld de solarisatie opheft, konstateerde J. M. EDER [4]) met zijne chroomzuur- en K. SCHAUM en W. BRAUN [5]) met hunne ammoniumpersulfaat-reaktie. Dat men hierbij werkelijk het verschijnsel der verlangzaamde ontwikkeling heeft, kon ik waarnemen door de vorming van een dof oppervlaktebeeld. Ook toonde LÜPPO-CRAMER [6]) aan, dat het zilversubhaloïd der POITEVIN'sche fotochromieën door oxydatie eene regressie

---

[1]) Proc. Roy. Soc. 1873; Vol. 27; p. 291 a. 451.

[2]) LÜPPO-CRAMER. Phot. Probleme. 1907; S. 138.

[3]) J. M. EDER, Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1902; S. 481.

[4]) Phot. Korresp. 1902; S. 647.
J. M. EDER, Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1903; S. 23.
J. M. EDER, u. E. VALENTA Beiträge zur Photochemie. 1904; II; S. 618.
J. M. EDER, Handb. d. Phot. 1903; Bd. III; S. 828.

[5]) Phot. Mitt. 1902; S. 224.

[6]) Phot. Korresp. 1907; S. 439.

ondergaat tot zilverhaloïd. J. M. EDER [1]) beschreef hetzelfde bij zijne onderzoekingen van het latente beeld met de salpeterzuur-reaktie.

Een geheel ander gezichtspunt op de progressieve fotochemische ontleding der zilverhaloïden gaf H. LUGGIN [2]). Hij deelde mede, dat, bij intensievere belichting, naar verhouding ook eene grootere hoeveelheid gevormde zilversubhaloïd onder den invloed van den stijgenden halogeendruk aan het zilverhaloïd het vermogen ontneemt kiempunten voor de metaalafzetting te geven en dat dus halogeenabsorbeerende stoffen (chemische sensibilisatoren) het beste middel zijn om den halogeendruk zoo laag mogelijk te houden en daardoor de solarisatie te verhinderen. Hij beschouwt dus de solarisatie als een verschijnsel van verhindering van kiemvorming. Zijn gezegde: „Oft „wird man den Beginn der Solarisation dadurch hinausschieben können, „dass man kleinere Blenden wählt und dafür die Expositionszeit ver„längert", wordt bij joodzilvergelatine bevestigd [3]).

Toch is deze stelling, dat de halogeenabsorptie de solarisatie verhindert, in strijd met het voorgaande. Ik heb daarom deze kwestie nader onderzocht

Het zilverhaloïd ontleedt door de inwerking van het licht, maar eene blanke zilverstaaf in het licht aan halogeendampen blootgesteld, verbindt zich daarmede direkt tot halogeenzilver. In tegenwoordigheid van een overmaat aan halogeen ontleend zich dus het zilverhaloïd niet.

Een hooggevoelige broomzilver-gelatine-plaat, welke gedeeltelijk met kollodion was overgoten, werd aan direct daglicht blootgesteld. Daarbij werd waargenomen, dat de fotochemische ontleding onder het kollodion belangrijk achterbleef ten opzichte van die bij het vrije oppervlak en zelfs na wekenlange belichting niet noemenswaard was toegenomen. De violet-bruine verkleuring vertoonde zich enkel aan het vrije oppervlak en kon door voorzichtig afschuren verwijderd worden. Een plaat, tegelijkertijd op de glaszijde belicht, vertoonde eveneens een achterblijven bij het fotochemische ontledingsproces en tegen het glas blijft op het oog het broomzilver nagenoeg onveranderd. De diffusieverhindering van het halogeen werkt dus de ontleding tegen. Bij overmaat van vrijgekomen halogeen heeft de omgekeerde reaktie plaats, wat volkomen in overeenstemming is met de regressie van het latente beeld bij broomzilver door broomwater, zooals LÜPPO-CRAMER vond.

---

[1]) Zie noot 4. bldz. 783.

[2]) J. M. EDER, Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1898; S. 162.

[3]) J. M. EDER, Handb. d. Phot. 1906. Bd. I; T. 2; S. 309.
LÜPPO-CRAMER, Phot. Probleme. 1907; S. 152.

De diffusie van het vrijgekomen halogeen zal in de reeks: chloor, broom, jodium, steeds in verminderde mate plaats hebben, wegens de stijging in atoomgewicht.

De stelling van H. Luggin moet dus in dien zin gewijzigd worden, dat bij eene bepaalde lichtintensiteit de progressieve en de regressieve reaktie's in een evenwichtstoestand geraken, die alleen overschreden wordt door halogeenverlies (absorptie door de chemische sensilisator en diffusie).

Hetzelfde werd vroeger reeds onder andere woorden door J. Precht [1]) gezegd; doch op grond van het optreden der solarisatie.

Met deze gewijzigde stelling van H. Luggin, kunnen alle afwijkingen [2]) van den reciprociteitsregel van R. Bunsen en H. Roscoe [3]) verklaard worden, waartoe ook de zooeven aangehaalde verschijnselen bij joodzilvergelatine behooren.

Tot de kennis van het latente beeld komt men door de ontwikkeling. Terwijl de belichting eene ontleding van het zilverhaloïd veroorzaakt met kwantitatief toenemend gehalte aan zilversubhaloïd, treedt bij het ontwikkelen na een zeker belichtingsmaximum eene vermindering van het ontwikkelingsvermogen op. Het solarisatieverschijnsel is dus in dien zin een ontwikkelingsverschijnsel, dat de ontwikkeling tengevolge van de gewijzigde eigenschappen van het latente beeld eene verandering vertoont.

Ter verklaring van de solarisatie is dus de kennis van het wezen der ontwikkeling noodzakelijk. Zonder dat blijft de solarisatie een onoplosbaar probleem.

Men onderscheidt tweeërlei ontwikkelingsmethoden: de physische en de chemische [4]). De physische ontwikkeling kenmerkt zich door een neerslag van eene gereduceerde zilververbinding uit den ontwikkelaar op het belichte zilverhaloïd: de chemische door eene reduktie van het belichte halogeenzilver zelve.

Door W. Ostwald [5]), K. Schaum en W. Braun [6]) werd veronder-

---

[1]) Zeitschr. f. wiss. Phot. 1905. Bd. III; S. 75.

[2]) J. M. Eder, Handb. d. Phot. 1906; Bd. I; T. 2; S. 48 u. 49.
" " " " 1902; Bd. III; S. 228.
" " " " 1893; Bd. II; S. 3 u. 5.
Phot. Mitt. 1890; S. 261.
Proc. Roy. Soc. 1893; Vol. 54; p. 143.

[3]) Poggendorf Annal. d. Phys. 1862; Bd. 117; S. 533.

[4]) J. M. Eder, Handb. d. Phot. 1893; Bd. II; S. 29.
" " " " 1906; Bd. I; T. 2; S. 250.

[5]) W. Ostwald, Lehrb. d. allgem. Chemie. 1893; Bd. 2; S. 1078

[6]) J. M. Eder. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1902; S. 476.
Phot. Mitt. 1902; S. 229.

steld, dat de reduktie van het broomzilver bij de chemische ontwikkeling eerst daardoor tot stand komt, dat eene minimale hoeveelheid broomzilver in oplossing gaat als positief zilver- en negatief haloïdion, waarna de gereduceerde substantie op de kiemen neerslaat. Het gelukte LÜPPO-CRAMER [1]) aan te toonen, dat een aantal ontwikkelingsprocessen, die men vroeger voor zuiver chemisch-verloopend aanzag, niet alleen werkelijk in wezen physisch plaats hebben, maar dat elke chemische ontwikkeling gedeeltelijk ook physisch geschiedt. Eerst W. SCHEFFER [2]) toonde door een mikroskopisch onderzoek aan, dat de geheele chemische ontwikkeling in wezen physisch plaats heeft, d.i. door molekulair-attraktie tusschen het fotochemisch gereduceerde zilverhaloïd, de kiem, en de gereduceerde voedingssubstantie. Hiermede is dus de veranderde struktuur van de belichte broomzilver-gelatineplaat vóór en nà de ontwikkeling verklaard [3]).

Desniettegenstaande vertoont de ontwikkeling der fotografische plaat volgens de z.g. chemische methode werkelijk een verschil tegenover de physische. LÜPPO-CRAMER [4]) gelukte het aan te toonen, dat de beeldsubstantie bij een z.g. chemisch ontwikkelde plaat naast gewoon zilver nog broom bevat, door hem verondersteld eene vaste oplossing van zilver in broomzilver te zijn. Hij besluit daaruit, dat naast het zilver bij de reduktie nog een tusschenprodukt moet ontstaan. Het ligt voor de hand, om naar analogie met het reduktieproces van het zilverhaloïd tot zilver door het subhaloïd heen, aan te nemen, dat ook bij de z.g. chemische ontwikkeling de reduktie evenzoo plaats heeft. Het blijkt dan, dat men tusschen de chemische en physische ontwikkeling slechts dit verschil heeft, dat de eerste het subhaloïd moeilijker in oplossing houdt dan de laatste, waardoor geen volkomen reduktie kan plaats hebben. Tevens is hiermede het meer of minder terugloopen van het ontwikkelde beeld bij de diverse ontwikkelaars in het fixeerbad begrijpelijk, die analoog is aan die bij de „directkopiëerpapieren" met zilverhaloïd.

Hiermede wordt nog eene andere schijnbare tegenstrijdigheid verklaard. Zien we bij chloorzilver eene geringere en bij broomzilver

---

[1]) LÜPPO-CRAMER. Phot. Probleme 1907. S. 159.

[2]) Phot. Rundschau 1907; S. 142.
Phot. Korresp. 1907; S. 384.

[3]). S. E. SHEPPARD en C. E. K. MEES. (Zeitsch. f. wiss. Phot. 1905; Bd. III; S. 355) beschouwen V. BELLACH's waarneming, dat de korrelgrootte van het ontwikkelde beeld bij het drogen der emulsie vermindert, in overeenstemming met G. QUINCKE's schuimstruktuurtheorie der zilverhaloïdkorrels, die volgens hem gelatine zouden bevatten. Het niet-samenvallen van de belichte en de ontwikkelde korrel toont de onjuistheid van deze beschouwing aan.

[4]) Phot. Korresp. 1905; S. 319.

eene grootere lichtgevoeligheid optreden — m. a. w. heeft kwantitatief dezelfde fotochemische ontleding bij broomzilver met een geringere lichtenergie-absorptie plaats dan bij het chloorzilver — bij de dichtheidstoename der ontwikkeling ziet men juist het omgekeerde plaats hebben, waarop H. en R. E. LIESEGANG[1]), KÖNIG[2]) en LÜPPO-CRAMER[3]) wezen. Bedenkt men, dat chloorzilver een hooger oplossingsvermogen bezit, resp. het vermogen bezit een grooter aantal ionen in oplossing te brengen dan het broomzilver, dan is het te begrijpen, dat de reduktie kwantitatief in meerdere mate per tijdseenheid kan plaats hebben, niettegenstaande het chloorzilver een bestendigere verbinding is dan het broomzilver.

Bij het joodzilver zien we hetzelfde nog beter. De ontwikkelbaarheid, resp. oplosbaarheid, is daarbij nog geringer, hetgeen meermalen tot de ongemotiveerde gevolgtrekking aanleiding heeft gegeven te zeggen, dat joodzilver minder lichtgevoelig is dan broomzilver, terwijl men bij de daguerreotypie en het natte kollodionproces juist het tegenovergestelde waarneemt; daarbij toch wordt de voedingssubstantie voor de ontwikkeling van buiten af aangevoerd. LÜPPO-CRAMER kon dan ook de ontwikkelaars als amidol-kaliumkarbonaat, triamidophenol, diamidoresorcin en triamidoresorcin, welke bij broomzilvergelatine-platen een veel te groote reaktiesnelheid vertoonen, nog bij joodzilver gebruiken.

De hoogere lichtgevoeligheid, die men bij joodbroomzilverplaten heeft tegenover de broomzilverplaten, waardoor de donkerste deelen van het beeld beter doorgewerkt verkregen worden, kan dus geheel toegeschreven worden aan de snellere kiemvorming van het joodzilver, terwijl het broomzilver als voedingssubstantie voor den ontwikkelaar dienst doet. Dit blijkt nog verder uit de optische sensibilisatie van joodbroomzilverplaten.

Terwijl het broomzilver zich zeer goed kleurgevoelig laat maken, schijnt dit met joodzilver niet het geval, waarop J. M. EDER, [4]) LÜPPO-CRAMER [5]) e. a. gewezen hebben. Toch laten beiden zich kleuren door de optische sensibilisatoren, maar de joodbroomzilverplaat gedraagt zich daarbij meer als een joodzilverplaat.

---

[1]) Phot. Mitt. 1901; S. 362.
Phot. Wochenbl. 1901; S. 405.
J. M. EDER. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1902; S. 572.

[2]) Phot. Korresp. 1903; S. 14.

[3]) J. M. EDER. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1903; S. 401.

[4]) J. M. EDER. Handb. d. Phot. 1906; Bd. I; T. 2; S. 269.

[5]) J. M. EDER. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1903; S. 46.
" " " " " " 1904; S. 390.
Zeitschr. f. wiss. Phot. 1903; Bd. I; S. 17.

Op het 79ste Duitsche Natuur- en Geneeskundig Kongres te Dresden in 1907, is door W. SCHEFFER [1]) eene solarisatietheorie medegedeeld, die, berustende op zijne mikroskopische onderzoekingen [2]), op ongedwongen wijze de solarisatie verklaart.

Bij het ontwikkelen der belichte broomzilver-gelatineplaat, zenden bepaalde korrels („Ausgangskörner") kiemen uit, waarop de gereduceerde substantie zich vastzet, doordat andere korrels (Nahrkörner, vroeger „Lösungskörner" genoemd) in den ontwikkelaar opgelost worden en het aangroeien der kiemen veroorzaken. In een zeer sterk belichte emulsie „explodieren" te veel kiemgevende korrels en blijven niet genoeg voedingskorrels over, zoodat geen beeld van voldoende dichtheid kan ontstaan. Deze theorie berust dus op den overgang van voedingskorrels in kiemgevende door de belichting of beter gezegd van zilverhaloïd in zilversubhaloïd.

Deze theorie is niet in overeenstemming te brengen met de door J. STERRY [3]), J. M. EDER [4]) en LÜPPO-CRAMER [5]) gevonden feiten, dat bij primaire fixeering ook solarisatie kan optreden; hierbij toch wordt de voedingssubstantie van buiten af toegevoerd. Hetzelfde heeft men bij de daguerreotypie.

Ook de solarisatietheorie van B. HOMOLKA [6]): „In der Abnahme „des Bromsilbersvorrates erblicke ich den Grund der Solarisation" is hiermede niet in overeenstemming te brengen, afgezien nog daarvan, dat deze beide theorieën niet in staat zijn de tweede omkeering der solarisatie te verklaren en geen rekenschap geven van het feit, dat tot zelfs bij de sterkste overbelichtingen men in de emulsie nog altijd een overmaat van zilverhaloïd, d. i. voedingssubstantie kan aantoonen.

Uit de solarisatie bij primaire fixeering blijkt dus, dat de zilversubhaloïdkiem deze kiemeigenschap bij verdere belichting verliest, d. w. z. door de verdere fotochemische ontleding is overgegaan in een ander subhaloïd met geringer halogeengehalte, dat geen kiemeigenschap bezit. De mogelijkheid van het bestaan van meerdere subhaloïden, bewees O. WIENER. [7]) Noemen we het eerste het α-zilversubhaloïd en het tweede het β-zilversubhaloïd.

Het wederoptreden van het ontwikkelingsvermogen bij voortgezette

---

[1]) Phot. Korresp. 1907; S. 487.
[2]) Phot. Rundschau. 1907; S. 65 u. 142.
Phot. Korresp. 1907. S. 233 u. 384.
[3]). J. M. EDER. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1899; S. 289.
[4]) J. M. EDER. Handb. d. Phot. 1906; Bd. I; T. 2; S. 312.
[5]) LÜPPO-CRAMER. Phot. Probleme, 1907; S. 150.
[6]) Phot. Korresp, 1907; S. 168.
[7]) J. M. EDER. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1896; S. 55.

belichting de z. g. tweede omkeering der solarisatie zou men dan weder kunnen toeschrijven aan een nieuw gevormd γ-zilversubhaloïd, of aangezien de derde omkeering niet meer gekonstateerd is, aan een metallische zilverkiem of, wat eveneens mogelijk is, aan beide.

Hier moet direkt op den voorgrond geplaatst worden, dat volstrekt nog niet buitengesloten is, dat vóór het α-zilversubhaloïd nog één of meer halogeenrijkere subhaloïden gevormd worden, die geen kiemeigenschap bezitten, want eene primaire belichting beneden de „Schwellenwert" van de plaat wijst op plaats hebbende fotochemische ontledingen door het optreden der autosensibilisatie [1]), zoodat de „Schwellenwert" niet identisch met de fotochemische induktie beschouwd kan worden. Evenmin mag uit het bovenstaande de gevolgtrekking gemaakt worden, dat het α- of β-zilversubhaloïd niet uit meer dan één zilversubhaloïd bestaat.

Uit dit alles blijkt dus, dat men lichtgevoeligheid en ontwikkelingsvermogen in geen geval mag identificeeren, zooals algemeen gedaan wordt.

De onhoudbaarheid der bestaande theorieën van het Herschel-effekt van CLAUDET, P. VILLARD, R. W. WOOD en WARNERKE is verklaarbaar door deze foutieve identificeering van ontwikkelbaarheid en lichtgevoeligheid.

Voor het optreden van het Herschel-effekt is noodzakelijk, dat de primaire belichting moet plaats hebben boven de „Schwellenwert" van de plaat. Er moet dus α-zilversubhaloïd gevormd zijn.

Dat door de sekundaire belichting eene regressieve reaktie zou optreden tusschen het α-zilversubhaloïd en het halogeen is daarom niet aan te nemen, omdat bij vergevorderde belichtingen het Herschel-effekt samenvalt met de solarisatie, waarbij reeds gekonstateerd is de vorming van het β-zilversubhaloïd zonder kiemeigenschap. Ook de aangehaalde proeven van W. ABNEY toonen aan, dat een halogeenabsorptie het verschijnsel bevordert. De sekundaire belichting werkt dus zoodanig, dat het door de primaire belichting fotochemisch gevormde α-zilversubhaloïd sneller tot β-zilversubhaloïd is gereduceerd, dan dat zich opnieuw *een even groote hoeveelheid* α-zilversubhaloïd heeft kunnen vormen. (Daarbij kan het geval plaatsgrijpen, dat het α-zilversubhaloïd al geheel fotochemisch ontleed is, vóórdat het zilverhaloïd opnieuw dit heeft kunnen leveren). Dit blijkt uit de bespreking van fig. 6. De fotochemische induktie van het α-zilversubhaloïd ligt dus lager dan de „Schwellenwert" van het zilverhaloïd. *Men heeft*

[1]) Zie hierover: J. M. EDER. System der Sensitometrie phot. Platten. Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wiss. in Wien 1899; IIa; Bd. 108; S. 1407. J. M. EDER u. E. VALENTA. Beiträge z. Photochemie. 1904; Bd. II; S. 48.

bijgevolg in het α-zilversubhaloïd eene stof van grootere lichtgevoeligheid dan het zilverhaloïd.

Wordt bij de sekundaire belichting de hoeveelheid van het oorspronkelijk aanwezige α-zilversubhaloïd overschreden, dan krijgt men weer een normale kopie. De kritische belichting is dus die sekundaire belichting, waarbij dezelfde hoeveelheid α-zilversubhaloïd gevormd wordt als na de primaire aanwezig was. De beste gradatie van de gepolariseerde kopie bij het Herschel-effekt krijgt men dus, wanneer men werkt met zwakkere lichtintensiteiten, zooals de proeven aangeven.

De verbeterde stelling van H. LUGGIN zegt, dat bij eene bepaalde lichtintensiteit de progressieve en de regressieve reaktie's bij het zilverhaloïd in een evenwichtstoestand komen, indien niet het vrijgekomen halogeen verwijderd wordt. Deze verwijdering van het halogeen, hetzij door diffusie, hetzij door chemische sensibilisatoren is dus van overwegenden invloed op het tot stand komen van het Herschel-effect. Het best geslaagde experiment verkrijgt men dus met eene emulsie, die het vrijgekomen halogeen direkt absorbeert, of beter, indien men de plaat tusschen de primaire en sekundaire belichting langeren tijd bewaart, waardoor het vrijgekomen halogeen uit de emulsie diffundeert. Behandelen der plaat na de primaire belichting met een halogeenabsorbeerend middel, zooals W. ABNEY deed is nog eenvoudiger, en we kunnen dus het door H. W. VOGEL [1]) aangegevene judsonblauw als een waarschijnlijk analoog zich gedragende stof opvatten.

Daarom werkt de directe ontleding van het zilverhaloïd met reduktiemiddelen, zooals bij de proeven van J. STERRY en de figuren 5 en 6, waarbij dus het vrijgekomen halogeen gebonden wordt, zoo gunstig op het Herschel-effect.

P. VILLARD's mededeeling, dat niet alle emulsie's even geschikt zijn voor dit experiment, is hiermede begrijpelijk. In de diverse emulsie's heeft men toch (kwalitatief en kwantitief) verschillende chemische sensibilisatoren.

Eveneens wordt nu het wezen der verschijnselen bij de intermitteerende belichting duidelijker.

Dat het effect der ontwikkeling (daarom nog niet de fotochemische ontleding) op het broomzilver-gelatine steeds iets geringer is dan die bij dezelfde hoeveelheid kontinueele belichting werd door W. ABNEY [2]), K. SCHWARZSCHILD [3]) e.a. waargenomen. Vele beginners in de foto-

---

[1]) H. W. VOGEL. Handb. d. Phot. 1890; Bd. I; S. 221.

[2]) Photography 1893; p. 682.
Phot. Archiv. 1893- S. 339.
J. M. EDER. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1894; S. 373.

[3]) Phot. Korresp. 1899; S. 171.

grafie hebben hetzelfde waargenomen bij het tweemaal achtereen maken van een opname van een verschillend objekt op dezelfde plaat. Daarbij kan men zeer goed waarnemen, dat niet de sommeering der beide beelden verkregen wordt, maar dat op de eene plaats het eene, op de andere plaats het andere beeld domineert.

Volgens K. SCHWARZSCHILD hangt het resultaat bij het intermitteeren der belichting o. a. van de verhouding der pauze tot den duur der afzonderlijke belichting af; hoe langer de pauze, des te meer heeft het halogeen gelegenheid door diffusie te ontwijken of door een chemischen sensibilisator geabsorbeerd te worden, des te eer zal de volgende belichting de α-zilversubhaloïdkiem, die lichtgevoeliger is dan het zilverhaloïd, fotochemisch ontleden in β-zilversubhaloïd en halogeen, waardoor het ontwikkelingseffekt, afgezien nog van de opnieuw te overschrijden fotochemische induktie, beneden de som der komponenten zal blijven.

Het verschil in lichtgevoeligheid tusschen het zilverhaloïd en het α-zilversubhaloïd blijkt volgens de vermelde proeven in hooge mate afhankelijk te wezen van de lichtsoort bij de sekundaire belichting. Hoe ongevoeliger het zilverhaloïd en hoe gevoeliger het α-zilversubhaloïd voor eene bepaalde kleur zal wezen, des te beter zal het Herschel-effekt optreden. Hoe geringer dit verschil is, des te sneller zal het zilverhaloïd nieuwe α-zilversubhaloïdkiemen leveren [1]); de polarisatie treedt dan wel waarneembaar op, maar het minimale ontwikkelingsvermogen wordt snel bereikt. Verder is dit natuurlijk ook afhankelijk van de hoeveelheid aanwezige α-zilversubhaloïd, d.i. den duur der primaire belichting. Eene volkomen opheffing van het ontwikkelingsvermogen behoeft dan niet op te treden.

De optredende kleurgevoeligheid bij het Herschel-effekt is dus toe te schrijven aan de kleurgevoeligheid van het α-zilversubhaloïd. Geen enkele andere van de tot nu toe uitgesproken theorieën van het latente beeld vermag dit verschijnsel zoo eenvoudig te verklaren als de subhaloïdtheorie. Bij de subhaloïden heeft men toch te doen met kleurstoffen van geheel andere kleur dan het zilverhaloïd, met dus een geheel ander absorptiespektrum, waarmede de mogelijkheid is gegeven van een geheel andere kleurgevoeligheid, zooals ook werkelijk uit de proeven van O. WIENER [2]) blijkt.

P. VILLARD toonde spektroskopisch aan, dat het grootste verschil tusschen de „Schwellenwert" van het zilverhaloïd en de fotochemische induktie van het α-zilversubhaloïd in het rood ligt, dat dus

---

[1]) Waarschijnlijk verloopen deze fotochemische ontledingen volgens een exponentiaalformule.

[2]) J. M. EDER. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1896; S. 55.

het α-zilversubhaloïd een roodgevoelige substantie is. Stelt men een broomzilvergelatineplaat bloot aan de inwerking van een kontinu spektrum, dan zal de ontwikkelbaarheid bij toenemende belichting voortschrijden van het blauw naar het rood. Terwijl men na ontwikkeling bemerkt, dat bij toenemende belichting de dichtheid der plaat om en in het spektrale blauw toeneemt, verkrijgt het geel, oranje en vooral het rood zelfs bij langere belichtingen slechts een zeer geringe dichtheid. Het blijkt dus, dat de oorzaak, waarom de dichtheid van het beeld in het rood, geel en oranje niet kan toenemen boven een maximum, dat zeer laag is, daarin ligt, dat het α-zilversubhaloïd zelf een veel hoogere roodgevoeligheid bezit dan het zilverhaloïd, zoodat al heel snel een evenwichtstoestand bereikt is, waarbij in een progressief verloopend proces evenveel α-zilversubhaloïd gevormd als vernietigd wordt.

De substantie van het ontwikkelbare latente beeld wordt als identisch beschouwd met het fotohaloïd van M. CAREY LEA. Hoe gedraagt dit zich nu in rood licht?

M. CAREY LEA [1]) stelde zijn rosakleurig fotohaloïd bloot aan de inwerking van een spectrum; terwijl onder alle kleuren het fotohaloïd veranderde, bleef het in 't rood onveranderd: „In the red it remained unchanged". Hieruit blijkt dus, dat de subhaloïdkiem van het latente beeld een andere substantie moet wezen dan het fotohaloïd van M. CAREY LEA.

Het gedrag der RÖNTGEN-stralen is van dat der andere lichtsoorten verschillend. Volgens P. VILLARD, R. W. WOOD, R. LUTHER en W. A. USCHKOFF vertoonen zij bij secundaire belichting geen Herschel-effekt. Men kan dit niet toeschrijven aan totale ongevoeligheid van het α-zilversubhaloïd tegenover de RÖNTGEN-stralen. Wel hebben F. HAUSMANN [2]) e. a. medegedeeld, dat RÖNTGEN-stralen geen solarisatie gaven, dat dus geene vorming van β-zilversubhaloïd optrad, maar P. H. EYKMAN [3]) en later K. SCHAUM en W. BRAUN [4]) konden aantoonen, dat dit wel het geval is. Het α-zilversubhaloïd is dus ook gevoelig voor RÖNTGEN-stralen en het uitblijven van het Herschel-effekt moet toegeschreven worden aan deze oorzaak, dat het zilverhaloïd voor de RÖNTGEN-stralen een evengroote of geringere „Schwellenwert" bezit dan de fotochemische induktie van het α-zilversubhaloïd. Bij de röntgenografie zou dan door de intermitteerende belichting, afgezien van de bij elken slag opnieuw te overschrijden fotochemische induktie,

[1]) Americ. Journ. of Science 1887; Vol. 33; p. 368.
[2]) Fortschritte a. d. Geb. d. R.-Str. 1901; Bd. V; S. 89.
[3]) Fortschr. a. d. Geb. d. R.-Str. 1902, Bd. V, Heft 4.
[4]) Zeitschr. f. wiss. Phot. 1904; Bd. I; S. 382.

geen fotografisch effekt verkregen worden, dat beneden dat van eene eventueel kontinue bestraling zou liggen.

Uit de gewijzigde stelling van H. LUGGIN blijkt duidelijk, hoe de chemische sensibilisatoren door de halogeenabsorptie het fotochemisch ontledingsproces der zilverhaloïden bevorderen. Zij werken dus regressie-verhinderend.

LÜPPO-CRAMER [1]) beschrijft de volgende proef, welke dit bevestigt. Gepraecipiteerd chloorzilver vertoont noch met zilvernitraat, noch met ammoniak, beide chloorabsorbeerende agentien, bij zijne fotochemische ontleding eenige verhoogde lichtgevoeligheid; in eene emulsie, waar dus de snelle ontwijking van het vrijgekomen halogeen verhinderd wordt, bemerkt men de werking van den chemischen sensibilisator. Hieruit volgt dus, dat de chemische sensibilisator in het geheel niet op het zilverhaloïd zelf reageert.

Reeds uit de grootere afwijkingen van den reciprociteitsregel in eene broomzilvergelatineplaat bij zeer zwakke lichtintensiteiten volgt, dat de gelatine geen chemische sensibilisator is, hetgeen ook langs anderen weg experimenteel door LÜPPO-CRAMER [2]) werd aangetoond.

Terwijl de chemische sensibilisatoren bij het uitkopieerproces zeer gunstig werken, is dit bij de zilverhaloïd-emulsie's met ontwikkeling van geen of zelfs schadelijken invloed, waarop LÜPPO-CRAMER [3]) wees. Bedenkt men, dat de α-zilversubhaloïdkiem zelf een zeer lichtgevoelige stof is, die onder halogeenverlies overgaat in het β-zilversubhaloïd, zonder kiemeigenschap, dan is het duidelijk, dat een te aktieve chemische sensibilisator niet de ontwikkelbaarheid bevordert.

Een aantal chemische sensibilisatoren zijn echter tevens oxydatiemiddelen. Uit het voorgaande is gebleken, dat de oxydatie het β-zilversubhaloïd omzet in α-zilversubhaloïd (opheffing der solarisatie), hetgeen men zich kan voorstellen volgens de vergelijking: β-zilversubhaloïd + zuurstof = zilveroxyd (Ag_2O ?) + α-zilversubhaloïd.

Deze reaktie schijnt bij de subbromiden langzaam te verloopen.

Hierdoor kunnen komplikatie's optreden, zoodat de chemische sensibilisator aan den eenen kant de fotochemische reduktie bevorderend, aan den anderen kant weer het gevormde zilversubhaloïd partiëel oxydeert. In dat geval heeft men een voor het ontwikkelingsproces gunstige werking van den chemischen sensibilisator, zooals bij de joodzilverkollodionplaat met zilvernitraat, dat in tegenwoordigheid van

---

[1]) Phot. Korresp. 1901; S. 224.
LÜPPO-CRAMER. Wissensch. Arbeiten 1902; S. 87.
J. M. EDER. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1906; S. 648.

[2]) LÜPPO-CRAMER. Phot. Probleme. 1907; S. 33.

[3]) Phot. Korresp. 1903; S. 25.

licht een sterk oxydatiemiddel [1]) is en het is de vraag of de zoogenaamde opheffing van de solarisatie door zilvernitraat niet eveneens hieraan is toeteschrijven, dus een werkelijke opheffing is.

Laat men zilverhaloïden fotochemisch ontleden, dan bemerkt men daarbij direkt den grooten invloed der korrelgrootte. Terwijl fijnkorrelig chloor- of broomzilver zich snel ontleedt, het laatste in nog snellere mate dan het eerste, blijft de direkt zichtbare ontleding bij grofkorrelige zilverhaloïden daarbij achter. Door de gewijzigde stelling van H. LUGGIN is dit direct verklaarbaar. Aan de oppervlakte der zilverhaloïdkorrel kan het vrijgekomen halogeen beter ontwijken, resp. gebonden worden, in de korrel werkt het regressief, zoodat van buiten naar binnen de progressie zal afnemen.

Ook H. LUGGIN [2]) wijst op hetzelfde bij joodzilver. Doch zelfs in zeer fijn verdeelden toestand heeft de direkt zichtbare fotochemische ontleding niet snel plaats. Het vrijgekomen jodium diffundeert door zijn hooger atoomgewicht niet alleen langzamer, maar is bovendien nog een vaste stof. Door absorptie van dit jodium b.v. door zilvernitraat, treedt direkt zichtbaar de fotochemische ontleding sneller op, zoodat dus verklaarbaar is hoe een lichtgevoeliger zilverhaloïd toch een minder vergevorderde fotochemische ontleding kan geven.

De oppervlakte-ontleding van de zilverhaloïdkorrel wijst tevens de plaats aan, dat hier ook de zetel van het latente beeld te vinden is. Dit is nog te konstateeren uit verdere gegevens. Zoo gaan de door W. SCHEFFER [3]) ontdekte afzettingen der gereduceerde zilverhaloïden steeds uit van de oppervlakte der zilverhaloïdkorrel, hetgeen uit een door dezen gepubliceerd mikrofotogram blijkt. Verder wees LÜPPO—CRAMER [4]) op de afhankelijkheid van de kwantiteit der kleurstof bij de optische sensibilisatie van het te kleuren oppervlak (van de korrelgrootte), bij chloor- en broomzilver.

Is er op gewezen, dat men bij het optreden der solarisatie door de primaire fixeering en sekundaire ontwikkeling kan aantoonen het bestaan van een zilversubhaloïd, dat geen kiemeigenschap voor de ontleding bezit, zoo is daarmede het solarisatieverschijnsel nog niet verklaard.

---

[1]) M. CAREY LEA (Phot, Korresp. 1887; S. 346), zoowel als LÜPPO-CRAMER (Phot. Korresp. 1907; S. 538) toonden aan, dat het zilversubjodide een uiterst gemakkelijk oxydeerbare stof is.

[2]) Zeitschr. f. phys. Chemie. 1897; Bd. 23; S. 611.

[3]) Phot. Rundschau. 1907; Heft 6.

[4]) J. M. EDER. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1902; S. 58.
" " " " " " 1905; S. 61.

Ter verduidelijking wordt in het volgende verondersteld een fotochemische ontleding met direkte binding van het vrijgekomen halogeen

Belicht men een fotografische plaat steeds langer, dan zal het zilverhaloïd steeds α-zilversubhaloïd vormen, welke kiem voor de ontwikkeling is. Uit het Herschel-effekt blijkt evenwel, dat dit α-zilversubhaloïd op zich zelf reeds een zeer lichtgevoelige verbinding is, zoodat niet aan te nemen is, dat er eene voortdurende opeenhooping van kiemen plaats heeft. Het α-zilversubhaloïd ontleedt dus snel in β-zilversubhaloïd en halogeen. Er treedt bijgevolg aan de oppervlakte der zilverhaloïdkorrels een toestand op, waarbij het aantal voorradige kiemen afhankelijk is van vorming en vernietiging.

Neemt de kwantiteit van het overblijvende korrel-oppervlakte-zilverhaloïd af, dan zal de kwantitatieve vorming van het α-zilversubhaloïd ook afnemen en aangezien dit zelf een groote lichtgevoeligheid bezit, zal het gevolg daarvan ook een kwantitatieve afname van het aantal overblijvende kiemen wezen, m.a.w. het ontwikkelingsvermogen neemt af, d.i. de solarisatie treedt op.

Dit verschijnsel is dus geheel afhankelijk van de beschikbare korreloppervlakte (korrelgrootte). Bij zijne experimenteele onderzoekingen wees LÜPPO-CRAMER [1]) meermalen op dit feit.

In werkelijkheid heeft dit natuurlijk niet zoo snel plaats. De verschillende fabrikaten hebben (kwalitatief en kwantitatief) onderling verschillende, chemische sensibilisatoren. Dit geeft met de diffusieverhindering, dat de diverse plaatfabrikaten na een onderling verschillende belichting beginnen te solariseeren.

De thiosulfaatreaktie vertoont verschijnselen, die nu verklaarbaar zijn. De subhaloïden ontleden door het thiosulfaat in zilver en halogeenzilver, dat ten slotte in zilverthiosulfaat omgezet, als dubbelzout in oplossing gaat. In plaats van de α-zilversubhaloïdkiem en het β-zilversubhaloïd komt dus het zilver, dat eveneens de kiemeigenschap bezit, hetgeen uit de ontwikkeling van primair gefixeerde platen blijkt. Sterke solarisatie geeft echter na primair fixeeren bij het ontwikkelen ook nog solarisatie, zoodat de reactie tusschen β-zilversubhaloïd en thiosulfaat in het bindmiddel een langzaam verloopende is, evenals het reeds aangehaalde oxydatieproces. Behandelt men dus een gesolariseerd belichte hooggevoelige plaat met groote korrels, d. i. met een gering oppervlak of m. a. w. een geringe kwantiteit β-zilversubhaloïd, dan zal de reactie in de gelatine sneller afgeloopen zijn dan bij een grootere hoeveelheid β-zilversubhaloïd in

[1]) Phot. Korresp. 1901; S. 350.
LÜPPO-CRAMER. Wissensch. Arbeiten. 1902; S. 41.
LÜPPO-CRAMER. Phot. Probleme 1907; S. 146.

diezelfde gelatine-plaat, zooals bij fijnkorrelige emulsie's. Het ontwikkelingsvermogen zal dus eene vermeerdering (niet te verwarren met versnelling) vertoonen, zoodat al naar de concentratie der gebruikte thiosulfaatoplossing en den duur der inwerking de solarisatie min, meer of totaal opgeheven zal worden.

Dit verschijnsel werd experimenteel waargenomen door KOGELMAN [1]), VIDAL [2]) en E. ENGLISCH [3]) terwijl LÜPPO CRAMER [4]) bij primair gefixeerde hooggevoelige, grofkorrelige platen, die langzamer fixeeren dan fijnkorrelige de solarisatie in het geheel niet meer kon aantoonen.

Analoog werken de rhodaanzouten bij de opheffing der solarisatie.

Bij de polarisatie van SABATIER is de sterke afname (opheffing ?) der ontwikkeling van het reeds verschenen beeld niet aan het afnemen van het aantal kiemen toe te schrijven, aangezien deze reeds hun funktie vervuld hebben [5]). De vermindering van de ontwikkeling kan dan alleen eene afname van ontwikkelingssnelheid wezen, hetgeen te verklaren is uit eene sterke vermindering van de levering der voedingssubstantie. Uit de gegeven theorie der z.g. chemische ontwikkelingsmethode is gebleken, dat het zilversubhaloïd een geringere oplosbaarheid in den ontwikkelaar vertoont dan het zilverhaloïd. Daarom kan het sneller in oplossing gaande zilverhaloïd na de reduktie op de kiem neerslaan, die nog onveranderd op haar plaats blijft. Zoodra dus de sekundaire belichting intensief plaats heeft, zal de voedingssubstantie omhuld worden met subhaloïd, waardoor de ontwikkelingssnelheid verlangzaamd wordt. Dit zal in den ontwikkelaar des te eer geschieden, omdat deze eene halogeenabsorbeerende substantie is.

Ten slotte kan nog gewezen worden op eene mogelijke verklaring van de afwijkingen bij de optische sensibilisatie der fotografische plaat, die zich daardoor kenmerkt, dat op de plaatsen van het spektraal hoogste absorptievermogen een belangrijke vermindering van ontwikkelbaarheid te konstateeren is. Uit de proeven van M. ANDRESEN [6]) blijkt toch, dat de fotochemische ontledingsprodukten in

---

[1]) J. M. EDER. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1895; S. 419.

[2]) Bull. Soc. franç. Phot. 1898; p. 583.

[3]) J. M. EDER. Jahrb. f. Phot. u. Repr. 1901; S. 608.
" " " " " " 1902: S. 79.
" " " " " " 1904; S. 423.

[4]) LÜPPO-CRAMER. Phot. Probleme. 1907; S. 150.

[5]) Er is nog geen enkele grond om aan te nemen, dat deze gereduceerde stof alleen uit α-zilversubhaloïdkiemen zou bestaan, die door de sekundaire belichting overgaan in β-zilversubhaloïd, waardoor de verdere ontwikkeling gestoord zou worden.

[6]) Phot. Korresp. 1898; S. 504.

kontakt blijven met de kleurstof, zoodat het α-zilversubhaloïd eene veranderde kleurgevoeligheid verkrijgt. Daarbij kunnen komplikatie's optreden, wanneer de kleurstof tevens een halogeenabsorbeerder (chemische sensibilisator) is, waardoor zij haar absorbtiespektrum wijzigt of verliest en een daarmede gepaard gaande bevordering der fotochemische ontledingsaktie optreedt.

VI. *Nabeschouwing.*

Uit het voorgaande zijn eenige gevolgtrekkingen te maken, die voor de praktijk van beteekenis kunnen zijn.

Zoowel in het α-zilversubbromide als het jodide zien we stoffen van veel hoogere lichtgevoeligheid dan het overeenkomstige zilverhaloïd. Kon men dus emulsie's samenstellen, waarin deze stoffen naast het zilverhaloïd, dat als voedingssubstantie voor de ontwikkeling onontbeerlijk is, aanwezig zijn, dan zou men niet alleen platen kunnen verkrijgen van hoogere lichtgevoeligheid dan de tegenwoordige, maar een chemische sensibilisator zou daarbij in alle opzichten praktisch te wenschen zijn ter verhindering der regressie. Zulke platen zouden volkomen voldoen aan den reciprociteitsregel en daarom de lichtverhoudingen der te fotografeeren objekten veel nauwkeuriger weergeven, hetgeen b.v. voor de astronomische fotografie van groote waarde kan zijn ter bepaling van de lichtintensiteit der sterren langs fotochemischen weg (Fotometrie).

Het α-zilversubhaloïd is optisch te sensibiliseeren, zoodat zijne toepassing eene belangrijke uitbreiding zou kunnen krijgen. De juiste kleurgevoeligheid van het α-zilversubhaloïd afzonderlijk kennen we nog niet nauwkeurig. (Dat bij de sekundaire belichting de hoogste gevoeligheid in het rood, de geringste in het groen ligt, wijst er met groote waarschijnlijk op, dat het α-zilversubhaloïd eene groene stof is). De vermelde proeven geven overal alleen het verschil van lichtgevoeligheid aan tusschen het zilverhaloïd en het α-zilversubhaloïd. Hoe grooter dit verschil, hoe gunstiger het verkregen resultaat is. Men zou dus het beste moge verwachten bij chloorzilver-platen met α-zilversubjodide en het is de vraag of het laatste zich ook nog niet laat rijpen. Het β-zilversubhaloïd schijnt fotochemisch een groote ongevoeligheid te bezitten, hetgeen voor de praktijk voordeelig kan zijn.

Deze methode geeft direkt gepolariseerde kopieën (positieven bij een kamera-opname). Dit schijnt aan den eenen kant een bezwaar, waar alle afdrukmethoden berusten op het verkrijgen van normale

kopieën (negatief-proces). Maar dan moet men bedenken, dat op dit gebied nog zeer weinig onderzoekingen zijn gedaan.

Voor de direkte [1]) kleurenfotografie met naast elkander liggende kleurelementen onder de emulsie, volgens het systeem van L. Ducos du Hauron, (hetgeen vooral den laatsten tijd een groote toekomst belooft), welke direkt gepolariseerde kopieën noodig heeft en deze nu alleen nog langs indirekten weg weet te verkrijgen, zou deze methode ook van praktische waarde wezen.

In deze richting is fotochemisch nog weinig geëxperimenteerd en dan nog zonder zich rekenschap te kunnen geven van de optredende verschijnselen, zoodat we voorloopig niet al te pessimistisch hiertegenover behoeven te staan.

VII. *De beeldvorm bij het Herschel-effekt.*

Voor den beeldvorm van het Herschel-effekt kan verwezen worden naar fig. 8.

Het is begrijpelijk, dat de normale kopie na de kritische belichting weer een oppervlaktebeeld is. Is een groot gedeelte van het voorhandene oppervlak-zilverhaloïd reeds ontleedt in het α-zilversubhaloïd en halogeen, dan zal de sekundaire belichting niet meer opnieuw zooveel α-zilversubhaloïd kunnen vormen, dan wanneer de primaire belichting niet had plaats gehad. Men krijgt dan een plaats met geringere dichtheid dan bij een van te voren onbelichte plaat. Dit geval heelft men bij de lucht a van fig. 5.

Bij vergevorderde primaire belichting kan dit solarisatie ten gevolge hebben, waarbij dan het nog voorhanden oppervlak-zilverhaloïd niet meer dezelfde kwantiteit kiemen kan leveren als van te voren aanwezig was: dan valt het Herschel-effekt samen met de solarisatie en is de kritische belichting niet meer te konstateeren.

De grootere lichtgevoeligheid van het α-zilversubhaloïd ten opzichte van die van het zilverhaloïd is ook merkbaar uit de halo. In fig. 5 treedt deze bij de bladerkroon van den boom op, terwijl de huizen

---

[1]) Ik noem deze methode uitdrukkelijk „direkt", omdat ik mij niet kan vereenigen met de uitspraak van een aantal anderen, die haar onder de indirekte methoden willen klassificeeren. Men zegt, het is geen direkte kleurenfotografie, maar driekleurenfotografie, daarbij negeerende, dat de verbleekingsmethode, die men wel tot de direkte methoden rekent, eveneens driekleurenfotografie is. Ook met A. v. Hübl's klassifikatie (Phot. Rundschau. 1908; S. 2) kan ik mij niet vereenigen, waardoor het verbleekingsproces naar de indirekte methoden zou verwezen worden. Het verschil is toch alleen maar methodisch, d. w. z. of men direkt na belichting (met ontwikkeling) de kleuren verkrijgt of eerst door latere toevoeging.

om de lucht bij *a* daarvan niets te zien geven ; daarbij was de halo te zwak om de „Schwellenwert" van het zilverhaloïd te overschrijden. In fig. 6 vertoonen de donkere loodranden van het venster door de halo eveneens de vernietiging van de kiem ; daarentegen was deze bij sterkere inwerking rechts in staat opnieuw kiemen te formeeren.

Dat het verschil in lichtgevoeligheid tusschen de kiem en het zilverhaloïd groot is, blijkt uit de ruggen der honden en de schouders der rechtsche vrouwenfiguur in fig. 5. De smalle blanke strook geeft aan, dat nog een tijd, nadat aan het vrije oppervlak de kiemen geheel vernietigd waren, het zilverhaloïd eerst opnieuw begon kiemen te leveren, vanaf de sterkst belichte gedeelten te beginnen naar de zwakkere. Bij toenemende lichtinwerking moeten deze strooken dus smaller worden, hetgeen de figuur ook aangeeft, waar de linksche hond een sterkeren glans had dan de rechtsche.

Geheel anders zijn de blanke strooken langs den rand der donkere voorwerpen op den achtergrond links. Deze zijn geheel aan irradiatie toe te schrijven, want bij sterkere lichtintensiteitsverschillen naast elkander zijn zij breeder dan bij zwakkere.

Bij zeer nauwkeurige waarneming met schuin reflekteerend licht bemerkt men, dat deze blanke strooken een grooteren glans bezitten dan de direkt daaraan grenzende omgeving. Aan den linkerkant der bladerkroon is dit beter te zien dan aan den rechter kant. Het licht van de muur heeft links sterker ingewerkt dan rechts en vertoont niettegenstaande de polarisatie der kopie een grootere dichtheid. Van een overschrijden der kritische belichting is daarbij geen sprake.

Ook dit verschijnsel is volgens de gegeven theorie verklaarbaar. Daarbij werd toch aangegeven, dat dan eerst de kritische belichting overschreden wordt, wanneer de sekundaire belichting eene grootere hoeveelhetd *a*-zilversubhaloïd had geformeerd, dan van de primaire belichting aanwezig was. Dus na het overschrijden van de „Schwellenwert" van het zilverhaloïd kan opnieuw een oppervlaktebeeld ontstaan, kan opnieuw de dichtheid toenemen en zal tevens de kopie nog gepolariseerd blijven.

Al de abnormaliteiten in de figuren 5 en 6 zijn hiermede verklaard.

Ten slotte betuig ik nog mijnen dank aan den Heer P. H. Eykman voor het beschikbaar stellen en opsporen van materiaal en de voortdurende belangstelling in mijn werk.

[illegible]

Histologie — De Heer HAMBURGER biedt een mededeeling aan over: *„Een methode van koude injectie van organen voor histologische doeleinden."*

Reeds geruimen tijd heeft men de behoefte gevoeld, om bij injecties voor histologische doeleinden, de warme massa, waarvoor gewoonlijk gekleurde gelatine werd gebruikt, te vervangen door koude; niet alleen, omdat bij het gebruik van warme massa de toch reeds moeilijke techniek gecompliceerd wordt door de zorg om het orgaan en de massa op lichaamstemperatuur te houden, maar ook, omdat in een warm waterbad de structuur der weefsels niet zelden nadeel ondervindt. Daarom stelde in 1888 TAGUCHI [1]) voor, om tot dit doel een suspensie van Japansche Oost-Indische inkt in water te gebruiken, doch GROSSER [2]) wees op het bezwaar, dat bij de behandeling der coupes niet zelden de geïsoleerde korreltjes, zooal niet uit de kleinere, dan toch uit de grootere vaten vallen; en reeds bij het snijden worden zij niet zelden over de sneevlakte verstrooid. Hij zocht dus naar een bindmiddel, en wel een zoodanig dat na de injectie gemakkelijk in vasten toestand kan gebracht worden, en vond toen, dat geknipt en daarna gefiltreerd kippeneiwit tot dit doel zeer geschikt was.

Toen ook wij van deze methode wenschten gebruik te maken, deed zich het bezwaar voor, dat wij op die wijze geen licht vloeibare massa konden verkrijgen. Steeds vormde zich bij het voorgeschreven wrijven van het stukje Oost-Indische inkt over een matte glazen plaat aan de oppervlakte een membraan. Verder bleek, dat de aldus bereide suspensie, in een fleschje bewaard, na 24 uur een vaste massa was geworden, hoewel verdamping was uitgesloten.

Waarschijnlijk moest dit toegeschreven worden aan de Oost-Indische inkt, waarvan gelijk bekend is, vele qualiteiten in den handel voorkomen. Maar het gelukte niet een betere soort te verkrijgen.

Wij hebben toen getracht dit bezwaar te ondervangen, door de eiwitoplossing te vermengen met *vloeibare Oost-Indische inkt*, zooals die in den handel te verkrijgen is onder den naam van „Günther-Wagner'sche flüssige Perltusche," en wel in de volumetrische verhouding van 1 op 1. Er ontstond dan een dun vloeibare massa, die, met het mikroskoop bezien, slechts uiterst kleine partikeltjes bevatte, verkeerende in Brown's moleculair-beweging.

Na de injectie van deze vloeistof werd het orgaan gefixeerd in sublimaat-formol, waardoor het geïnjicieerde eiwit kon neerslaan. Na

[1]) Archiv. f. Mikrosk. Anatomie, 31 p. 565, 1888.

[2]) Zeitschr. f. Wissenschaftliche Mikroskopie, 17, p. 187, 1900.

de gebruikelijke uitwassching met I-houdend water, werden stukken der organen met aluincochenille gekleurd en daarna op de gewone wijze in paraffine ingebed. Bij het mikroskopisch onderzoek bleken nu de bloedvaten te zijn gevuld met een *volkomen homogeen zwarte* massa.

Deze methode biedt boven die van GROSSER het voordeel aan, dat van een membraanvorming of van een vastworden der injectievloeistof reeds vóór de inspuiting niets te duchten is, en ook vordert de bereiding der suspensie *veel minder tijd.*

Nog in andere richting hebben wij de methode vergemakkelijkt, door namelijk het kippeneiwit te vervangen door *bloedserum.* Vermenging van 3 vol. bloedserum met 2 vol. van de genoemde Oost-Indische inkt, gaf uitstekende resultaten.

Het bloedserum behoeft niet van dezelfde diersoort afkomstig te zijn. Zoo gebruikten wij voor injecties van caviae en van konijnen met goed gevolg paardeserum en runderserum, vloeistoffen, die men op gemakkelijke wijze kan verkrijgen.

Ook hier werd de fixatie met behulp van sublimaat-formol bewerkstelligd.

Tot dusverre werden nieren en lever mikroskopisch onderzocht. Maar de injectie-massa drong ook in huid, spieren en hersenen binnen.

Het lag voor de hand, om nu ook suspensies van karmijnkorreltjes in serum te beproeven, doch deze experimenten mislukten omdat de karmijn-partikeltjes samenklonterden. Misschien laten zich echter mengsels van opgeloste karmijn of van colloïdale stoffen met serum bereiden, welke goede resultaten geven.

Bovenbeschreven proeven werden verricht in gemeenschap met de Heeren G. A. KALVERKAMP en J. F. DE BOER, med. stud. te Groningen.

Groningen, Maart 1908.

Plantkunde. — De Heer S. H. KOORDERS biedt eene voortzetting aan van zijne „*Bijdrage N°. I tot de kennis der Flora van Java.*" (Voortzetting)[1]).

§ 3. Over de geographische verspreiding, de standplaatsvoorwaarden en de verspreidingsmiddelen der in de hoogste bergstreken van Java wildgroeiende Aceraceae.

§§ 1. Synonymie en geographische verspreiding.

Tot deze familie, die bij BENTHAM en HOOKER Gen. Pl. en bij BOERLAGE Handleid. Flora N. I. een deel uitmaakt van de *Sapindaceae* worden 2 geslachten gerekend; slechts één (*Acer*, LINN.) er van komt op Java wildgroeiend voor. Van het geslacht *Acer* zijn ongeveer 50 soorten bekend; slechts een ervan (*Acer niveum* BL.) behoort tot de flora van Java en is aldaar dikwijls in de hoogere bergstreken (o. a. zelfs nog op 2550 meter zeehoogte) wildgroeiend waargenomen.

Door enkele schrijvers o. a. door PAX l. c. worden voor Java twee variëteiten onderscheiden, welke door BLUME als soorten beschouwd werden: *Acer niveum* BL. *genuinum* PAX en *A. niveum* var. *cassiaefolia* (BL.) PAX. Hiervan heeft volgens PAX l.c. de eerste breedelliptische of eivormige bladeren met afgeronden voet en een sneeuwwitte onderzijde, de andere langwerpige bladeren met spitsen voet en een blauwgrijze onderzijde. Het type is te Buitenzorg in Herb. Kds. vertegenwoordigd door exemplaren van den G. Gedé (Herb. Kds. 12645 β) en de variëteit door exemplaren van Takóka (Herb. Kds. 7251 β). Verreweg de meeste exemplaren (o. a. ook vele van den Gedé) behooren echter tot geen van beide vormen, daar zij verschillende eigenschappen op allerlei wijze vereenigen. Daarom moeten de beide variëteiten slechts als uiterste vormen van eenzelfde, min of meer variëerende[2]) type beschouwd worden. Opmerking verdienen nog eenige exemplaren in Herb. Kds., waarvan de bladonderzijde (in gedroogden toestand) groen schijnt te zijn, o. a. Kds. 7265 β van den G. Slamat, die daardoor, alsook door een begin van tandjes aan den bladrand, tot *A. laevigata* WALL., beginnen te naderen. Voorts moet ook Kds. 7267 β van Pringombo in het oog worden gehouden, waarvan de in levenden staat van onder bleekblauwgrijze bladeren niet van *A. oblongum* zijn te onderscheiden.

[1]) Vervolg van p. 658 v. h. Verslag v. d. Gew. Vergad. Wis- en Natuurk. Afd. der Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam v. 29 Febr. 1908.

[2]) In zijne laatste monographische bearbeiding der *Aceraceae* zegt echter PAX l.c. (1902) 31 ook reeds, dat de vroeger door hem afgescheide varieteit *cassiaefolium* (Bl.) PAX ternauwernood van het type afwijkt.

De kleur der gedroogde specimina is echter in het algemeen, maar in het bijzonder ook bij deze soort, zeer afhankelijk van de wijze en den duur, waarop het herbarium gedroogd werd (vergel. KOORDERS en VALETON Bijdr. Booms. Java IX (1903) p. 256).

Acer niveum BL. Rumphia III (1847) 193 t. 167 B. f. 1; HIERN in HOOK. Fl. Br. Ind. I, 693; PAX Monogr. d. Gattung Acer in ENGL. Botan. Jahrb. VII, 207; PAX in ENGLER Pflanzenreich Heft 8 IV, 163 (1902) 31; KOORD. et VALETON l.c. 254; — *A. laurinum* HASSK. in Tijdschr. v. Nat. Gesch. en Physiol. X (1843) 138 (nomen tantum); MIQ. Fl. Ind. Bat. I, 2 (1859) 582; — *A. javanicum* JUNGH. in Tijdschr. Nat. Gesch. en Physiol. VIII (1841) 391 (nomen tantum); — *A. cassiaefolium* BL. l. c. f. 2.

Geographische verspreiding buiten Java: Achter-Indië: „Assam, hills of Martaban and Tenasserim" (BRANDIS Indian trees 181). „Assam en Burma" (volg. PAX l.c.) Maleische Archipel: Sumatra (JUNGH.! in Herb. Lugd. Bat.); in N. O. Celebes in de Minahasa op het Lolomboelangebergte (Herb. Kds in Mus. H. Hort. Bogor; vergel. KOORD. Verslag botan. reis N. O. Celebes (1898) p. 409). Ook door WARBURG (verg. PAX l.c. 31) in Celebes verzameld.

Geographische verspreiding en standplaatsvoorwaarden op Java: Blijkens Herb. Kds zoowel in West- en Midden-Java, alsook in Oost-Java van 700—2550 m. zeehoogte op de volgende punten in 1888—1903 verzameld, namelijk op de volgende punten in Java gevonden: In de res. Bantèn op den G. Karang op 1000 m. boven Tjimanoek en op den G. Poelasari op 1050 m. bij bivak Kihoedjan (beide in de afd. Pandeglang). In de res. Preanger: 1) op den G. Gèdé bij en boven Tjibodas op 1450 m., 1600 m., enz, en ook op 2200 m. zeehoogte; 2) bij Takoka op 1200 m. in de Djampangs; 3) bij Pangentjongan op den Galoenggoeng (in de afd. Limbangan op 1250 m,, 1400 m., en op 1800 m. zeehoogte; bij 4) Tjigenteng op het Kèndeng Patoeha-gebergte op 1450 m. en 1600 m. zeehoogte. In de res. Tègal-Pèkalongan op den G. Slamat boven Simpar op 1400 m. zeeh. en boven Soerdjå op den N.-W. Prahoe op 1400 m. In de res. Kĕdoe op 2200 m. op den G. Kĕmbang boven Bĕdaka en op 2500 m. op den hoogsten top van het Prahoe-Diëng gebergte. In de res. Banjoemas op het Midangan-gebergte bij Pringambå op 800 m. zeehoogte. In de res. Sĕmarang op den G. Oengaran en G. Tël mâjå op ongeveer 1400 m., o.a. boven Sĕpakoeng.

In de res. Madioen op het Wilis-gebergte boven Ngèbèl tusschen 1400 m. en 2000 m. (aldaar niet op grooter hoogte verzameld). In de res. Prâbâlingâ-Pasaroehan op het Tèngger-gebergte op 2000 m. bij Ngadisari. In de res Bèsoeki op het Idjenplateau bij bivak Oengoep-oengoep op 1700 m. zeehoogte. Tot heden dus bekend van de res. Banten (in West-Java) tot in de res. Bèsoeki (in Oost-Java) van 700 m. tot op 2550 m. zeehoogte. — Voorkomen: In Java niet gezellig groeiend, maar in sommige bergwouden, o.a. in West-Java op den G. Gèdé nogal veelvuldig voorkomend. — Standplaatsvoorwaarden: Op gronden, waar constant groote waterarmoede heerscht of waar door hoog gehalte aan zouten physiologische droogte gevonden wordt, zoomede op kalk- en op keukenzouthoudende gronden is deze soort op Java door mij nog niet waargenomen; evenmin groeit die soort aldaar op periodiek sterk uitdrogende gronden. Zij groeit bijna uitsluitend op constant-vochtige humeuze vruchtbare vulkanische gronden in schaduwrijke, dichtgeslotene hoogstammige bergwouden, die uit een groot aantal boomsoorten bestaan. In de heete laagvlakte, ook zelfs in constant-vochtige streken komt de soort niet voor. De laagst gelegen vindplaats ligt op ca 700 m. zeeh. in een ravijn in Oost-Java, de hoogste op bijna 2550 m. zeeh. in Midden-Java. Uit eene in 's Rijks Herbarium door mij gevonden herbariumaanteekening van Junghuhn bij een door dezen onderzoeker op het Diëng-plateau op ca. 2000 m. zeeh. nabij de Kawah-Tjondro-dimoeko verzameld specimen meen ik tot de mogelijkheid te moeten besluiten, dat *Acer niveum* soms, zij het ook bij groote uitzondering voorkomt op dergelijke door zouten bezwangerde physiologisch-droge gronden. Ik heb hier nog geen andere gegevens te mijner beschikking, waaruit met zekerheid opgemaakt kan worden of deze soort niet slechts „nabij" maar ook inderdaad „op" dergelijke gronden op Java voorkomt. — Bladafval: Op hetzelfde tijdstip stonden op dezelfde standplaats (in hetzelfde bosch vlak naast elkander) twee schijnbaar even oude individuen. Daarvan stond op 2 Juni 1898 het eene in vol (oud) blad, terwijl het daarnaast staande exemplaar zoo goed als geheel bladerloos stond, behalve één tak, die jong loof droeg. Op 23 Maart 1893 stond een der voor het onderzoek genummerde boomen (dezer soort) bij Takóka, ofschoon te midden van toen nagenoeg alle in vol blad staande boomsoorten, geheel en al bladerloos. — Bloei- en vruchttijd: Bloemen verzameld in Juni en Juli. Vruchten verzameld in Juli, Aug., Sept. en Nov. — Habitus: Woudreus, die zelfs in het dichtste oerwoud zijn aanwezigheid onmiddellijk verraadt door de van onderen vrij-lang grijs-wit blijvende kleur der op den grond liggende afgevallen bladeren en soms ook door de karakteris-

tieke vleugelvruchten. De grijswitte of blauwachtiggrijze kleur der bladeren trekt ook bij de levende plant opmerkzaamheid. In den bloeitijd trekt verder deze woudreus de aandacht, doordat hij dan bijna bladerloos staat en voorkomt te midden van bijna uitsluitend altijd groene boomsoorten. In zeer hooge bergstreken, op 2000 m. zeehoogte in West- en Midden-Java (o. a. Preanger, Bagèlen) trekt deze soort de aandacht door de voor die zeehoogte nog aanzienlijke afmetingen van dezen boom, die bijv. op 2200 m. zeehoogte op den G. Kèmbang bij Bĕdaka nog ½ m. stamdiameter bij 20 m. kruinhoogte had. — De hierboven vermelde op Java betrekking hebbende gegevens over standplaatsvoorwaarden en geographische verspreiding zijn ontleend aan mijne grootendeels in K. en V. l.c. 257—258 gepubliceerde, in 1888—1903 in Java gedane waarnemingen. — In 's Rijks Herbarium te Leiden en Utrecht vond ik bij de aldaar thans door mij geraadpleegde, door JUNGHUHN, BLUME, REINWARDT, etc., in Java verzamelde herbarium-specimina geen bijzondere gegevens over standplaatscondities dezer soort vermeld; meestal stond op de etiketten slechts „Java" zonder andere aanwijzingen.

§§ 2. Verspreidingsmiddelen.

Als verspreidingsmiddelen dienen alleen de als *samara* bekende vruchten, deze zijn wel in hoofdzaak op windverspreiding aangewezen, maar schijnen op grond van een door mij genomen proef, bovendien ook geschiktheid voor transport te water te bezitten. Althans, indien zij goed droog zijn, blijven zij meer dan 6 dagen op een 3½ % keukenzoutoplossing drijven. Zij worden bij deze soort op Java zoover bekend, slechts eens per jaar, maar meestal in zeer groot aantal tegelijkertijd voortgebracht. Hoewel de vleugelvruchten nogal zwaar zijn, nl. in gedroogden toestand (met inbegrip van de vleugels, die veelal 5 cm. lang bij 2 cm. breed zijn) ca. 100 milligram wegen, en hoewel ik nooit op Java eenige aanwijzing kon constateeren, dat de vruchten ook door dieren verspreid zouden worden, heeft blijkens de hierboven opgegeven talrijke vindplaatsen de verspreiding toch gemakkelijk plaats. Het voorkomen dezer soort uitsluitend in de hooge bergstreken van verschillende nog werkzame vulkaankegels op punten, welke 40 Kilometer of meer in rechte lijn van elkander verwijderd en gescheiden zijn door heete laagvlakten, waar deze soort in Java thans nooit in het wild aangetroffen is, geeft den schijn, dat op Java de windkracht der hoogere bergstreken voldoende zoude zijn voor het transport over 40 K.M. afstand van zelfs zulke groote vleugelvruchten als *Acer niveum* bezit.

Maar èn bij deze èn bij de volgende soort (*Dodonaea viscosa*) acht ik het veel waarschijnlijker, dat dit windtransport van zulke groote gevleugelde vruchten slechts over étappes plaats gehad heeft, en ook thans nog alleen over étappes plaats grijpt, hetzij doordat in vroegere tijden tusschen die 30—40 KM. ver van elkander gelegen punten bij andere klimatologische condities het in het wild voorkomen van die beide soorten in de laagvlakte nog op gronden mogelijk was, waar de oorspronkelijke groei tegenwoordig niet meer mogelijk is, hetzij doordat ook bij de tegenwoordige klimaatsvoorwaarden thans nog wel een enkel aan de aandacht ontsnapt exemplaar van die beide soorten tusschen die zoo ver van elkander verwijderde punten zal blijken voor te komen, hetzij doordat het windtransport in hoofdzaak niet direct door de lucht geschiedt, maar hoofdzakelijk in étappes, waarbij de vruchten langer of korter tijd op den grond of drijvende op het wateroppervlak blijven liggen; in het laatste geval natuurlijk, totdat zij aan den oever aanspoelen en dan door wind verder getransporteerd worden.

Het overzeesche oorspronkelijke voorkomen van deze op Java wildgroeiende *Acer* met schijnbaar uitsluitend voor windtransport ingerichte vruchten en wellicht ook van eenige andere aldaar groeiende tot andere geslachten of andere families behoorende species met physiologisch gelijksoortig gebouwde en tot dusver slechts als anemophil te boek staande vruchten of zaden laat zich, naar mij toeschijnt, goed verklaren door een combinatie van windtransport in étappes te land en van transport te water, maar niet uitsluitend door z.g. direct windtransport. Zulk gecombineerd transport mag bijv. blijkens een door mij genomen proef voor de zeer ver buiten Java verspreide *Casuarina equisetifolia* FORST. aangenomen worden, niettegenstaande de vruchtkegels dezer soort, blijkens de door GUPPY (vergel. ERNST l. c. p. 56) genomen en door mij met gelijk resultaat herhaalde drijfproeven reeds na 1 of 2 dagen zinken. Ik vond namelijk, dat de uit de vruchtkegels, bijv. door drogen, bevrijde, gevleugelde vruchtjes op een $3^1/_2$ % keukenzoutoplossing zelfs na tien dagen nog alle dreven.

Hier zij nog opgemerkt, dat deze soort eerst vruchten draagt op hoogeren leeftijd, wanneer de boom reeds een aanzienlijke kruinhoogte bereikt heeft. Deze eigenschap is wellicht van nut voor deze soort, omdat zij meestal verstrooid in gesloten altijdgroene hoogstammige heterogene bergwouden aangetroffen wordt. Voor deze blijkbaar in hoofdzaak op windverspreiding aangewezene species staat vermoedelijk die eigenschap in verband met de voor haar oor-

spronkelijk voorkomen noodzakelijke standplaatsvoorwaarden en is die eigenschap door natuurlijke selectie ontstaan. Want in de meestal zeer dicht gesloten vochtige javaansche bergwouden zijn alleen die soorten in gunstige condities voor windverspreiding, bij welke de vruchtdragende takken geheel of gedeeltelijk boven het gesloten bladerendak der omliggende boomkruinen uitsteken.

Met het oog op dit waarschijnlijke verband tusschen de groeivoorwaarden, den vruchttijd en het verspeidingsmiddel van *Acer niveum* zij hier geciteerd wat o.m. door VOGLER [1]) over een dergelijk verband voor andere soorten met dergelijke, als bij Acer voorkomende, groote gevleugelde vruchten meegedeeld wordt.

„... Derartige Arbeiten erhielten einen viel grösseren Werth, wenn sie einem Zusammenhang oder auch nur Paralellismus zwischen den ähnlichen Verbreitungsmitteln und anderen durchgehenden biologischen Verhältnissen der betreffenden Arten nachgingen. Eine ganz kleine Untersuchung dieser Art bietet LUBBOCK [2]) in dem er nachweist, dass von 30 Gattungen, ""figured as having seeds or fruits with a long wing, known as a *Samara*"", alle zu den Bäumen oder Kletterstäuchern gehören, keine einzige zu den niedrigen Kräutern" (VOGLER l.c.).

§ 4. Over de geographische verspreiding, de standplaatsvoorwaarden en verspreidingsmiddelen der in de hoogste bergstreken wildgroeiende Sapindaceae.

Tot de Sapindaceae, zooals die in ENGLER u. PRANTL Nat. Pflz. door RADLKOFER begrensd zijn, behooren ongeveer 73 geslachten met ruim 600 soorten, Hiervan komt op Java slechts een enkele soort in de hoogste bergstreken wildgroeiend voor, namelijk : *Dodonaea viscosa* (LINN) JACQ.

§§ 1. Synonymie van Dodonaea viscosa.

Dodonaea viscosa (LINN.). JACQ. Enum. Pl. Carib. 19, *non* SIEBER, *non* Mart.; HIERN. in HOOK. Fl. Br. Ind. I, 697; KURZ For. Flora I, 287; BRANDIS Indian trees (1906) 186; HASSK. Pl. Jav. var. 292; KOORD. en VALETON Bijdr. Booms. Java IX (1903) 226; — *D. angustifolia* BLANCO Fl. Filip. ed. I, 312; — *D. angustifolia* LINN.

---

[1]) VOGLER, P., Ueber die Verbreitungsmittel der Schweizerischen Alpenflanzen in Flora oder allg. botan. Zeitung 89 (1901) p. 2.

[2]) LUBBOCK, Flowers, fruits and leaves. London (1886) p. 79 (geciteerd bij VOGLER l.c.).

f Suppl. 218; — *D. Burmanniana* Dc. Prod. I, 616; — *D. Candollei* Bl.! msc. in Herb. Lugd. Bat. = *D. Candoleana* Blume! Rumphia III, 190; — *D. dioica* Roxb. Hort. Beng. (28); Fl. Ind. II, 256; — *D. Dombeyana* Bl.! in Rumphia III, 189; — *D. ferrea* Jungh.! msc. forma 1, 2 et 3 in Herb. Lugd. Bat.; — *D. jamaicensis* Dc. Rod. I, 616; — *D. Kingii* G. Don, Syst. I, 674; — *D. latifolia* Salib. Prod. 276; — *D. microcarpu* Dc. Prod. I, 617; — *D. montana et littoralis* Jungh. in Java I, ed. II 267; — *D. neriifolia* A. Cunn. ex A. Gray Bot. U. St. Expl. Exped. I. 262; — *D. oblongifolia* Link. Enum. Hort. Berol. I, 381; et in Bot. Reg. t. 1051; — *D. ovata* Dum.-Cours. Bot. Cult. ed. II, 7, p. 327; — *D. Pallida* Miq.! Anal. Bot. Ind. III, 7; — *D. pentandra* Griff. Notul. IV, 548; — *D. salicifolia* Dc. Prod. I, 617; — *D. Schiedeana* Schlecht. in Linnaea XVIII (1844) 33 (err. typ. 49); — *D. senegalensis* Blume! nosc. in Herb. Lugd. Bat.; — *D. spatulata* Sm. in Rees Cycl. XII n. z.; — *D. triquetra* Jungh. in Natuurk. en Geneesk. Arch. Neêrl. Indië II (1845) 36; *non* Andr.; — *D. viscosa* Royen ex Blume!, Rumphia III, 191; — *D. Wightiana* Blume in Rumphia III, 189; *D. Waitziana* Blume! l. i.; — *Dodonaea Zollingeri* Turcz in Bull. Soc. Nat. Mosc. XXXVI (1863) I, p. 587; — *Caryophyllanthes litroreus* Rumphius Herb. Amb. IV, t. 50; — *Ptelea viscosa* Linn. Spec. ed. I, 108.

Voor de zeer omvangrijke synonymie dezer polymorphe, zoowel verticaal als horizontaal, buitengewoon ver verspreide soort, heb ik voor de synoniemen, die op de buiten Nederlandsch Oost-Indië voorkomende soorten betrekking hebben in hoofdzaak de nieuwste literatuur gevolgd, maar heb die zooveel doenlijk getoest aan het zeer rijke materiaal dezer soort in 's Rijks Herbarium te Leiden en Utrecht, terwijl de Nederl. Oost-Indische synoniemen in hoofdzaak op mijn eigen onderzoek van genoemde collecties en op Koord. en Valeton Bijdr. Booms IX l. c. gebaseerd zijn. Uit een en ander blijkt, dat deze boomsoort reeds aan Rumphius (althans de strandbewonende vorm) bekend was en dat zij in verschillende landen onder meer dan 25 verschillende soortnamen door een groot aantal schrijvers als afzonderlijke species beschreven zijn geworden.

Blijkens eene onuitgegeven aanteekening van Reinwardt, die door mij bij een aan het zandige strand van Ternate verzameld herbarium specimen aangetroffen werd, heeft deze onderzoeker reeds ingezien, dat de litorale en montane vorm van de in den Maleischen Archipel groeiende exemplaren van *Dodonaea viscosa* slechts tot één enkele species behooren.

§§ 2. Geographische verspreiding en standplaatsvoorwaarden van Dodonaea viscosa buiten Java.

Blijkens de literatuur en de te Leiden en Utrecht door mij geraadpleegde herbariumcollecties is *Dodonaea viscosa* over de tropische en subtropische gewesten der geheele wereld algemeen verspreid en buiten Java zoowel van zandig zeestrand als in het binnenland tot op 1400 m. zeehoogte, bekend. — BRANDIS [Indian trees (1906) 187] geeft op: „Trans Indus, Afghanistan and Beluchistan. Common locally, often covering extive tracts in the drier regions of North-West and Central India as well in the Deccan. Also on the seacoast" (BRANDIS l. c.). In 's Rijks Herbarium te Leiden zag ik een authentiek herbariumspecimen van *Dodonaea arabica* HOCHST en STEUD, dat blijkens de aangehechte etikette op 8 Dec. 1835 door W. SCHIMPER (den vader van den plantengeograaf F. W. SCHIMPER) op 4000 (1330 meter) zeehoogte op den top van den berg Kara in Hedschas (in Arabië) verzameld geworden. Volgens HOOKER Flora Br. Indla l. c. is dat specimen identiek met de algemeen verspreide *Dodonaea viscosa* (L.) JACQ. Die meening van HOOKER is ongetwijfeld juist. En m. i. is het voorkomen van de littorale *D. viscosa* (L.) JACQ. boven op den genoemden bergtop gemakkelijk verklaarbaar door aan te nemen, dat de standplaats, waar SCHIMPER deze *Dodonaea* verzamelde buitengewoon waterarm was. In 's Rijks Herbarium te Leiden zag ik verder een specimen van *Dodonaea viscosa* L. (det. P. HENNINGS) van Herb. SCHLAGINTWEIT dat in Panjab in N.W. Voor-Indië op 15—28 November 1855 op 650—850 m. zeehoogte verzameld is geworden en voorts ook een ten rechte als *Dodonaea viscosa* gedetermineerd specimen van Herb. FIEBRIG no. 2501, dat in Oost-Bolivia (Zuid-Amerika) op 1400 meter zeehoogte in 1903—1904 verzameld was. Blijkens een door mij in genoemd Rijks Herb. gezien herbarium specimen van HOOKER en THOMSON uit den Himalaya groeit aldaar de met *Dodonaea viscosa* synonieme *D. Burmanniana* D. C. van 0—600 meter zeehoogte. In 's Rijks Herbarium zag ik verder een herbarium specimen, dat blijkens de etikette in 1841 door FORSTEN in de Molukken „op uitgebreide lavastroomen" in Ternate verzameld en door BLUME als *Dodonaea Candollei Bl.* var. *minor* BLUME gedetermineerd is. Zonder twijfel is dit m. i. slechts de gewone *Dodonaea viscosa* (L.) JACQ,

§§ 3. Geographische verspreiding en standplaatsvoorwaarden van Dodonaea viscosa in Java.

Op grond der in 1885—1906 door mij in Java gedane waarnemingen en verzamelde herbariumspecima kunnen hieronder de volgende, gedeeltelijk reeds in KOORD. & VALETON l. c. gepubliceerde gegevens over de verticale en horizontale verspreiding en over de standplaatsvoorwaarden van *Dodonaea viscosa* (LINN.) JACQ. in Java medegedeeld worden.

Zoowel in West- en Midden- als in Oost-Java op zandig strand, verder in Midden- en Oost-Java op en boven 1450 m., vooral boven 1800 m. en nog op 2600 m. zeehoogte. Blijkens Herb. Kds in Java op de volgende plaatsen verzameld: In West-Java: Bij Tjemara in Z. W. Banten op het vlakke zandige zeestrand groeiend. In de Zuid-Preanger bij Palaboehanratoe ook op het zandige zeestrand. In Midden-Java: op den G. Prahoe op 2000 m. op het Prahoe-Diëng-gebergte langs het pad van Soerdjå naar het Diëng-plateau in de res. Tegal-Pekalongan. Bij Sepakoeng (res. Semarang) op de G. Tèlemåjå op ongeveer 1700 m. en ook in de res. Semarang op den G. Merbaboeh boven Andongtjemoro op ongeveer 1600 m. In de res. Kedoe op den G. Sendårå bij Kledoeng op ongeveer 1600 m. In de res. Madioen op den G, Wilis boven Ngèbël op 1450 m. en bergopwaarts tot op 2000 m. zeehoogte. In de res. Pasoeroehan-Probolinggo op den G. Ardjoenå boven Malang op ongeveer 2100 m. en op het Tènggèr-gebergte boven Tosari en Ngadisari nog op 2600 m. zeehoogte. In de res. Besoeki op het Idjen-plateau nabij het bivak Oengoep-oengoep op 1700 m. en op den Kèndèng-rug boven Pantjoer op 1700 m., zoomede op het zandige zeestrand van Gradjagan en op het zandige strand van Poeger (resp. aan de Zuidkust van de afd. Banjoewangi en Djember). In de streken, welke gelegen zijn tusschen de bovengenoemde hooggebergte-vindplaatsen en de strandvindplaatsen geheel en al ontbrekend, maar daarentegen op de plaatsen, waar deze *Dodonaea* (*D. viscosa*) optreedt, meestal òf gezellig groeiend en grootere of kleinere bosschen of boschjes vormende òf althans dan in zeer groot aantal individuen voorkomend. — Standplaatsvoorwaarden: Uitsluitend beperkt tot physiologisch droge standplaatsen en wel òf tot de droge hooggebergte streken van Midden- en Oost-Java boven 1400 m. zeehoogte òf tot het door zoutrijkdom physiologisch-droge zeestrand. Aan het strand is de soort door mij zoowel in West- als in Oost-Java geconstateerd. (Vergelijk ook hieronder bij „Verspreidingsmiddelen" en verder in K. & V. l. c. 229).

§§ 4. Verspreidingsmiddelen van Dodonaea viscosa.

De opgeblazen, dunwandige, lichte, gevleugelde vruchten zijn niet alleen zeer geschikt voor verspreiding door wind, maar (zooals reeds door enkele schrijvers vermeld en door mij experimenteel bevestigd is bevonden) zijn zij ook voortreffelijk voor transport te water geschikt. Van de door mij in $3^1/_2$ % keukenzoutoplossing gebrachte vruchten dreven ruim 80 % nog na 25 dagen.

De plant draagt op Java reeds op jeugdigen leeftijd, bijv. binnen 2 jaren een groot aantal vruchten.

Uit het door mij in Midden-Java geconstateerde feit, dat deze soort op twee in rechte lijn meer dan 40 Kilometer van elkander verwijderd gelegen vulkanen uitsluitend boven 1400 meter zeehoogte wildgroeiend voorkomt, en in de daarbeneden tusschen die twee vulkanen gelegen laagvlakte met uitzondering van het 30 KM. verafliggende strand geheel en al werd gemist en uit het feit, dat voor zadentransport door dieren bij deze soort tot dusver geen enkel argument aangevoerd kan worden, heeft het hier den schijn alsof de in Midden-Java voorkomende winden in staat zouden zijn om de vruchten van *Dodonoea viscosa* [ofschoon zij bij een oppervlakte van ca. $2^1/_2$ cM^2 ongeveer 0.040 gram zwaar zijn] over meer dan 30 Kilometer te transporteeren.

Dat evenwel buitengewone voorzichtigheid in het trekken der conclusies van windtransport voor zulke groote vruchten noodig is behoeft hier geen betoog. Slechts wil ik verwijzen [1]) naar hetgeen terzake over windtransport hierboven bij *Acer niveum* door mij medegedeeld is. Ook hier bij *Dodonaea* acht ik niettegenstaande den schijn van mogelijkheid van het zóó verre directe transport door wind, toch een windtransport in étappes veel waarschijnlijker.

Voor de buitengewone geschiktheid van transport te water over zeer aanzienlijke afstanden spreekt het algemeene voorkomen aan de tropische stranden der geheele wereld voldoende, dan dat hierbij stil gestaan behoeft te worden.

Het bij herhaling door mij geconstateerde buitengewoon groote weerstandsvermogen tegen waterarmoede in lucht en grond, tegen direct zonlicht, tegen keukenzoutgehalte van den grond en ook tegen sterke winden, zoomede de eigenschap reeds spoedig en zeer rijk vruchten te dragen, die zoowel voor transport door wind als water (ook door zeewater) bijzonder doeltreffend ingericht blijken te zijn, maken het alleszins verklaarbaar, waarom deze boomsoort op Java niet alleen in de alpine streken, maar ook aan het zandig strand

[1]) Vergel. ook VOGLER in SCHROETER l. c. 740.

dikwijls onder de pioniers der nieuwe vegetatie opgemerkt kan worden.

Het nagenoeg volkomen ontbreken dezer soort in de breede strook, welke gelegen is tusschen het strand en de alpine bergstreken zal na het hierboven medegedeelde, met waarschijnlijkheid vooral daarin gezocht moeten worden, dat de kiemplanten, die uit de vermoedelijk ook tusschen die twee verspreidingsgrenzen vallende vruchten te voorschijn komen aldaar door andere plantensoorten verdrongen worden.

En resumeerende schijnt het mij dus toe, dat de schijnbaar grillige verspreiding dezer Sapindacee zich ongedwongen en met een zeer groote mate van waarschijnlijkheid laat verklaren uit de hierboven genoemde eigenschappen en vooral uit die eigenschappen, welke verband houden met de edaphische standplaatsvoorwaarden dezer soort.

§ 5. **Opmerking over eenige in 's Rijks Herbarium te Leiden voorkomende onvolledig bekende Quercus-soorten.**

In KOORD. en VALETON Bijdr. Booms. Java X, 65 zijn aan het slot van de beschrijving van 25 op Java wildgroeiende Quercussoorten als „twijfelachtige en onvolledig bekende soorten" op autoriteit van BLUME Mus. Lugd. Bat. I, 294—304 nog vijf soorten voor Java genoemd, waarvan wij indertijd te Buitenzorg de authentieken niet hadden kunnen vergelijken.

Doordat ik nu in 's Rijks Herbarium te Leiden gelegenheid had de authentieke specimina van BLUME te onderzoeken laat ik hieronder mijne over die specimina gedane waarnemingen volgen.

1. *Quercus Pinanga* BLUME Mus. Lugd. Bat. I (1850) 303.

De in KOORD. en VALETON l. c. 65 geciteerde meening van KING kan ik geheel bevestigen. En de door BLUME l. c. gepubliceerde opgave als zoude genoemde soort „op Java in de bergwouden" voorkomen, moet dus als niet juist beschouwd worden, omdat BLUME blijkbaar zijne diagnose ontworpen heeft naar een te Buitenzorg in den Hortus gekweekt exemplaar van *Quercus glabra* THUNB. (van Japan), die nog in 1903 in geculti veerden toestand in den Hort. Bogor. door mij waargenomen is.

Q. Pinanga BLUME moet dus uit de Flora van Java geschrapt worden en synoniem beschouwd worden met *Q. glabra* THUNB.

2. *Quercus litoralis* BLUME l. c. 303.

Op de authentieke herbarium-etikette stond o. m.: „Quercus litoralis Bl., Java, leg. BLUME, Pasang-laut (Sund)".

Aangezien de inlandsche naam soendaneesch is, kan die soort niet,

zooals BLUME l.c. ten onrechte opgeeft, uit Oost-Java stammen, maar van West-Java en wel vermoedelijk van de Preanger of Banten, vanwaar de meeste der door BLUME verzamelde specimina afkomstig zijn.

Het authentiek houd ik zonder twijfel voor synoniem met *Quercus spicata* SM. var. *gracilipes* KING (vergel. KOORD. en VALETON l. c. 42). Ook deze soort van BLUME moet dus ingetrokken worden.

3. *Quercus glutinosa* BLUME l.c. 304.

Blijkens de authentieke herbarium-etikette van REINWARDT is deze soort door REINWARDT in manuscript *Quercus micans* REINW. benoemd, daarna door BLUME opnieuw benoemd als *Quercus glutinosa* BL. en werd zij niet „in de bergwouden van West-Java" verzameld, maar door REINWARDT anno 1821 bij Tondano in N.O. Celebes gevonden. Hiermede kan ook deze soort uit de flora van Java geschrapt worden. Zij is niet, zooals MIQUEL ten onrechte meende identiek met *Quercus induta* BL., waarmede zij inderdaad in blad wel eenige gelijkenis vertoont, maar de soort is specifiek verschillend van *Q. induta* BL., zooals terecht reeds door DE CANDOLLE en ook door KING (verg. KOORD. en VALETON l.c. 65) vermoed werd.

4. *Quercus sphacelata* BLUME l.c. 304.

Het authentiek van deze soort bestaat uit een tak met bladeren (zonder bladeren of bloemen). Ik houd dit voor een grootbladige loot (bijv. van een stronkuitslag) van *Quercus spicata* SM. var. *gracilipes* KING.

Op de authentieke etikette staat: „*Quercus sphacelata* BL., Pasang, Java, in montanis Moeriah, Herb. Waitz."

5. *Quercus nitida* BL. l.c. 294.

Het reeds in KOORD. en VALETON l.c. 65 uitgedrukte vermoeden, dat deze tot dusver met zekerheid alleen voor Sumatra vermelde soort nog niet tot de flora van Java behoort, kan ik op grond van het materiaal in 's Rijks Herbarium te Leiden thans bevestigen.

Leiden, Maart 1908. (*Wordt vervolgd*).

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 102c uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: „*Isothermen van eenatomige stoffen en hunne binaire mengsels. II. Isothermen van helium bij* — 252° C. *en* — 259° C."

§ 1. *Overzicht der bepalingen.* De metingen geschiedden op dezelfde wijze als die van Med. N°. 102a (Dec. '07). De geheele piezometer had een vier maal grooteren inhoud nl. ongeveer 2 Liter, het piezometerreservoir daarentegen was ruim vier maal kleiner, het was nl. iets meer dan 2 cm³. Dientengevolge zijn de dichtheden waarop de metingen betrekkingen hebben aanzienlijk grooter en liggen zij tusschen 591 en 794 maal de normale. De temperaturen, waarbij de bepalingen werden verricht zijn, gemeten op den waterstofthermometer van Med. N°. 95c.

$$t = -252°.84 \text{ C. en } t = -258°.94 \text{ C.}$$

waaruit door extrapolatie door middel van tabel XXV van Med. N°. 101b (Dec. '07) zie § 3 van Med. N°. 102b volgt voor de temperaturen beneden 0° C. gemeten op de absolute schaal

$$\theta = -252°.84 + 0°.12 = -252°.72$$
$$\text{en } \theta = -258\ .94 + 0°.12 = -258°.82$$

De bepaling van de gemiddelde temperatuur van het gas in den capillairen steel van het piezometerreservoir, wat betreft het gedeelte dat zich boven het bad in den cryostaat bevindt, vereischte hier grootere nauwkeurigheid dan vroeger, doordat ten opzichte van de hoeveelheid van het gas in het kleinere reservoir die in den steel meer in aanmerking kwam. Ten behoeve van de bepaling van deze gemiddelde temperatuur werd naast en ter zelfder hoogte als de capillair een cylindervormig reservoir van dezelfde hoogte als de capillair geplaatst, dat met helium gevuld en van eene inrichting om den druk er in af te lezen voorzien was [1]). Met behulp van dien druk is gemakkelijk met de vereischte nauwkeurigheid af te leiden, welke gemiddelde dichtheid voor het gas in de piezometercapillair moet worden in rekening gebracht. Bij 0° was de druk in dezen hulptoestel 118.3 cm. kwik. Bij de meting bij — 253° varieerde hij tusschen 33.1 en 51.1 cM., bij — 259° tusschen 31.8 en 48.1 cM.

[1]) Een dergelijke kunstgreep is bij het bepalen van de gemiddelde temperatuur van de capillair van een gasthermometer door verschillende waarnemers toegepast (TRAVERS, SENTER en JACQUEROD, Ph. Tr. Royal Soc. London Ser. A. vol. 200 p. 143 (1902)).

§ 2. *Uitkomsten voor* pv_A.

Onderstaande tabel bevat op dezelfde wijze als tabel I van Meded. N°. 102ª de uitkomsten der bepalingen.

TABEL I. Helium. Waarden van pv_A.

N°.	θ	p	pv_A	d_A
1	— 252°.72	53.248	0.09120	591.53
2		60.716	0.09533	636.92
3		65.997	0.09867	668.87
4	— 258°.82	40.012	0.06150	650.65
5		46.222	0.06559	704.71
6		53.326	0.07063	754.97
7		59.797	0.07531	794.00

De bijbehoorende waarden voor $pv_{A,d=0}$ zijn:

voor — 252°.72 $\quad pv_A = 0.07455$

voor — 258°.82 $\quad pv_A = 0.05222$

§ 3. *Verdere resultaten.* Het aantal punten op iedere isotherme is te klein en de dichtheden zijn te groot om nu reeds de afleiding van de eerste individueele viriaalcoefficienten van het toestandspolynoom (vergelijk § 4 van Med. N°. 102ª) te veroorloven. Maakt men echter een grafische voorstelling dan geeft deze aan dat de isotherme pv_A lijn voor — 259° een minimum moet vertoonen en derhalve B_A bij deze temperatuur negatief moet zijn. Verder volgt uit de isotherme van — 253°, dat de snijding van deze lijn met de as $d = 0$ dicht bij het BOYLE-punt ligt. Waarschijnlijk is ook bij — 253° B_A reeds negatief al is het dan slechts zeer weinig. Een en ander komt zeer goed overeen met wat in § 5 van Med. N°. 102ª is afgeleid en spreekt voor de juistheid van de daar toegepaste extrapolatie ten behoeve van het berekenen van de kritische temperatuur van het helium.

Ten slotte betuig ik gaarne mijn dank aan den Heer C. BRAAK voor zijne hulp bij dit onderzoek.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Meded. N°. 102^d uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden. H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: *„Over het meten van zeer lage temperaturen XX. Invloed van de afwijkingen van de wet van* BOYLE-CHARLES *op de temperatuur gemeten op de schaal van den gasthermometer van constant volume volgens waarnemingen met dit werktuig".*

§ 1. In Med. N°. 97^b (Jan. '07) werd onder XV de formule van CHAPPUIS (zie Med. N°. 95^c (Oct. '06) form. (3)) voor de berekening van de temperaturen volgens den waterstofthermometer van constant volume vergeleken met formule (6) van XIV dierzelfde Mededeeling in welke formule gelet is op de afwijkingen van de wet van BOYLE, terwijl deze in de formule van CHAPPUIS worden verwaarloosd. Als uitkomst van deze vergelijking werd aldaar medegedeeld, dat voor een schadelijke ruimte van $^1/_{100}$ de gemiddelde relatieve spanningscoëfficient tusschen 0° en 100 met 2 eenheden van de 7^e decimaal moest worden verhoogd, en de in Med. N°. 60 bepaalde spanningscoëfficient van den waterstofthermometer bij 1090 mM. nulpuntsdruk dus in plaats van op 0.0036627 op 0.0036629 moest worden gesteld, eene wijziging, die trouwens zoo gering is, dat zij juist met de grens der waarnemingsfouten overeenkomt. Het is ons gebleken, dat bij deze berekening onjuiste waarden van $B^{(p)}_{0^\circ}$ en $B^{(p)}_{100^\circ}$ zijn gebruikt. Nieuwe berekeningen hebben geleerd, dat het verschil veel geringer is dan zooeven werd aangegeven, zoodat het eerst bij veel grootere waarden van de schadelijke ruimte in aanmerking komt en met uitzondering van koolzuur ook op de laatste decimaal (de 8^e) bij CHAPPUIS niet van invloed is. Dat het gebruik van onjuiste $B^{(p)}$ niet was opgespoord, was het gevolg daarvan, dat de in XV aangegeven berekening van verwaarloozingen toevallig tot hetzelfde resultaat had gevoerd, dit echter omdat de vier correcties zooals in XV is vermeld, abusievelijk met hetzelfde teeken zijn genomen terwijl zij elkaar bijna geheel opheffen. Wij zullen derhalve in het vervolg aan den onveranderden spanningscoëfficient 0.0036627 vasthouden.

Een gevolg van de verbeterde berekening is tevens, dat tabel XVIII van Med. N°. 97^b (Jan. '07) kan vervallen. De eerste twee correcties in XIV § 3 van genoemde Mededeeling afgeleid, worden nu ook zoo klein, dat ze buiten het gebied der waarneming vallen. De aan het slot van § 3 berekende correctie wordt voor den koolzuurthermometer van CHAPPUIS iets geringer dan daar aangegeven n.l. -0.22×10^{-6}, terwijl nog een correctie van -0.8×10^{-7} hieraan moet worden

toegevoegd, zoo tevens de uitzetting door den druk van het ingesloten gas wordt in aanmerking genomen.

§ 2. Het herstellen van de vroeger gebruikte waarde 0.0036627 heeft verder de volgende wijzigingen ten gevolge, die alle als de grens der waarnemingsfouten niet overschrijdende van geen belang zijn, doch dienen te worden aangebracht om volledige overeenstemming in de berekeningen te verkrijgen :

1° dat in tabel XVI van Med. N°. 97^b (Jan. '07) in de eerste kolom de waarden van tabel XII worden hersteld en derhalve alle getallen in de laatste decimaal met een eenheid worden verhoogd. Dit laatste geldt tevens voor de getallen der tweede kolom van tabel XVI,

2° dat in tabel XVII van dezelfde Mededeeling de getallen der eerste kolom, behalve de laatste twee, in de laatste decimaal met een eenheid worden verhoogd,

3° dat de temperaturen in tabel XVI van Med. N°. 99^a (Juni '07) en tabel XX van Med. N°. 100^a (Dec. '07) geen verdere correcties behoeven (zie slot van § 14 van Med. N°. 99^a en van § 18 van Med. N°. 100^a),

4° dat in § 3 van Med. N°. 100^b (Dec. '07) de waarde voor $pv_{A\,100°.2}$ en de hiermee samenhangende viriaalcoëfficienten kleine veranderingen ondergaan, die echter van geen beteekenis zijn,

5° dat de laatste regel van Med. N°. 101^a (Dec. '07) vervalt,

6° dat in § 1 van Med. N°. 101^b (Dec. '07) $a_{A\,t°} = 0.0036619$ verandert tot 0.0036617 en $T_{0°\,C.} = 273°.08$ tot 273°.10 terwijl $T_{0°\,C} = 273°.07$ van noot [1]) bij genoemde § verandert tot $T_{0°\,C.} = 273.°09$ en dat in § 2 $t = -273°.08$ C. wordt $-273°.10$ terwijl de veranderingen in B'_{100} en in de getallen van tabel XXV onmerkbaar zijn,

7°. dat in de cijferwaarden in §§ 1 en 3 van Med. N°. 102^b (Dec. '07) de veranderingen noodig zijn, die bij de vertaling in de Proceedings (29 Febr. '08) zijn aangebracht. (Zie noot 1 aldaar).

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan in de Zitting van 29 Februari 1908 Meded. N°. 105 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden : *„De verdichting van het helium"*.

(Wordt hier niet medegedeeld, zie de volgende Mededeeling).

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 105 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: *Over proeven ter verdichting van het helium door expansie".*

In de vorige Zitting werd door mij medegedeeld, wat ik waarnam bij de expansie van bij — 259° samengeperst helium. De proef was genomen naar aanleiding van bepalingen van isothermen van helium bij verschillende temperaturen o.a. ook bij — 252° en bij — 259°, waaruit ik voor de kritische temperatuur van helium ongeveer 5° K. had berekend.[1]) Het scheen dus mogelijk door helium op het smeltpunt van waterstof op 100 atmosfeeren samen te persen en adiabatisch zich te laten ontspannen beneden de kritische temperatuur van helium af te dalen en in het gas een nevel te voorschijn te roepen. Om die gevolgtrekking op de proef te stellen had ik ongeveer 7 liter helium, dat door verbranding met koperoxyd en door leiden over kool bij de temperatuur van vloeibare waterstof gezuiverd was en waarvan ik dus mocht aannemen, dat het slechts zeer geringe bijmengselen bevatten kon, geperst in een dikwandige buis, die in een doorzichtig vacuumglas met vloeibare waterstof geplaatst was en voorzien was van een kraan, waardoor het helium in een gashouder, een gaszak, of het luchtledig kon uitstroomen. De vloeibare waterstof om de buis werd onder zoo lagen druk weg gezogen, dat aan het oppervlak er van juist kristallen te voorschijn kwamen. Het doorzichtige vacuumglas met waterstof was zelf weer omgeven door een dergelijk vacuumglas met vloeibare lucht. Binnen de dikwandige buis en slechts een enge ruimte met den binnenwand overlatende, was een uiterst dun bekertje opgesteld, om door de slechte warmtegeleiding van het, zij het dan ook slechts zeer dunne, gaslaagje tusschen het bekertje en den wand, het door expansie afgekoelde gas binnen het bekertje beter tegen warmtetoevoer te beschutten.

Bij de ontspanning van het helium vormde zich een dikke grijze nevel, waaruit zich vaste massa's afzetten, die in het gasvormige helium als watachtige gedeeltelijk ook meer samenhangende massa's in een strooperige vloeistof zweefden, aan den wand kleefden en kantelende naar beneden daalden terwijl zij snel (in 20 seconden) verdampten. Van smelting was daarbij niets te bespeuren.

Voor zoover ik toen over de proeven oordeelen kon, achtte ik het waarschijnlijk, dat de gevormde vaste stof hoofdzakelijk uit helium bestond.

[1]) OLSZEWSKI heeft uit expansieproeven afgeleid, dat de kritische temperatuur van helium beneden 2° ligt. DEWAR schat volgens de absorptie in kool het *kookpunt* op hooger dan 5°.

Wanneer het helium onmiddellijk in den vasten toestand overging, zou wegens de gunstiger ligging van de grenslijn de condensatie gemakkelijker zijn dan volgens de formule van VAN DER WAALS was te verwachten. Het volumineuse voorkomen van de vaste stof zou daarmede in overeenstemming zijn geweest. Werkelijk ben ik eenigen tijd, mede ten gevolge van waarnemingen, die later tot twijfel aanleiding gaven of die onjuist bleken, in de overtuiging geweest, dat ik snel verdampend helium in vasten toestand damp had zien afgeven van de spanning, die het gas aanwees (eenmaal werd meer dan 15 atmosferen waargenomen).

Het voortgezet onderzoek heeft echter geleerd, dat de proeven geheel anders verklaard moeten worden. Het gebruikte gas bleek door een niet voldoend opgehelderde oorzaak niet zoo zuiver te zijn geweest als de gevolgde wijze van behandeling deed verwachten. Door analyse van wat bij nieuwe zuivering met kool bij de temperatuur van vloeibare waterstof tot dat de kool geen waterstof meer opnam (en het helium dus nog slechts sporen waterstof kon bevatten) uit het gas werd verwijderd, kon wel is waar worden vastgesteld, dat het gas te voren de eene maal hoogstens 0.45, de andere maal hoogstens 0.37 volume procenten waterstof had bevat [1]). Doch dit kleine bijmengsel moet een grooten invloed gehad hebben.

Want bij herhaling van de proef met het na de nieuwe behandeling verkregen helium was, niettegenstaande het gas zoo weinig van het te voren gebruikte verschilde, van het vroeger waargenomen verschijnsel niets te bespeuren. De proef is wel niet beslissend, daar de uitstroomingssnelheid te klein geweest is, maar het is voorshands moeilijk aan het verschil in expansiesnelheid met de vorige proeven toe te schrijven, dat het helium in de buis thans volmaakt helder bleef.

De verklaring van het vroeger waargenomene is dan ook te vinden in oplossingsverschijnselen van vaste waterstof in gasvormig helium. Wat den indruk maakte van te zijn afgeven van damp, is het wederopnemen van afgescheiden vaste waterstof in het gasvormige helium geweest, terwijl dit van de lagere temperatuur tot die van smeltende waterstof terugkeerde en de druk dientengevolge opliep. Helium kan bij de temperaturen, die hier in aanmerking komen, volgens de theorie der mengsels waterstof tot een voor elke temperatuur oepaald gehalte opnemen, zoodat het bij alle drukkingen wordt vastgehouden. Met aannemelijke onderstellingen leidt men af, dat dit gehalte voor temperaturen

---

[1]) Omtrent een mogelijk gering gehalte aan neon kon ik nog geen zekerheid verkrijgen.

boven het smeltpunt van waterstof vrij aanzienlijk kan zijn en bij het smeltpunt zeker nog meer dan een volumeprocent kan bedragen, terwijl uit mengsels van kleinere gehalten eerst bij lagere temperatuur, bijv. door expansie de waterstof zich zal kunnen afzetten. Dat de waterstof bij het voortgezette afblazen van het helium, niet als vaste waterstof was achter gebleven, kan eveneens hieruit verklaard worden, dat er slechts zeer weinig waterstof bij het gas gemengd was en de kleine hoeveelheid die achter bleef in de beschikbare ruimte nog kon verdampen.

Opmerkelijk blijft het, dat een zoo gering bedrag aan bijmengsel als hier ter sprake komt, het geheele verschijnsel van een zich verdichtende en weder verdampende vaste stof te voorschijn heeft geroepen, al is de snelle verdamping, waarbij ook meer samenhangende massa's soms als weggeblazen werden, met die geringe hoeveelheid van verdampende stof in overeenstemming. Er kan in de buis weinig meer dan in ronde cijfers 1 milligram of 15 kubieke millimeter vaste waterstof aanwezig geweest zijn — waarschijnlijk was er zelfs minder in — en toch was de buis van nagenoeg 7 kubieke centimeter inhoud voor een groot deel met vlokkige massa's gevuld.

Voor zoover de proeven over de ontspanning van het helium bij het smeltpunt van waterstof thans zijn gevorderd hebben zij in de eerste plaats den verrassenden vorm doen kennen, dien de oplossing van een vaste stof in een gas aanneemt in het geval van helium en waterstof. Zij wijzen er verder op, dat bij mengsels van waterstof en helium het opstijgen of neerdalen van de vaste stof in het gas al naar gelang van den daarop uitgeoefenden druk, het barotropisch verschijnsel voor een vaste stof en een gas, verwezenlijkt kan worden. De verdichting van het zuivere helium blijft echter een open vraag, die nog een uitgebreid onderzoek vordert.

NASCHRIFT.

Met het gas, dat bij de laatste expansieproef volmaakt helder bleef, en dat behalve volgens de zuiveringsproef ook blijkens spectroscopisch onderzoek slechts sporen waterstof bevatte, heb ik de proef, thans met grootere expansiesnelheid reeds kunnen herhalen. Ik zag nu een dunnen nevel ontstaan, die uiterst snel, in een seconde ongeveer, verdween. De nevel had een ander voorkomen dan de vroegere. Hij kan aan de sporen waterstof, die het gas nu nog bevatte, worden toegeschreven, maar het is ook mogelijk, en het ander voorkomen spreekt in dien zin, dat het een vloeistofnevel is geweest. Uit deze proef zou dan volgen, dat de kritische temperatuur van

het helium ongeveer die is, welke ik uit de isothermenbepalingen berekende en dat het helium vrij wel de wetten van VAN DER WAALS volgt. Daar de buis brak kon de proef nog niet herhaald worden en niet meer zekerheid omtrent den aard van den nevel verkregen worden.

Hoe voorzichtig men moet zijn met het maken van gevolgtrekkingen uit het al of niet verschijnen van een nevel bij expansie is bij de vorige proeven genoeg gebleken. Eene beslissing over de kritische temperatuur van het helium is dus ook eerst door eene stelselmatige voortzetting van het onderzoek te verkrijgen, welke wegens de daaraan verbonden moeilijkheden nog wel geruimen tijd in beslag zal nemen.

Voor de Boekerij worden aangeboden 1°. door den Heer JULIUS: *„Energievervoer in de electronenwereld"* 2°. namens den Heer J. M. VAN BEMMELEN: *„Beschouwing over het tegenwoordige standpunt onzer kennis van de Nederlandsche terpen"* 2de uitgave (omwerking en uitbreiding).

Wegens de vereenigde vergadering van de beide Afdeelingen op Zaterdag 25 April a.s. wordt de volgende vergadering vastgesteld op Vrijdag 24 April a.s.

De vergadering wordt gesloten.

ERRATA.

In het verslag der vergadering van 30 Maart 1907:

Op Pl. II behoorende bij de Meded. van H. KAMERLINGH ONNES en W. H. KEESOM leze men $\tau = 1.08$ i. pl. v. $\tau = 1.18$ en $\tau = 1.035$ i. pl. v. $\tau = 1.05$.

p. 854 r. 4 v. o. i. pl. v. 0.966 leze men 0.996.

In het verslag der vergadering van 29 Juni 1907:

p. 173 r. 12 v. o. i. pl. v. 0.16822 leze men 0.25234.

In het verslag der vergadering van 29 Februari 1908:

p. 682 r. 20 v. b., p. 683 r. 22 v. b., p. 689 r. 28 v. b., p. 690 r. 3 en 6 v. b., Pl. IV r. 10 v. o. en Pl. V. r. 7 v. o.: in plaats van silicaat leze men sulfaat.

p. 680 r. 12 v. b. i. pl. v. d_{11} leze men d_{10}.

p. 682 r. 8 v. b. i. pl. v. „kunnen die toelichten" leze men „kunnen dit toelichten".

p. 600 r. 16 v. b. i. pl. v. 104 leze men 105.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Vrijdag 24 April 1908.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 824.

C. E. A. WICHMANN: „Steenen bijtels van Nieuw Guinea", p. 824.

J. P. VAN DER STOK: „De analyse van frequentiekrommen volgens eene algemeene methode", p. 825.

F. A. H. SCHREINEMAKERS: „Evenwichten in quaternaire stelsels", p. 843.

B. W. VAN ELDIK THIEME: „Over de inwerking van geconcentreerd zwavelzuur op glycerineesters van verzadigde éénbasische zuren". (Aangeboden door de Heeren S. HOOGEWERFF en W. A. VAN DORP), p. 849.

P. ZEEMAN: „Verandering van golflengte van de middelste lijn van tripletten in een magnetisch veld" (2de gedeelte), p. 855. (Met één plaat).

F. A. F. C. WENT: „De ontwikkeling van zaadknop, embryozak en eicel bij de Podostemaceae", p. 858.

J. D. VAN DER WAALS Jr.: „De waarde der zelfinductie volgens de electronentheorie". (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 867.

JAN DE VRIES: „Over ruimtekrommen van het geslacht twee", p. 871.

JAN DE VRIES: „Over algebraïsche ruimtekrommen, op regelvlakken van den n-en graad met $(n-1)$-voudige rechte", p. 876.

H. E. J. G. DU BOIS en G. J. ELIAS: „De invloed van temperaturen en magnetisatie op selectieve absorptiespectra", III. p. 878.

H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „Isothermen van twee-atomige gassen en hunne binaire mengsels. VIII. Over de draagkracht van glas en de toepassing van glazen buizen bij metingen onder hoogen druk bij gewone en bij lagere temperatuur", p. 890. (Met één plaat).

CLEMENT REID en Mrs. ELEANOR M. REID: "On Dulichium vespiforme sp. nov. from the brick-earth of Tegelen". (Aangeboden door de Heeren G. A. F. MOLENGRAAFF en F. A. F. C. WENT), p. 898. (Met één plaat).

Voorstel tot vaststelling der Mei-vergadering op Vrijdag 29 Mei a. s., p. 899.

Aanbieding van boekgeschenken, p. 900.

Errata, p. 900.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Bericht van de Heeren KAMERLINGH ONNES en WIND dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 13 April l.l. waarbij bericht wordt, dat H. M. de Koningin de benoemingen van den Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN tot Voorzitter en van den Heer D. J. KORTEWEG tot Onder-Voorzitter der Wis- en Natuurkundige Afdeeling heeft bekrachtigd.

Voor kennisgeving aangenomen.

3°. Missive van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken dd. 22 April l.l. ter begeleiding van een Kon. Besluit waarbij bericht wordt dat de door de Afdeeling voorgedragenen benoemd zijn tot gedelegeerden der Regeering op het in Mei 1908 te Brussel te houden „Congrès international pour l'ètude des régions polaires".

Voor kennisgeving aangenomen.

4°. Schrijven van de Real Accademia dei Lincei waarbij mededeeling wordt gedaan van door de Internationale Associatie der Akademien benoemde commissiën voor de Bibliotheken en voor het Corpus medicorum antiquorum.

Voor kennisgeving aangenomen.

5°. Schrijven van den Minister van Binnenlansche Zaken d.d. 1 April 1908 ter begeleiding van 2 exemplaren van het Reglement en Programma voor het 9e Internationaal Aardrijkskundig Congres van 27 Juli tot 6 Augustus a.s. te Genève te houden.

Ter kennisname voor de leden beschikbaar gesteld.

6°. Circulaire van het 3e Congrès international de Botanique in 1910 te Brussel te houden. Ter kennisname voor de leden beschikbaar gesteld.

7°. Schrijven van den Heer J. W. N. LE HEUX te Deventer ter begeleiding van een verzegelde oplossing van het vraagstuk van FERMAT, met verzoek dit in het Archief der Akademie te mogen deponeeren.

De Voorzitter stelt voor aan het verzoek te voldoen; aldus wordt besloten.

Aardkunde. — De Heer WICHMANN doet eene mededeeling over:
„Steenen bijtels van Nieuw Guinea".

(Zal in het Verslag der volgende vergadering verschijnen).

Geophysica. — De Heer VAN DER STOK doet eene mededeeling over: *„De analyse van frequentie-krommen volgens eene algemeene methode".*

§ 1. Bij de statistische bewerking van meteorologische gegevens (klimatologie) treft men frequenties aan van allerlei aard. Voor een groot deel liggen zij, wel is waar, evenals de meeste frequenties van anderen oorsprong, tusschen onbepaalde grenzen; maar het geval doet zich ook voor, dat de grenzen scherp zijn afgebakend, als bij waarnemingen van den graad der bewolking, waar zij liggen tusschen 0 en 10.

Een overgangsvorm tusschen deze beide vindt men in frequenties van regenbuien, gerangschikt naar duur of hoeveelheid, eenerzijds scherp begrensd door de nulwaarde, naar de andere zijde echter, die der zware buien, zonder bepaalde grens, zoodat de kromme asymptotisch tot de abscis-as nadert.

De bewerking van windwaarnemingen eindelijk vordert de behandeling van frequenties in twee afmetingen en voert tot krommen, die, overeenkomstig haar ontstaan, een ander karakter dragen dan andere frequentie-krommen.

Voor frequenties met onbepaalde grenzen schijnt de ontwikkeling in reeksvorm volgens de formule van BRUNS [1]) en CHARLIER de aangewezen vorm van analyse; maar de afleiding daarvan, die berust op eene generalisatie van een reeds door BESSEL aangewezen gebruik van bepaalde integralen, is nog niet geheel en al vrij van praemissen die voor de waarschijnlijkheidstheorie van waarde mogen zijn, maar die in den grond met het probleem, dat men als de analyse eener willekeurige functie tusschen aangewezen grenzen kan definieeren, geen verband houden. Bovendien kan deze wijze van afleiden bezwaarlijk toegepast worden op het geval van afgebakende begrenzing.

De formules van PEARSON berusten, evenals trouwens die van CHARLIER, geheel en al op de praemissen der waarschijnlijkheidstheorie en bevatten, daar zij niet in reeksvorm zijn gegeven, slechts een bepaald aantal constanten dat, zooals later in een voorbeeld zal worden aangetoond, in sommige gevallen, met name de bewerking van frequenties der bewolking, te beperkt is voor eene volledige kenmerking der kromme. Bovendien geven de constanten, die voor

[1]) H. BRUNS. Wahrscheinlichkeitsrechnung nnd Kollektivmasslehre, Berlin, 1906.
Idem. Beiträge zur Quotenrechnung. Kon. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. Bnd. 58. Leipzig, 1906.
C. V. L. CHARLIER. Researches into the theory of probability. Meddel. Lunds astr. observ. Ser. II. n°. 4. 1906.
Idem. Ueber das Fehlergesetz. Ark. för Matem. Astron. och. Fys. Bnd. 2. n°. 8, 1905.

een deel in exponentieelen vorm optreden, geen duidelijk beeld van de rol, die zij in den bouw der kromme spelen, en is het niet wel mogelijk die, hetzij in woorden, hetzij in teekening op eenvoudige wijze aan te duiden.

Het doel dezer mededeeling is eene algemeen geldende, eenvoudige methode aan te geven, volgens welke voor frequenties van velerlei aard een kromme kan worden gevonden die, bij integratie tusschen grenzen, bepaald door de verdeeling der gegevens, voert tot de sommen aan die verdeeling eigen, afgezien van de onzekerheid die, als gevolg van de onvolkomenheid der gegevens, altijd overblijft.

Het is deze kromme, die de wet welke het verschijnsel volgt, voorstelt, die met den naam „frequentie-kromme" behoort te worden bestempeld; de kromme der sommen, door samentrekking der oorspronkelijke gegevens binnen bepaalde grenzen verkregen, kan dan, in navolging van BRUNS, de kromme der verdeeling genoemd worden; haar vorm is afhankelijk van den graad van samentrekking (Abrundung bij BRUNS), maar nadert des te meer tot die der frequentiekromme naarmate de samentrekking geringer, dus het aantal beschikbare waarnemingen grooter is.

Zulk eene ontwikkeling eener willekeurige functie kan natuurlijk op oneindig veel manieren geschieden en het is dus noodig hieromtrent eenige algemeen geldende beginselen voorop te stellen.

Bij de hier gekozen ontwikkeling zijn deze praemissen:

1°. dat de ontwikkeling geschiedt volgens polynomia van opklimmenden graad.

2°. dat voor de bepaling der constanten gebruik wordt gemaakt van de berekening van gemiddelden van verschillende orde ten opzichte van een, overeenkomstig de eischen der verschillende gevallen, gunstig gekozen aanvangspunt. De uitdrukking „momenten", hiervoor dikwerf gebezigd, wordt hier, als een onnoodige analogie met mechanische problemen, vermeden.

§ 2. ONTWIKKELING TUSSCHEN BEPAALDE GRENZEN.

a. Geen bepaalde grenswaarden der functie.

De polynomia mogen als Q-functies worden aangeduid, wier graad door een suffixum wordt aangewezen en de reeks, waarvan de constanten moeten worden bepaald, door:

$$u = A_0 Q_0 + A_1 Q_1 + A_2 Q_2 + \ldots \text{ enz.} \ldots\ldots \quad (1)$$

De eenvoudigste vorm, dien men aan de polynomia kan geven, is:

$$Q_n = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_n$$

Het ligt voor de hand om, in dit geval, het midden tusschen de

grenzen als nulpunt van telling te kiezen daar dan, bij integratie tusschen de grenzen, alle oneven termen verdwijnen; hieruit volgt dat dan eene scheiding tusschen even en oneven polynomia moet plaats vinden, zoodat de algemeene vorm wordt:

$$Q_n = x^n + a_2x^{n-2} + a_4x^{n-4} + \ldots . a_n \qquad n \text{ even}$$
$$= x^n + a_1x^{n-2} + a_3x^{n-4} + \ldots . a_{n-2} \qquad n \text{ oneven}$$

Voorts wordt vereenvoudiging der formules verkregen door de schaalwaarde zoodanig te veranderen dat de grenzen ± 1 worden, 't geen altijd mogelijk is; gemakshalve zijn deze grenzen bij de ondervolgende integraalteekens weggelaten.

De gemiddelden van verschillende orde worden aangeduid door:

$$\mu_n = \int ux^n dx .$$

Ten einde nu uit de oneindige reeks (1) de A-coëff. in eindigen vorm te kunnen berekenen is de eenige en voldoende voorwaarde deze, dat de a-coëff. zoodanig worden bepaald, dat aan de voorwaarde:

$$\int Q_n x^m dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wordt voldaan voor alle waarden van $m < n$, daar dan alle integralen verder dan de $m + 1^e$ term wegvallen en tevens de coëff. op een voor elken Q_n willekeurigen, constanten factor na, volkomen zijn vastgelegd. Is dit geschied, dan volgt uit (2) onmiddellijk dat:

$$\int Q_m Q_n dx = 0$$

voor alle waarden van m verschillend van n en voorts dat:

$$A_n = \alpha \int uQ_n dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waarin:

$$\alpha^{-1} = \int Q_n Q_n dx = \int Q_n x^n dx .$$

De $^n/_2$ (n even) of $^{n-1}/_2$ (n oneven) constanten van het polynomium Q_n worden berekend uit de $^n/_2$ of $^{n-1}/_2$ vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} \int Q_n dx = 0 \\ \int Q_n x^2 dx = 0 \\ \ldots\ldots \\ \int Q_n x^{n-2} dx = 0 \end{array}\right\} (n \text{ even}) \qquad \left.\begin{array}{l} \int Q_n x dx = 0 \\ \int Q_n x^3 dx = 0 \\ \ldots\ldots \\ \int Q_n x^{n-2} dx = 0 \end{array}\right\} (n \text{ oneven})$$

of, voor n even uit:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{a_2}{n-1}+\frac{a_4}{n-3}+\ldots\ldots\frac{a_n}{1}=0$$
$$\frac{1}{n+3}+\frac{a_2}{n+1}+\frac{a_4}{n-1}+\ldots\ldots\frac{a_n}{3}=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{2n-1}+\frac{a_2}{2n-3}+\frac{a_4}{2n-5}+\ldots\ldots\frac{a_2}{n-1}=0$$

voor n oneven uit:

$$\frac{1}{n+2}+\frac{a_1}{n}+\frac{a_3}{n-2}+\ldots\ldots\frac{a_{n-2}}{3}=0$$
$$\frac{1}{n+4}+\frac{a_1}{n+2}+\frac{a_3}{n}+\ldots\ldots\frac{a_{n-2}}{5}=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{2n-1}+\frac{a_1}{2n-3}+\frac{a_4}{2n-5}+\ldots\ldots\frac{a_{n-2}}{n}=0$$

Elimineert men uit deze vergel. achtereenvolgens $a_2, a_4 \ldots\ldots$ of $a_1, a_3 \ldots\ldots$, dan vindt men voor den algemeenen vorm van het polynomium:

$$Q_n = x^n - \frac{n(n-1)}{2\,.\,(2n-1)}\,x^{n-2} + \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\,.\,4\,.\,(2n-1)\,(2n-3)}\,x^{n-4} - \text{enz.} \quad (4)$$

of, op een constanten, algemeenen factor na, den vorm der bolfuncties, die wij P-functies zullen noemen.

Dit was te verwachten, daar de voorwaarde (2), waaruit deze uitdrukking voortspruit, ook voor de P-functie geldt.

De Q-functies zijn dus te beschouwen als gegeneraliseerde P-functies, waarvan deze een bijzonder geval vormen; schrijft men nl. (2) aldus:

$$k_n \int Q_n x^m dx = 0\,,$$

dan wordt

$$k_n Q_n = P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

als men k_n zoodanig bepaalt, dat

$$k_n\, Q_n = 1 \text{ voor } x = 1.$$

De invoering dezer constante moge voor de behandeling der potentiaaltheorie voordeelen aanbieden, voor ons doel zou zij zonder belang zijn en zelfs, in de praktijk, tot overbodigen arbeid leiden. Wel worden enkele uitdrukkingen hierdoor eenvoudiger, maar wat men aan de eene zijde daarbij wint, verliest men ruimschoots doordat de berekening van $u\,Q_n$ in (3) wordt bezwaard met den onnoodigen factor k_n.

Dit neemt niet weg, dat van de betrekking (5) waarin

$$k_n = \frac{(2n)!}{2^n \,.\, n!\, n!}$$

zoodat:

$$Q_n = \frac{2^n \,.\, n!\, n!}{(2n)!} P_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

gebruik kan worden gemaakt om uit de bekende eigenschappen der bolfuncties, die der Q-functies terstond af te leiden.

Natuurlijk voldoen zij, evengoed als de bolfuncties, aan LEGENDRE's diff. verg.:

$$(x^2 - 1)\frac{d^2 Q_n}{dx^2} + 2x\frac{dQ_n}{dx} - n(n+1)\,Q_n = 0$$

de recurreerende formule wordt:

$$Q_{n+1} - xQ_n + \frac{n^2}{(2n+1)(2n-1)} Q_{n-1} = 0$$

en

$$Q_n = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

Voorts vindt men:

$$a^{-1} = \int Q_n\, Q_n\, dx = \frac{1}{k^2}\int P_n\, P_n\, dx = \frac{2}{k^2(2n+1)} = \frac{2^{2n+1}\, n!\, n!\, n!\, n!}{(2n+1)!\,(2n)!}$$

zoodat, algemeen:

$$A_n = a\left[\mu_n - \frac{n(n-1)}{2.(2n-1)}\mu_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,4\,.\,(2n-1)(2n-3)}\mu_{n-4} - \text{enz.}\right] \quad (7)$$

b. Gegeven $u = 0$ voor $x = \pm 1$.

Het sub *a* behandelde geval, waarin omtrent de te ontwikkelen functie niets is bekend gesteld, zal zich in de praktijk zelden voordoen en, daar alle aanpassing ten laste der A-constanten moet geschieden, zou ook in zulk een geval, in 't algemeen, de toepassing eene berekening vereischen van vele termen en dus niet voordeelig blijken.

Bij de bewerking van waarnemingen van den graad der bewolking doet zich het geval voor, dat men eene kromme heeft te zoeken, die door de boven aangegeven grenswaarden is gekenmerkt.

De gevallen van geheel helderen hemel (bewolking nul) en van geheel bedekt uitspansel (bewolking 10) behooren nl., als klimatologische factoren van bijzonder belang voor de kennis van het klimaat (vooral in noordelijke breedten), afzonderlijk gehouden te worden en

zouden ook reeds daarom als bijzondere waarnemingen moeten worden beschouwd, dat zij discrete gevallen betreffen, die niet geleidelijk in eene bewolking van resp. graad 1 of 9 overgaan.

De overige bewolkingsgraden kunnen daarentegen beschouwd worden als waarnemingen van continue grootheden, die gebonden zijn aan de bovengestelde voorwaarden.

In dit geval kan men gemakkelijk alle termen der reeks (1) aan deze voorwaarden laten voldoen door haar eenvoudig te vermenigvuldigen met een factor, die nul wordt voor $x = \pm 1$, b. v. $x^2 - 1$ en daarna op de nieuwe functies, die wij R zullen noemen, dezelfde redeneeringen toe te passen, die onder a zijn gevolgd.

De graad der polynomia wordt hierdoor met twee verhoogd, zoodat men moet aanvangen met R_2

Algemeen wordt dan:

$$R_{n+2} = (x^2 - 1)\, R'_n = (x^2 - 1)\,[x^n + a_2\, x^{n-2} + \ldots a_n]\,, \quad n \text{ even}$$
$$= (x^2 - 1)\,[x^n + a_1\, x^{n-2} + \ldots a_{n-2}], \quad n \text{ oneven}.$$

Het is duidelijk, dat de operatie hierop neerkomt, dat men den inhoud der kromme, bepaald door den eersten term der reeks, niet, als bij de Q-functie, voorstelt door een rechthoek van lengte 2 en hoogte 0.5, maar door een parabool, waarvan de basis is 2 en de hoogte 0.75, waardoor de inhoud wederom gelijk aan de eenheid wordt. Door de volgende termen wordt dan deze parabool afwisselend door asymmetrische en symmetrische vervormingen zoodanig gewijzigd, dat de gedaante der kromme meer en meer tot de gezochte nadert.

Hier moge de opmerking plaats vinden, dat er, voor het geval van afgebakende grenzen, bij de keuze van den oorsprong of het nulpunt der telling, geen aanleiding bestaat om daarvoor het arithmetisch gemiddelde te kiezen; veeleer is men hier op de middenwaarde der grenzen, zoowel uit een theoretisch als uit een practisch standpunt beschouwd, aangewezen.

De voorwaarde, waaraan de a-coëfficienten der R-functie moeten voldoen en waardoor zij volledig worden bepaald, is nu dat:

$$\int R_{n+2}\, x^m\, dx = \int R'_n\, x^m\, (x^2 - 1)\, dx = 0, \quad m < n$$

of

$$\int x^{m+2}\, R'_n\, dx = \int x^m\, R'_n\, dx. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

De a-coëff. worden berekend uit de verg.:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{(n+3)(n+1)}+\dfrac{a_2}{(n+1)(n-1)}+\dfrac{a_4}{(n-1)(n-3)}+\ldots\dfrac{a_n}{3.1}=0\\ \dfrac{1}{(n+5)(n+3)}+\dfrac{a_2}{(n+3)(n+1)}+\dfrac{a_4}{(n+1)(n-1)}+\ldots\dfrac{a_n}{5.3}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{1}{(2n+1)(2n-1)}+\dfrac{a_2}{(2n-1)(2n-3)}+\dfrac{a_4}{(2n-3)(2n-5)}+\ldots\dfrac{a_n}{(n+1)(n-1)}=0\end{array}\right\}\ n \text{ even}$$

en

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{(n+4)(n+2)}+\dfrac{a_1}{(n+2)(n)}+\dfrac{a_3}{(n)(n-2)}+\ldots\dfrac{a_{n-2}}{5.3}=0\\ \dfrac{1}{(n+6)(n+4)}+\dfrac{a_1}{(n+4)(n+2)}+\dfrac{a_3}{(n+2)(n)}+\ldots\dfrac{a_{n-2}}{7.5}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{1}{(2n+1)(2n-1)}+\dfrac{a_1}{(2n-1)(2n-3)}+\dfrac{a_3}{(2n-3)(2n-5)}+\ldots\dfrac{a_{n-2}}{(n+2)(n)}=0\end{array}\right\}\ n \text{ oneven}$$

Door successieve elimineering van $a_2, a_4 \ldots a_1, a_3 \ldots$ vindt men hieruit voor den algemeenen vorm der R-functie:

$$R_{n+2} = x^{n+2} - \frac{(n+2)(n+1)}{2.(2n+1)}x^n + \frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)}{2.4.(2n+1)(2n-1)}x^{n-2} - \text{enz.} \quad (9)$$

en hieruit, door deeling door x^2-1:

$$R'_n = x^n - \frac{n(n-1)}{2.(2n+1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n+1)(2n-1)}x^{n-4} - \text{enz.} \quad (10)$$

Voor beiden geldt de recurreerende formule:

$$R'_{n+1} - x\,R'_n + \frac{n(n+2)}{(2n+3)(2n+1)}R'_{n-1} = 0$$

en de functies voldoen aan de diff. vergel.

$$(x^2-1)\frac{d^2R_{n+2}}{dx^2} - (n+2)(n+1)R_{n+2} = 0$$

en

$$(x^2-1)\frac{d^2R'_n}{dx^2} + 4x\frac{dR'_n}{dx} - (n+3)n\,R'_n = 0.$$

Bij vergelijking van de uitdrukking voor R'_n met die voor Q_n valt het terstond in het oog, dat de R' functie kan worden gevonden door differentiatie der Q_{n+1} functie zoodat:

$$R' = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{dQ_{n+1}}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Dit was te verwachten omdat de waarde:

$$R' = k_n \frac{dQ_{n+1}}{dx}$$

voldoet aan de voorwaarde (8)

$$\int x^{m+2} \frac{dQ_{n+1}}{dx}\, dx = \int x^m \frac{dQ_{n+1}}{dx}\, dx, \quad m < n$$

't geen bij partieele integratie terstond blijkt.

Op grond van deze betrekking had men de hier behandelde reeks:

$$u = \Sigma\, A_n R_{n+2} \qquad n = 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \;\; .\;\; .\;\; .$$

ook (behoudens constante factoren) aldus kunnen schrijven:

$$u = (x^2 - 1)\, \Sigma\, A_n \frac{dQ_{n+1}}{dx} \qquad n = 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \;\; .\;\; .\;\; .$$

De berekening der A-constanten is gebaseerd op de evidente eigenschap der R functies, dat:

$$\int R_{n+2}\, R'_m\, dx = 0, \qquad m \text{ verschillend van } n$$

dus

$$A_n = \beta \int u\, R'_n\, dx$$

waarin

$$\beta^{-1} = \int R_{n+2}\, R'_n\, dx = \int R_{n+2}\, x^n\, dx = \int x^n\, (x^2 - 1)\, R'_n\, dx = 0$$

of, op grond van (11)

$$\beta^{-1} = \frac{1}{n+1} \int x^n\, (x^2 - 1) \frac{dQ_{n+1}}{dx}\, dx$$

terwijl, volgens de diff. verg. der R functie:

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2 - 1) \frac{dQ_{n+1}}{dv}\right] = (n + 2)\,(n + 1)\, Q_{n+1}$$

waaruit volgt:

$$\beta^{-1} = \frac{n + 2}{u + 1} \int x^{n+1}\, Q_{n+1}\, dx$$

of, wegens (8):

$$\beta^{-1} = - \frac{2^{2n+1}\, (n + 2)!\, n!\, n!\, n!}{(2n + 3)\,(2n + 1)!\,(2n + 1)!}.$$

Voor de berekening der A-coëff. geldt dan, algemeen:

$$A_n = \beta \left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2.(2n+1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\,.\,4\,.\,(2n+1)\,(2n-1)} \mu^{n-4} - \ldots \text{ enz.}\right] \quad (12)$$

Het negatieve teeken van β is daaraan te wijten, dat als algemeene factor is genomen x^2—1 terwijl, volgens de definitie der grenzen, x altijd < 1. Evengoed als de Q-functies zou men de R-functies

met een willekeurigen constanten factor kunnen vermenigvuldigen zonder afbreuk te doen aan de geldigheid der formules. Van dezen factor zou men gebruik kunnen maken, hetzij om bijzondere ontwikkelingen mogelijk te maken, hetzij om enkele uitdrukkingen te vereenvoudigen. Zoo zou b.v. in het onderhavige geval k_n zóó gekozen kunnen worden, dat $\beta = 1$ werd; voor de praktijk zou dit echter geen voordeel opleveren, integendeel de bewerking bemoeilijken.

c. Gegeven $u = \overset{u_1}{\underset{u_0}{}}$ *voor* $x = \pm 1$.

Terwijl, zooals boven is opgemerkt, bij de bewerking van waarnemingen der bewolking het geval zich voordoet, dat de frequenties voor de uiterste grenzen nul moeten worden gesteld, treft men, wanneer men heeft te doen, niet met de oorspronkelijke waarnemingen, maar met gemiddelde waarden, b.v. daggemiddelden, ook frequenties aan, waarvan wel de volkomen heldere en bedekte dagen, als kenmerken van het klimaat, een afzonderlijke rol spelen, maar waarbij, tengevolge van het middelen, een continue overgang tusschen de uiterste en tusschen gelegen waarden moet worden aangenomen.

In zulk een geval, waarin de krommen zeer eigenaardige vormen aannemen, die geene overeenkomst vertoonen met de bekende vormen, kan men zorg dragen dat alleen in den eersten term der reeks de voorwaarden voor de uitersten worden vastgelegd, terwijl alle overige termen dezelfde blijven als in het geval sub *b* behandeld.

De eerste term moet dan drie constanten bevatten, twee voor de uiterste waarden, één voor de vastlegging van den inhoud.

In de uitdrukking:

$$a_0 + b_0 x + c_0 x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

moeten dan de constanten voldoen aan de drie voorwaarden:

$$u_1 = a_0 + b_0 + c_0$$
$$u_0 = a_0 - b_0 + c_0$$
$$2a_0 + \frac{2c_0}{3} = 1$$

zoodat:

$$4a_0 = 3 - (u_1 + u_0)$$
$$2b_0 = u_1 - u_0$$
$$4c_0 = 3(u_1 + u_0) - 3.$$

De redeneering en ook de toepassing blijven, in dit geval, volkomen dezelfde als in *b*, wederom is:

$$\int R_{n+2} R'_m \, dn = 0, \qquad m \text{ verschillend van } n$$

met uitzondering echter van den eersten term der reeks, die nu den vorm (13) heeft.

Bij de berekening van A_n moet dus hiermede rekening worden gehouden door de toepassing eener correctie, die gemakkelijk te vinden is.

Wij merken hiertoe op dat:

$$(n+1)\int x^m R'_n\,dx = \int x^m \frac{dQ_{n+1}}{dx}\,dx$$

$$= \left(x^m Q_{n+1}\right)_{-1}^{+1} - m\int x^{m-1} Q_{n+1}\,dx.$$

Voor $m < n+2$ verdwijnt de laatste integraal en, daar R'_n van den tweeden graad is, hebben wij alleen dit geval te beschouwen.

Wij hebben dus algemeen:

$$(n+1)\int x^m R'_n\,dx = \left(x^m Q_{n+1}\right)_{-1}^{+1},\quad m < 3$$

Blijkens (6) is echter:

$$\left(Q_{n+1}\right)_{-1}^{+1} = \frac{2}{k_{n+1}} = \frac{2^n(n+2)!\,n!}{(2n+1)!} \text{ (voor } n \text{ even)}$$

terwijl voor n oneven de uitdrukking verdwijnt.

Hieruit volgt, dat ook

$$\left(x^m Q_{n+1}\right)_{-1}^{+1} = \frac{2}{k_{n+1}} \text{ voor } m+n \text{ even,}$$

en gelijk nul voor $m+n$ oneven; bij de bepaling van de constanten A_n heeft men dus niets anders te doen dan eene correctie toe te passen zoodanig dat, in de plaats van (12) nu gebezigd wordt, voor n oneven:

$$A_n = \beta\int uR'_n\,dx - \frac{2^{n+1}\cdot b_0\,n!\,n!}{(2n+1)!} = \beta\int uR'_n\,dx - \frac{2^n(u_1-u_0)n!\,n!}{(2n+1)!}. \quad (14)$$

en voor n even:

$$A_n = \beta\int uR'_n\,dx - \frac{2^{n+1}(a_0+c_0)\,n!\,n!}{(2n+1)!} = \beta\int uR'_n\,dx - \frac{2^n(u_1+u_0)n!n!}{(2n+1)!} \quad (15)$$

Met dit voorbeeld van aanpassing der methode aan bijzondere gevallen, dat op allerlei wijzen kan worden gevarieerd, moge hier worden volstaan.

§ 3. Ontwikkeling tusschen eenzijdig bepaalde en onbepaalde grenzen.

a. Geen bepaalde grenswaarde der functie.

Zooals boven is opgemerkt, bewegen zich de frequenties van duur

en grootte van regenbuien tusschen de eenzijdige grenzen: nul voor de kleinste en ∞ voor de grootste waarden.

Deze soort van frequenties vormt derhalve een overgang tusschen de gevallen van bepaalde en onbepaalde grenzen. Daar hier geen symmetrie voor de grenzen bestaat, is het niet mogelijk het nulpnnt der telling zoodanig te kiezen, dat de oneven functies bij integratie verdwijnen, waaruit volgt dat eene scheiding tusschen even en oneven functies geen zin zou hebben en men dus verplicht is volledige polynomia van opklimmenden graad te bezigen.

Ook bij deze kromme is er, evenmin als bij de in § 2 behandelde, geen enkel voordeel in gelegen de keuze van den oorsprong in het arithmetisch midden te leggen en is veeleer de zero-grens hiervoor, uit een logisch en praktisch standpunt beschouwd, aangewezen.

Ten einde de ontwikkeling tusschen de grenzen ∞ en nul te doen plaats vinden, heeft men de reeks der polynomia slechts met een hiertoe geschikten factor te vermenigvuldigen b.v. e^{-x}, zoodat de frequentie-kromme wordt:

$$u = e^{-x}(A_0 S_0 + A_1 S_1 + \ldots . \; enz.)$$
$$= A_0 \psi_0 + A_1 \psi_1 + \ldots . \; enz.$$

waarin:

$$S_n = x^n + a_1 x + a_2 n^{n-2} + \ldots . a_n$$

De voorwaarden waaraan de a-coëfficienten moeten voldoen zijn:

$$\int_0^\infty e^{-x} S_n \, dx = 0 \; , \int_0^\infty e^{-x} x S_n \, dx = 0 \ldots . \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} S_n \, dx = 0.$$

Voor de algemeene voorwaardelijke vergel. vindt men, daar:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx = n\,!,$$

$$n\,! + (n-1)\,!\, a_1 + (n-2)\,!\, a_2 + \ldots . 1\,!\, a_{n-1} + 0\,!\, a_n = 0$$
$$(n+1)\,! + n\,!\, a_1 + (n-1)\,!\, a_2 + \ldots . 2\,!\, a_{n-1} + 1\,!\, a_n = 0$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$(2n-1)\,! + (2n-2)\,!\, a_1 + (2n-3)\,!\, a_2 + \ldots . n\,!\, a_{n-1} + (n-1)\,!\, a_n = 0$$

Hieruit volgt voor den algemeenen vorm:

$$S_n = x^n - \frac{n^2}{1\,!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2\,!} x^{n-2} - \ldots . (-1)^n n\,! \quad . \quad (16)$$

De bepaling van A_n geschiedt op dezelfde wijze als in de vorige gevallen, daar ook hier:

$$\int_0^\infty e^{-x} S_m S_n \, dx = \int_0^\infty \psi_m S_n \, dx = 0 \, , \qquad m < n$$

zoodat

$$A_n = \gamma \int_0^\infty u\, S_n\, dx$$

waarin:

$$\gamma^{-1} = \int_0^\infty e^{-x}\, S_n\, S_n\, dx = \int_0^\infty \psi_n\, x^n\, dx$$

maar:

$$\int_0^\infty \psi_n\, S_n\, dx = -\,(\psi_n\, S_n)_0^\infty + 2\int_0^\infty \psi_n \frac{dS_n}{dx}\, dx$$

of, daar de laatste integraal, volgens de gestelde voorwaarde, verdwijnt:

$$\gamma^{-1} = -\,(\psi_n\, S_n)_0^\infty = n!\, n!$$

omdat, volgens (16), alleen de laatste term in aanmerking komt.

De uitdrukking voor A_n wordt dan:

$$A_n = \frac{\mu_n}{n!\, n!} - \frac{n}{1!}\frac{\mu_{n-2}}{n!\,(n-1)!} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{\mu_{n-2}}{(n-1)!\,(n-2)!} - \ldots \frac{(-1)^n}{n!} \qquad (17)$$

Hiermede is de gestelde vraag beantwoord; bij de toepassing op bijzondere gevallen zal het dienstig zijn de verschillende betrekkingen die er tusschen de ingevoerde grootheden bestaan, en die analoog zijn aan de betrekkingen die voor bolfuncties gelden, samen te stellen.

Wij merken op, dat S_n en ψ_n ook aldus kunnen worden geschreven:

$$S_n = (-1)^n \left(\frac{d}{dx} - 1\right)^{(n)} x^n \quad , \quad \psi_n = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\,(e^{-x}\, x^n) \quad . \qquad (18)$$

waaruit volgt:

$$S_n = -\,nS_{n-1} + \frac{x}{n}\frac{dS_n}{dx} \quad \text{en} \quad S_n = (x-n)\, S_{n-1} - x\frac{dS_{n-1}}{dx}$$

waaruit de recurreerende formule wordt afgeleid:

$$S_{n+1} + (2n + 1 - x)\, S_n + n^2\, S_{n-1} = 0 \quad , \quad . \quad . \quad . \qquad (19)$$

waarin voor S_n ook ψ_n kan worden geschreven.

Voorts vindt men voor de diff. verg., waaraan deze functies voldoen:

$$x\frac{d^2 S_n}{dx^2} + (1-x)\frac{dS_n}{dx} + nS_n = 0$$

$$x\frac{d^2 \psi_n}{dx^2} + (1+x)\frac{d\psi_n}{dx} + (n+1)\,\psi_n = 0.$$

b. Gegeven $u = 0$ *voor* $x = 0$.

Evenals de Q-reeks is pasklaar gemaakt voor nulwaarden der

functie bij de grenzen, zoo kan ook hier de ψ reeks door vermenigvuldiging met x pasklaar worden gemaakt voor het geval dat de functie voor de onderste grens de nulwaarde aanneemt; dit geval doet zich b.v. voor bij frequenties van de windsnelheid, wier kromme bij den oorsprong ontspringt, daar absolute windstilte niet voorkomt.

Hierdoor wordt de graad der polynomia met één verhoogd en men kan den algemeenen vorm der nieuwe T-functie direct uit (16) neerschrijven door deze uitdrukking met x te vermenigvuldigen en voorts voor n te schrijven $n+1$ behalve in de binomiumfactoren.

De voorwaarde ter bepaling van de a-coëff. wordt nu:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^m T_{n+1}\, dx = 0, \qquad m < n$$

en de algemeene vorm:

$$T_{n+1} = x^{n+1} - \frac{n}{1!}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}x^n + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{(n+1)!}{(n-1)!}x^{n-1} \ldots (-1)^n (n+1)!x. \quad (20)$$

Hieruit blijkt terstond dat:

$$S_n = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{dT_{n+1}}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

eene soortgelijke relatie dus als in (11) is geformuleerd tusschen de Q en R-functies.

Hieruit volgt dat, als men stelt:

$$T_{n+1} = xT'_n$$

$$A_n = \gamma' \int_0^\infty u\, T'_n\, dx$$

waarin

$$\gamma'^{-1} = \int_0^\infty e^{-x} T_{n+1} T'_n\, dx = \int_0^\infty e^{-x} x^n T_{n+1}\, dx =$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n \frac{dT_{n+1}}{dx} = (n+1)\int_0^\infty e^{-x} x^n S_n\, dx = (n+1)!\, n!$$

zoodat:

$$A_n = \frac{\mu_n}{0!\,(n+1)!\,n!} - \frac{\mu_{n-1}}{1!\,n!\,(n-1)!} + \frac{\mu_{n-2}}{2!\,(n-1)!\,(n-2)!} - \ldots \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (22)$$

Noemen wij de hier behandelde reeks de ψ'_{n+1} reeks zoodat:

$$\psi'_{n+1} = e^{-x} T_{n+1} = e^{-x} x\, T'_n$$

dan gelden voor deze functies de volgende betrekkingen:

$$\psi'_{n+1} = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+1}) = (-1)^{n+1} x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{-x}x^n) = -x\frac{d\psi_n}{dx}$$

$$x\frac{d^2T'_n}{dx^2} + (2-x)\frac{dT'_n}{dx} + nT'_n = 0$$

$$x\frac{d^2T_{n+1}}{dx^2} - x\frac{dT_{n+1}}{dx} + (n+1)T_{n+1} = 0$$

$$x\frac{d^2\psi'_{n+1}}{dx^2} + x\frac{d\psi'_{n+1}}{dx} + (n+1)\psi'_{n+1} = 0.$$

Op volkomen analoge wijze als de R-reeks kan worden uitgedrukt door diff. quot. van de Q-functies:

$$u_R = (x^2-1)\Sigma A_n \frac{dQ_{n+1}}{dx},$$

kan dus ook hier de ψ' reeks worden uitgedrukt in diff. quot. van de ψ reeks:

$$u_{\psi'} = -x\Sigma A_n \cdot \frac{d\psi_n}{dx}$$

Ook bij deze soort van frequentie-krommen kan, evenals bij die met bepaalde grenzen, eene verandering der schaalwaarde worden ingevoerd en van groot voordeel zijn.

Bij de in § 2 beschouwde krommen konden hierdoor de grenzen vereenvoudigd worden; hier heeft zulk eene verandering geen invloed op de grenzen, die 0 en ∞ blijven, ook al schrijft men hx voor x, maar men heeft het hierdoor in zijne macht om reeds den eersten term der reeks, die den inhoud bepaalt, meer tot de gezochte kromme te doen naderen, zoodat de taak der A-coëff. wordt verlicht.

De factor h, die uit den aard der zaak positief is, brengt in de behandeling der reeks:

$$u = e^{-hx}[A_0S_0(hx) + A_1S_1(hx) + \ldots \text{ enz.}] \quad . \quad . \quad (23)$$

geene verandering; alleen zullen nu in (17) alle coëff. A_n dezen constanten factor bevatten daar:

$$\gamma^{-1} = \int_0^\infty e^{-hx} S_n(hx)\, S_n(hx)\, dx = \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-t} S_n(t)\, S_n(t)\, dt$$

zoodat:

$$A_n = h\left[\frac{h^n\mu_n}{n!n!} - \frac{n}{1!}\cdot\frac{h^{n-1}\mu_{n-1}}{n!(n-1)!} + \ldots \frac{(-1)^n}{n!}\right] \quad . \quad . \quad (24)$$

Men kan dus evengoed, en met voordeel van den vorm, terstond schrijven voor (23):

$$u = he^{-hx}[A_0S_0(hx) + A_1S_1(hx) + \ldots \text{ enz.}] \quad . \quad . \quad (23^a)$$

en in (24) den factor h doen vervallen.

In de keuze van den schaal-factor h is men natuurlijk volkomen vrij; het is echter wenschelijk eene keuze te treffen, die in overeenstemming is met den aard der kromme en dus, willekeurig, eene methode van bepaling uit de gegevens zelve vast te stellen.

Hiertoe heeft men in (23) slechts één der constanten A te doen vervallen, waardoor de vrij komende gemiddelde voor eene definitie van h beschikbaar komt.

Het ligt voor de hand te stellen:

$$A_1 = 0$$

waardoor dan de waarde van h, daar $A_0 = 1$, wordt vastgelegd als:

$$\mu_1 = A_0 h \int_0^\infty e^{-hx}\, x\, dx = \frac{1}{h}$$

§ 4. Ontwikkeling tusschen de onbepaalde grenzen $\pm \infty$.

Het ligt, om redenen van symmetrie voor de hand om, als factor voor de grensbepaling, in dit geval e^{-x^2} te nemen; kiest men dan, om dezelfde reden, het arithmetisch midden tot oorsprong, dan kan men wederom, evenals bij bepaalde grenzen, de polynomia scheiden in even en oneven functies omdat, bij integratie tusschen de grenzen, de oneven functies verdwijnen.

De reeks wordt dan:

$$u = e^{-x^2}\,[A_0 U_0 + A_2 U_2 + A_3 U_3 + \ldots \text{ enz.}$$
$$= A_0 \varphi_0 + A_2 \varphi_2 + A_3 \varphi_3 + \ldots \text{ enz.}$$

daar, wegens de keuze van den oorsprong, de A_1-term vervalt. De voorwaardelijke vergel. ter bepaling van de a-constanten is:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m Q_n\, dx = 0 \qquad m < n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

of, algemeen, voor n even:

$$[(n-1)(n-3)...1] + 2a_2\,[(n-3)(n-5)...1] + 2^2 a_4\,[(n-5)(n-7)...1] + \\ + \ldots + 2^{n/2} a_n = 0$$

$$[(n+1)(n-1)...1] + 2a_2\,[(n-1)(n-3)\,.\,1] + 2^2 a_4\,[(n-3)(n-5)...1] + \\ + \ldots + 2^{n-2/2} a_n = 0$$

. . . . . .

$$[(2n-3)(2n-5)...1] + 2a_2\,[(2n-5)(2n-7)...1] + \\ + 2^2 a_4\,[(2n-7)(2n-9)...1] + \ldots + 2a_n\,[(n-3)(n-5)...1] = 0$$

voor n oneven:

$$[n(n-2)..1] + 2a_1\,[(n-2)(2-4)..1] + 2^2 a_3\,[(n-4)(n-6)..1] + \\ + 2^{n-1/2} a_{n-2} = 0$$

$$[(n+2)(n)..1] + 2a_1[(n)(n-2)..1] + 2^2a_2[(n-2)(n-4) = ..1] + \\ + 2^{n-3/2}a_{n-2} = 0$$

. . . . . .

$$[(2n-3)(2n-5)...1] + 2a_1[(2n-5)(2n-7)..1] + \\ + 2^2a_2[(2n-7)(2n-9)...1] + 2a_{n-2}[(n-2)(n-4)..1] = 0.$$

Hieruit volgt voor den algemeenen vorm van het polynomium:

$$U_n = x^n - \frac{n(n-1)}{2^2\ 1!}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^4 . 2!}x^{n-4} - . \ . \text{ enz.} \quad (26)$$

waaruit kan worden afgeleid, dat U_n en φ_n voldoen aan de diff. vergel.:

$$\frac{d^2U_n}{dx^2} - 2x\frac{dU_n}{dx} + 2nU_n = 0$$

$$\frac{\partial^2\varphi_n}{dx^2} + 2x\frac{d\varphi_n}{dx} + 2(n+1)\varphi_n = 0$$

terwijl de recurreerende formule wordt:

$$2U_{n+1} - 2xU_n + nU_{n-1} = 0$$

De bepaling der A-coëff. geschiedt op dezelfde wijze als in alle vorige gevallen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ U_m\ U_n\ dx = 0$$

voor alle waarden van m verschillend van n zoodat:

$$A_n = \delta\int_{-\infty}^{+\infty} u\ U_n\ dx$$

waarin:

$$\delta^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ U_n\ U_n\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n\ x^n\ dx = \frac{n!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

zoodat:

$$A_n = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\mu_n}{n!} - \frac{\mu_{n-2}}{2^2 . 1!(n-2)!} + \frac{\mu_{n-4}}{2^4 . 2!(n-4)!} - \text{enz.}\right] . \quad (27)$$

Uit de numerieke waarden afgeleid uit (26) en uit de diff. verg. blijkt dat, op een willekeurigen, constanten factor na, de φ_n gelijk zijn aan de afgeleiden van de n^{de} orde van φ_0 of e^{-x^2}, zoodat men ook schrijven kan:

$$\varphi_n = k_n\frac{d^n\varphi_0}{dx^n}$$

hetgeen te verwachten was daar deze waarde voldoet aan de voorwaarde (25); door herhaalde partieele integratie is dit gemakkelijk aan te toonen. Stelt men $k_n = 1$, dan wordt

$$\varphi_n = \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = (-2)^n U_n e^{-x^2}$$

en de vorm voor de A-coëff. overeenstemmend met dien door BRUNS aangegeven.

De vervanging van φ_n door $\frac{d^n \varphi_0}{dx^n}$ kan dus even goed geschieden als de Q-functies door bolfuncties; in de praktijk wordt hierdoor echter evenmin voordeel verkregen, daar men de polynomia met onnoodige coëfficienten belast.

Na hetgeen in § 3 is opgemerkt omtrent de verandering der schaalwaarde zal het voldoende zijn er op te wijzen dat ook hier het groote voordeel hiervan is te zoeken in de directe aanpassing van den eersten term der reeks aan den vorm der kromme met behoud van den inhoud. De vergelijking der kromme wordt dan:

$$u = e^{-h^2x^2}[A_0 U_0(hx) + A_2 U_2(hx) + enz. \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

en voorts:

$$A_n = \frac{2^n h}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{h^n \mu_n}{n!} - \frac{h^{n-2}\mu^{n-2}}{2^2 . 1!(n-2)!} + enz.)\right]. \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Voor de keuze van den willekeurigen factor h, (dien men bij deze opvatting gevoegelijk den schaalfactor zou kunnen noemen) overeenkomstig den aard der kromme, ligt het voor de hand $A_2 = 0$ te stellen, waardoor de gemiddelde der tweede orde vrij komt voor de berekening van h; men ziet terstond dat;

$$\mu_2 = \frac{1}{2h^2}$$

Natuurlijk kan men de niet van n afhankelijke coëff. van (29) ook overbrengen naar (28) waardoor de vergel. der kromme wordt

$$u = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}[A_0 U_0 + A_2 U_2 + A_4 U_4 + enz.$$

Bepaalt men zich tot den eersten term der ontwikkeling dan vindt men, daar $A_0 U_0 = 1$, de eenvoudige foutenwet:

$$u = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}.$$

§ 5. ONBEPAALDE GRENZEN, TWEE VERANDERLIJKEN.

De behandeling van windwaarnemingen biedt na het vorige principieel geene bezwaren omdat, bij de berekening der gemiddelden van verschillende orde, de twee veranderlijken (projecties op twee willekeurig gekozen assen) steeds van elkander kunnen worden gescheiden en overigens de behandeling volkomen dezelfde blijft.

Alleen treden nu, in de plaats van één gemiddelde voor elke orde, $p+1$ gemiddelden op van de orde p.

Stellen wij door V_n hetzelfde polynomium voor van y als U_n is van x, dan neemt, omdat $U_0 = V_0 = 1$, de ontwikkeling den vorm aan:

$$u(x,y) = e^{-x^2-y^2}[A_0 + A_{1,0}U_1 + A_{0,1}V_1 + A_{2,0}U_2 + A_{1,1}U_1V_1 + A_{0,2}V_2 + A_{3,0}U_3 + A_{2,1}U_2V_1 + A_{1,2}U_1V_2 + A_{0,3}V_3 + enz.] \quad . \quad (30)$$

De algemeene vorm der polynomia wordt:

$$U_n V_m$$

en daar ook hier:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}(U_nV_m)(U_pV_q)\,dxdy = 0$$

voor alle waarden van p verschillend van n en van q verschillend van m:

$$A_{nm} = \varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}u(U_nV_m)\,dxdy$$

waarin:

$$\varepsilon^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}(U_nV_m)^2\,dxdy = \frac{n!m!}{2^{n+m}}\pi \quad . \quad . \quad (31)$$

Uit de beschouwingen van § 4 volgt, dat aan de functie:

$$\Phi_{n,m} = e^{-x^2-y^2}U_nV_m$$

ook de vorm:

$$\Phi_{nm} = k_{nm}\frac{d^{n+m}}{dx^n dy^m}\Phi_0 = k_{nm}\frac{d^{n+m}}{dx^n dy^m}e^{-x^2-y^2}$$

kan worden gegeven, daar deze voldoet aan de gestelde voorwaarde; de reeks (30) neemt dan den vorm aan eener som van differentiaalquotienten, evenals de reeks van Brucns en

$$\Phi_{nm} = (-2)^{n+m}U_nV_m e^{-x^2-y^2}$$

terwijl tevens (31) dienovereenkomstig moet gewijzigd worden.

Is het mogelijk den oorsprong der coördinaten naar het arithmetisch midden te verleggen door correctie der projecties voor de gemiddelde waarden, dan vervallen uit (30) de termen met de coëff. $A_{1,0}$ en $A_{0,1}$.

Wil men de schaalwaarden overeenkomstig den aard der gegevens wijzigen, dan moet overal voor x en y geschreven worden hx en $h'y$, terwijl (31) wordt:

$$\varepsilon^{-1} = \frac{n!m!}{2^{n+m}}\frac{\pi}{hh'}.$$

Voor de bepaling der schaalfactoren h en h' behooren dan:

$$A_{2.0} \text{ en } A_{0.2} = 0$$

gesteld te worden, waardoor de beide ongemengde gemiddelden der 2de orde vrijkomen voor de berekening dezer constanten en:

$$\mu_2(x) = \frac{1}{2h^2} \text{ en } \mu_2(y) = \frac{1}{2h'^2}$$

Laat men eindelijk de assen eene draaiing ondergaan, zoodanig dat zij samenvallen met de hoofd-inertie-assen, dan moet ook $A_{1.1} = 0$ gesteld worden, 't geen gelegenheid geeft om de richting der hoofd-assen te berekenen.

De reeks (30) wordt dan:

$$u = e^{-x^2-y^2}[A_0 + A_{3.0}U_3 + A_{2.1}U_2V_1 + A_{1.2}U_1V_2 + A_{0.3}V_3 + A_{4.0}U_4 + A_{3.1}U_3V_1 + A_{2.2}U_2V_2 + A_{1.3}U_1V_3 + A_{0.4}V_4 + \text{enz.}$$

waarin alle termen, behalve de eerste, voorstellen afwijkingen van de normale exponentieële wet; de termen van oneven graad zijn eene maat voor de verschillende soorten van scheeften, die van even graad voor de verschillende soorten van symmetrieke afwijkingen.

Scheikunde. — De Heer SCHREINEMAKERS biedt eene mededeeling aan: *„Over evenwichten in quaternaire stelsels."*

Nemen wij eerst het stelsel met de komponenten: *water, aethylalkohol, methylalkohol* en *ammoniumnitraat*; bij de gewone temperatuur hebben wij dan eene vaste stof en drie oplosmiddelen, die zich in alle verhoudingen met elkaar vermengen, zoodat de optredende evenwichten zeer eenvoudig zijn. De in dit stelsel bij 30° optredende evenwichten zijn onderzocht en in Figuur 1 op de gewone wijze graphisch voorgesteld; de hoekpunten W, M, A en Z van den tetraeder geven de komponenten: water, methylalkohol, aethylalkohol en het zout: ammoniumnitraat aan.

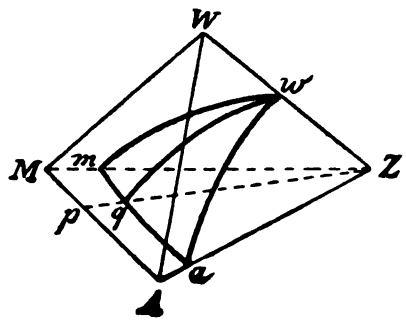


Fig. 1.

De kromme *wa* op het zijvlak *WAZ* gelegen stelt de oplossingen voor, uit water en aethylalkohol bestaande en met vast zout verzadigd; de kromme *wm* stelt de met vast zout verzadigde oplossingen voor van water-methylalkoholmengsels, terwijl *ma* de oplossingen aangeeft van aethyl-methylalkoholmengsels, eveneens met vast zout verzadigd.

De quaternaire evenwichten nl. de oplossingen van water-methyl-aethylalkoholmengsels, verzadigd met vast zout, worden voorgesteld door het vlak *wma*, dat men het verzadigingsvlak van het vaste zout *Z* kan noemen.

Brengt men door een der ribben b.v. door *WZ* een plat vlak b.v. het vlak *WZp*, dan stellen alle punten van dat vlak phasen voor, die de komponenten *A* en *M* in dezelfde verhouding bevatten. Dit vlak snijdt het verzadigingsvlak volgens de kromme *wq*; deze geeft dus met vast zout verzadigde oplossingen aan, waarin de verhouding tusschen methyl- en aethylalkohol konstant is.

De punten eener dergelijke kromme zijn gemakkelijk te verkrijgen; men voege eerst methyl- en aethylalkohol bij elkaar zoodat het mengsel b.v. door *p* worde voorgesteld; door wisselende hoeveelheden water bij te voegen, krijgt men de punten der lijn *pW* en door de oplossingen met zout te verzadigen, de punten der kromme *qw*.

Op deze wijze zijn verschillende doorsneden van het verzadigingsvlak met door de ribbe *WZ* gaande vlakken verkregen.

In het stelsel: *water*, *methylalkohol*, *aethylalkohol* en *kaliumnitraat* treden volkomen overeenkomstig evenwichten op; het verzadigingsvlak voor 30° is in dit stelsel door Mej. C. DE BAAT bepaald.

In het stelsel: *water*, *aethylalkohol*, *ammoniumnitraat* en *zilvernitraat* zijn de verhoudingen iets minder eenvoudig; er treden n.l. bij 30° twee vaste komponenten en één dubbelzout: $AgNO_3 . NH_4NO_3$ op; de bij 30° optredende evenwichten zijn in figuur 2 voorgesteld. Terwijl figuur 1 eene perspectievische voorstelling van den tetraëder is, is figuur 2 eene projectie op een plat vlak, evenwijdig aan twee elkaar kruisende ribben, in dit geval de ribben: *WA* en *AgN*, zoodat deze in de projectie loodrecht op elkaar komen te staan en elkaar halveeren. De hoekpunten *W*, *A*, *Ag* en *N* geven de komponenten water, alkohol, $AgNO_3$ en NH_4NO_3 aan. De projectie van een willekeurig punt binnen den tetraëder op het projectievlak is gemakkelijk aan te geven. Neemt men n.l. de lijn *WA* als *X*-as en de lijn *NAg* als *Y*-as van een coördinatenstelsel en neemt men als positieve richtingen die naar *A* en *Ag*, dan vindt men:

$$X = \frac{A-W}{2} \qquad Y = \frac{Ag-N}{2}$$

als A, W, Ag en N de hoeveelheden alkohol, water, $AgNO_3$ en

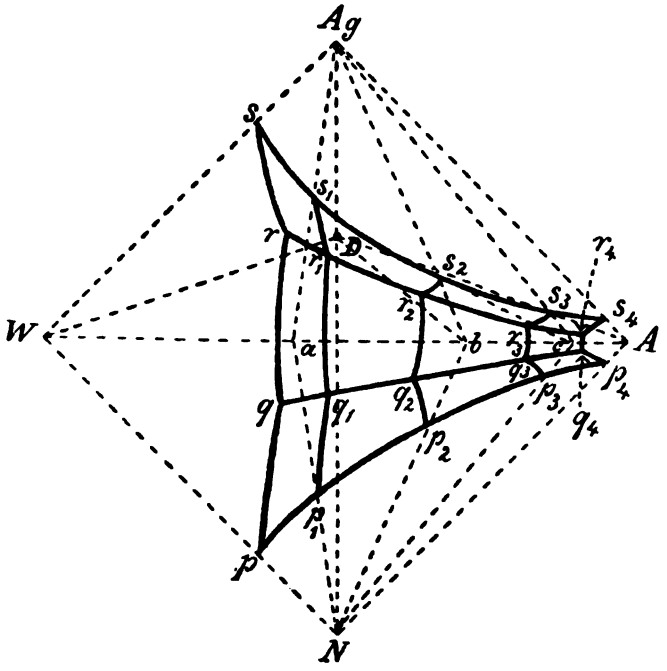


Fig. 2.

NH_4NO_3 aangeven door het beschouwde punt binnen den tetraeder voorgesteld.

Op deze wijze is figuur 2 afgeleid en men ziet gemakkelijk in, dat de evenwichten door drie vlakken n.l. ss_4r_4r, rr_4q_4q en qq_4p_4p worden voorgesteld. Het eerste vlak is het verzadigingsvlak van het zilvernitraat, het tweede dat van het dubbelzout en het derde dat van het ammoniumnitraat.

Het dubbelzout is in de figuur door punt D voorgesteld; dat natuurlijk op de lijn $Ag\,N$ moet liggen. Als de samenstellingen der phasen in molecuulprocenten uitgedrukt waren, dan zou D in den oorsprong van het coördinatenstelsel vallen; dit is thans echter, daar de samenstellingen in gewichtsprocenten uitgedrukt zijn, niet het geval. De kromme $s\,s_1\,s_2\,s_3\,s_4$, op het zijvlak $W\,Ag\,A$ gelegen is de verzadigingslijn van zilvernitraat in water-alkoholmengsels; de oplosbaarheid van dit zout in water (punt s) wordt door toevoeging van alkohol steeds kleiner; de oplosbaarheid in absoluten alkohol wordt door s_4 voorgesteld.

De verzadigingslijn van ammoniumnitraat in water-alkoholmengsels wordt door $p\,p_1\,p_2\,p_3\,p_4$ voorgesteld; men ziet ook hieruit dat de

oplosbaarheid van ammoniumnitraat in water door alkohol sterk wordt verlaagd. De evenwichten in het ternaire stelsel water, zilvernitraat en ammoniumnitraat worden voorgesteld door de drie verzadigingslijnen *sr*, *rq* en *qp*, gelegen op het zijvlak *W Ag N*; *sr* geeft de met zilvernitraat verzadigde oplossingen aan, *qp* de met ammoniumnitraat en *rq* de met het dubbelzout verzadigde. Trekt men de lijn *WD*, dan ziet men dat deze de verzadigingslijn *rq* van het dubbelzout snijdt; dit is dus in water zonder ontleding oplosbaar.

Om nu de evenwichten in het quaternaire stelsel te leeren kennen, handelde ik op de volgende wijze. In plaats van water nam ik een water-alkoholmengsel dat 41,8 % alkohol bevatte en bepaalde hierin de verzadigingslijnen van het zilvernitraat, ammoniumnitraat en het dubbelzout. Daar de oplossingen alle water en alkohol in konstante verhouding bevatten, moeten zij liggen in een plat vlak dat door de ribbe *Ag N* van het prisma gaat en ribbe *WA* in punt *a* snijdt, dat een waterigen alkohol van 41,8 % aangeeft. Ik vond op deze wijze de drie verzadigingslijnen s_1r_1, r_1q_1 en q_1p_1, die alle dus in het vlak *a Ag N* liggen; trekt men de lijn *aD* dan blijkt, daar deze tak r_1q_1 doorsnijdt, dat het dubbelzout ook in waterigen alkohol zonder ontleding oplost.

Op overeenkomstige wijze bepaalde ik de verzadigingslijn in water-alkoholmengsels, die 71,23 en 91,3 % alkohol bevatten; steeds vond ik drie takken; zij zijn in de figuur door s_2r_2, r_2q_2 en q_2p_2 en door s_3r_3, r_3q_3 en q_3p_3 voorgesteld.

Daar de lijn *bD* de verzadigingslijn q_2r_2 snijdt is het dubbelzout in waterigen alkohol van 71,23 % zonder ontleding oplosbaar; anders is het echter met de lijn *cD*; deze snijdt de verzadigingslijn q_3r_3 van het dubbelzout niet meer, maar wel die van het zilvernitraat r_3s_3, zoodat dit door waterigen alkohol van 91,3 % wordt ontleed onder afscheiding van $AgNO_3$.

Daar de oplosbaarheid der komponenten in absoluten alkohol slechts enkele procenten bedraagt, heb ik het ternaire stelsel alkohol—zilvernitraat—ammoniumnitraat niet onderzocht; het lijdt echter wel geen twijfel of de oplosbaarheidslijnen geven iets als door $s_4r_4q_4p_4$ voorgesteld en het dubbelzout zal door absoluten alkohol ook onder zilvernitraatafscheiding ontleed worden.

Uit het vorige volgt nu dadelijk dat in het quaternaire stelsel de volgende evenwichten optreden:

$L + AgNO_3$	waarvan	L	voorgesteld	door	vlak:	$s\,r\,r_4\,s_4$
$L + NH_4NO_3$	„	„	„	„	„	$q\,p\,p_4\,q_4$
$L + AgNH_4(NO_3)_2$	„	„	„	„	„	$r\,q\,q_4\,r_4$
$L + AgNO_3 + AgNH_4(NO_3)_2$	„	„	„	„	lijn:	$r\,r_4$
$L + NH_4NO_3 + AgNH_4(NO_3)_2$	„	„	„	„	„	$q\,q_4$

Bij de beschouwing dezer evenwichten doen zich verschillende vragen voor, waarvan ik eene enkele even wil aanstippen. Als men b.v. weet dat in het ternaire stelsel water, zilvernitraat, ammoniumnitraat, waarvan de beide zouten anhydrisch zijn, bij 30° een anhydrisch dubbelzout optreedt, dan kan men zich afvragen welke evenwichten er zullen optreden als men het water door een ander oplosmiddel b.v. door waterigen of absoluten alkohol vervangt.

Deze vraag geheel in 't algemeen te beantwoorden is ondoenlijk; als wij echter aannemen, dat er geen vaste phasen ontstaan, die met het nieuwe oplosmiddel kristalliseeren, dan wordt zij vrij eenvoudig. In het algemeen kan men aantoonen, dat ook in het nieuwe oplosmiddel de drie zelfde verzadigingslijnen zullen optreden, zoodat eene oplossing, verzadigd met de twee komponenten of oplossingen, verzadigd met een ander dubbelzout niet kunnen optreden.

Ofschoon dus hetzelfde dubbelzout in de beide oplosmiddelen moet optreden, kan zijn gedrag ten opzichte van de beide zuivere oplosmiddelen toch verschillend zijn; er kunnen zich daarbij verschillende gevallen voordoen; het kan b.v. in beide oplosmiddelen zonder ontleding oplosbaar zijn; het kan ook dat het, zooals in het hiervoor besproken geval, in het eene oplosmiddel zonder, in het andere met ontleding oplosbaar is; verder kan het in beide oplosmiddelen met ontleding oplossen. Als het laatste gebeurt, kan men nog twee gevallen onderscheiden; het kan nl. dat zich in beide oplosmiddelen dezelfde komponent afscheidt, het kan echter ook dat zich in het eene oplosmiddel de eene, in het andere de andere komponent afzet.

Overeenkomstige als de hiervoor besproken evenwichten heeft men ook bij 30° in de stelsels:

water — alkohol — zilvernitraat — kaliumnitraat
en water — alkohol — benzoëzuur — bezoëzureammoniak;

in het eerste stelsel treedt nl. een dubbelzout op van zilvernitraat en kaliumnitraat; in het laatste, dat door den Heer H. Filippo onderzocht wordt, eene verbinding van benzoëzuur en benzoëzureammoniak.

In het stelsel: water, alkohol, ammoniumsulfaat en mangaansulfaat treden weer geheel andere evenwichten op. De uitkomsten van dit onderzoek vindt men voor 50° in fig. 3 voorgesteld; deze is weer de projectie van den tetraëder op een vlak evenwijdig aan de ribben WA en MnN. De hoekpunten W, A, N en Mn geven de komponenten: water, alkohol, ammoniumsulfaat en mangaansulfaat aan.

Er treedt in dit stelsel bij 50° eene anhydrische verbinding $(Mn\,SO_4)_2\,(NH_4)_2\,SO_4$ op, die in de figuur door punt D_2, wordt

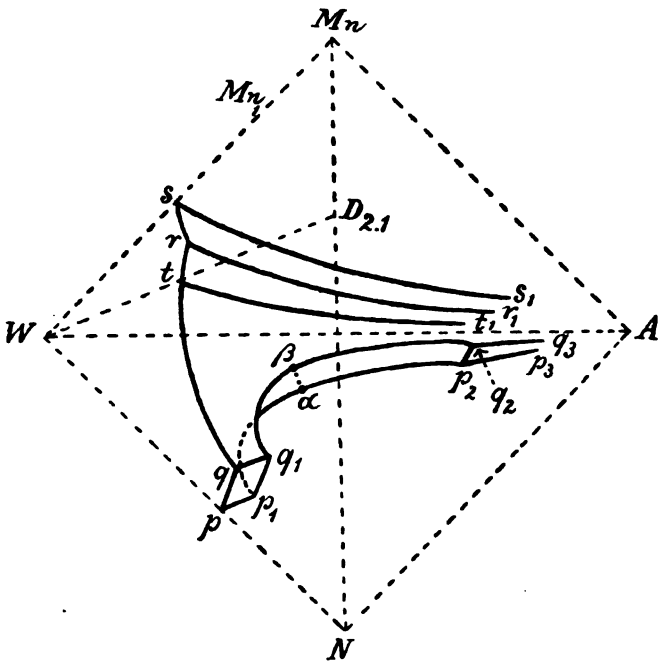


Fig. 3.

voorgesteld. Het $MnSO_4$ geeft bij die temperatuur de verbinding $MnSO_4 . H_2O$, door punt Mn_1 voorgesteld.

Op het zijvlak $MnWN$ vindt men de evenwichten in het ternaire stelsel water, mangaansulfaat, ammoniumsulfaat. Men vindt drie verzadigingslijnen: sr is die van het $MnSO_4 . H_2O$, rtq die van het dubbelzout D_2, en qp die van het $MnSO_4$. Daar de lijn WD_2, de verzadigingslijn van het dubbelzout in t snijdt, is dit in water zonder ontleding oplosbaar; t stelt deze verzadigde oplossing voor.

De isotherme ss_1 die de evenwichten in het ternaire stelsel: water, alkohol, mangaansulfaat aangeeft, bestaat uit twee verzadigingslijnen, waarvan echter slechts eene nl. ss_1 bepaald is. Deze geeft de oplossingen aan, verzadigd met $MnSO_4 . H_2O$; hieraan moet eene verzadigingslijn aansluiten met het anhydrisch $MnSO_4$ als vaste phase, die echter niet bepaald is.

De in het ternaire stelsel: water, alkohol, ammoniumsulfaat optredende evenwichten zijn door de isotherme $pp_1ap_2p_2$ in het vlak WAN voorgesteld; deze bestaan uit de verzadigingslijnen pp_1 en p_2p_2 van het ammoniumsulfaat en uit den tak p_1ap_2 eener binodale lijn met de kritische vloeistof a. De punten p_1 en p_2 stellen dus twee ternaire geconjugeerde vloeistoffen voor met ammoniumsulfaat verzadigd.

De quaternaire evenwichten worden door vier vlakken voorgesteld:
srr_1s_1 is het verzadigingsvlak van het $MnSO_4 . H_2O$
$rtqq_1\beta q_2q_3r_1$ is het verzadigingsvlak van het $D_{2.1}$
qpp_1q_1 en $q_2p_2p_3q_3$ zijn het verzadigingsvlak van het ammoniumsulfaat
$p_1ap_2q_2\beta q_1$ is het binodale vlak.

Dit laatste vlak wordt door de kritische lijn $a\beta$ in twee deelen verdeeld; met elk punt van het eene deel is een punt van het andere geconjugeerd; een dergelijk geconjugeerd puntenpaar stelt een paar quaternaire geconjugeerde vloeistofphasen voor. Het binodale vlak stelt dus de evenwichten vloeistof + vloeistof voor. De doorsneden der vier verzadigingsvlakken geven drie verzadigingslijnen;

rr_1 stelt de oplossingen voor verzadigd met $MnSO_4 . H_2O + D_{2.1}$
qq_1 en q_2q_3 stellen de „ „ „ „ $(WH_4)_2SO_4 + D_{2.1}$
$q_1\beta q_2$ stelt de geconjugeerde vloeistofparen voor, verzadigd met ammoniumsulfaat. Punt β is de met ammoniumsulfaat verzadigde kritische vloeistof.

Brengt men door ribbe WA en punt $D_{2.1}$ een plat vlak, dan doorsnijdt dat, voor zoover bepaald, het verzadigingsvlak van $D_{2.1}$ volgens de kromme tt_1; het dubbelzout is dus niet alleen in water, maar ook in waterigen alkohol zonder ontleding oplosbaar.

Bij 25° treden in dit stelsel geheel andere evenwichten op; op het zijvlak $W Mn A$ ontwikkelt zich nl. een nieuw ontmengingsgebied. Tevens verdwijnt het dubbelzout $D_{2.1} = (MnSO_4)_2(NH)_4)_2SO_4$ om plaats te maken voor het dubbelzout: $MnSO_4 . (NH_4)_2SO_4 . 6H_2O$. De hierbij optredende evenwichten hebben veel overeenkomst met de reeds vroeger door mij besprokene, die bij 30° in het stelsel: water, alkohol, ammoniumsulfaat en lithiumsulfaat optreden. Ik zal daarom hier op deze niet verder ingaan.

Scheikunde. — De Heer HOOGEWERFF biedt eene voorloopige mededeeling aan van den Heer B. W. VAN EELDIK THIEME over: *„De inwerking van geconcentreerd zwavelzuur op glycerineesters van verzadigde éénbasische vetzuren."*

(Mede aangeboden door den Heer W. A. VAN DORP).

Zooals bekend is, kunnen de verzeepingen in het algemeen, voorgesteld worden door de vergelijking:

$$RCOOR_1 + H_2O \rightleftarrows RCOOH + R_1OH \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

d.w.z. wij zullen steeds een evenwicht verkrijgen tusschen de reagee-

rende moleculen, dat afhankelijk is van de temperatuur, van het medium en van den aard van den ester.

De snelheid der verzeeping is daarenboven vrij gering en wordt door waterstofionen krachtig bevorderd; zoolang echter de hoeveelheid van het toegevoegde zuur den aard van het medium niet aanzienlijk wijzigt, zal het evenwicht er niet door veranderd worden.

In de techniek der vetsplitsing wordt als katalysator verdund zwavelzuur gebruikt, bijv. bij het Twitchell proces; uit het bovenstaande volgt, dat wij niet mogen verwachten, dat het proces volledig verloopt; men stelt zich dan ook tevreden met eene splitsing van het vet tot 94 à 96% vrij vetzuur.

Bezigen wij geconcentreerd zuur, dan wordt het proces gewijzigd. Ten eerste hebben wij met een ander medium te doen (in de praktijk waar de hoeveelheid zwavelzuur gering is, is het medium gedurende het proces zelf veranderlijk), ten tweede komt naast het eerste proces, het volgende:

$$RCOOR_1 + H_2SO_4 \rightleftarrows RCOOH + R_1OSO_3H \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

d.w.z. de verdringing van de eene zuurrest door de andere.

Ook hier mogen wij echter verwachten, dat de reactie omkeerbaar is, zoodat zij alleen dàn volledig naar rechts zal verloopen, wanneer:

a. Het toegevoegde zwavelzuur watervrij is, dus 100%.

b. Overmaat van zwavelzuur wordt toegevoegd aan droog vet.

c. De temperatuur, waarbij de inwerking plaats vindt, binnen bepaalde grenzen wordt gehouden. Vandaar dan ook, dat de mededeling van Bünte [1]) dat het botervet, door zwavelzuur van spec. gew. 1.8355, overeenkomende met 93.5% H_2SO_4, geheel verzeept wordt, onmogelijk juist kan zijn. 5 gram botervet wordt in Erlenmeijersche kolf van ± 1 L. inhoud op 100° verwarmd, dan 10 c.c. H_2SO_4 van 93.5 % toegevoegd, daarna gedurende 10 minuten in een waterbad op 30—32° gehouden en vervolgens 150 c.c. water toegevoegd.

Daarenboven is de hooge temp. waarbij de inwerking van het H_2SO_4 plaats grijpt, ongeschikt, om volledige verzeeping te verkrijgen; omdat zooals blijken zal, juist door verhooging van temperatuur, het evenwicht in vergelijking (2) naar links verschoven wordt. Bij eene herhaling van de door Bünte beschreven bepaling, verkreeg ik volgende cijfers:

---

[1]) Chemiker Zeitung No. 12. 1894 bl. 204, zie ook Kreis.

„ „ No. 76. 1892 bl. 1394.

Met H_2SO_4 van 93.5% splitsing van het botervet tot 81.0% vrij vetzuur
„ H_2SO_4 „ 98.5% „ „ „ „ „ 89.7% „ „
„ H_2SO_4 „ 100.0% „ „ „ „ „ 92.2% „ „

Uit deze cijfers blijkt duidelijk de invloed van de concentratie van het H_2SO_4; tevens de onvolmaaktheid der methode, zoodat het niet te verwonderen is, dat deze methode geheel is verlaten.

Ten einde een beter inzicht te verkrijgen in de inwerking van geconcentreerd zwavelzuur op vetten, werd door mij als uitgangspunt gekozen: zuiver trilaurine, bereid uit Tangkallak vet, afkomstig uit de vruchten van Cylicodaphne Litsaea, een op West-Java groeienden boom. Het vet bestaat uit trilaurine en trioleïne, zoodat door omkristalliseeren uit aether hieruit gemakkelijk het trilaurine te bereiden is.

Het gebruikte H_2SO_4 was 100.0% door titratie bepaald. Proef *a* had plaats bij eene temp. van 18°, proef *b* en *c* bij eene temp. van 1—2°. Duur van inwerking 30 minuten.

a 1 mol trilaurine op 6.5 mol H_2SO_4 gaf 86.6% vrij vetzuur
b 1 „ „ „ 26.0 „ H_2SO_4 „ 95.5% „ „
c 1 „ „ „ 52.0 „ H_2SO_4 „ 100.0% „ „

De reactie:

trilaurine + zwavelzuur = glycerinetrizwavelz. + laurinezuur

blijkt dus alléén praktisch volledig plaats te hebben met een zeer groote overmaat aan H_2SO_4 en bij lage temp., want herhaalt men proef *c* en verwarmt daarna gedurende 1½ uur op 60°, dan treedt eene verschuiving naar links in en wordt weer trilaurine teruggevormd. De gang van het onderzoek is in het kort aldus:

In een kolfje weegt met het 100.0% H_2SO_4 af, sluit nu het kolfje met een kurk en plaatst het in ijswater. Nu wordt in kleine hoeveelheden het afgewogen trilaurine toegevoegd. Daar bij inwerking van H_2SO_4 op trilaurine warmteontwikkeling plaats grijpt, moet men met toevoegen van eene nieuwe hoeveelheid trilaurine wachten, tot eene vorige portie is opgelost [1]). Is nu al het trilaurine toegevoegd en de duur van inwerking verstreken, dan wordt de inhoud van het kolfje op fijngestampt ijs gebracht, ten einde zooveel mogelijk temp. verhooging te voorkomen en eventueele verzeeping, daarna zooveel alcohol toegevoegd, totdat de opl. ±60% alcohol bevat en nu doorgeschud met een mengsel van aether en petroleumaether. De aether nu nágewasschen met water en daarna verdampt.

[1]) Uit deze warmteontwikkeling bij verzadigde verb., volgt, dat aan MAUMENE's proef (Comptes rendus 35 blz. 572. 1882), waar deze warmteontwikkeling dienst moet doen om onverzadigde verontreinigingen aan te toonen, niet te veel waarde moet gehecht worden.

Bij proef *c* bleef nu een stof over met een estercijfer nul en een zuurcijfer 280.5; hetgeen dus wijst op zuiver laurinezuur. Hieruit blijkt, dat àl het trilaurine was omgezet.

Bij herhaling van proef *c* met daaropvolgende verwarming gedurende $1^1/_2$ uur op 60°, werd, nà verwijdering van het H_2SO_4 op de beschreven wijze een stof verkregen met zuurcijfer 246.8 en verzeepingscijfer 280.9 dus estercijfer 34.1. Daar trilaurine een estercijfer heeft van 263.8; is er dus 12.9 % trilaurine teruggevormd.

Wat betreft het laurinezuur, dat in de vroeger gegeven vergelijking, naast glycerinetrizwavelzuur optreedt, zij nog opgemerkt, dat dit zich vereenigt met H_2SO_4 tot moleculaire verbindingen, die min of meer oplosbaar zijn in benzine. Lost men dus trilaurine op in 100.0% H_2SO_4 (zie proef *c*) en schudt men dit door met drooge benzine, dan is in de benzine laurinezuur naast H_2SO_4 aan te toonen. Verbindingen van dergelijk karakter zijn beschreven door HOOGEWERFF en VAN DORP [1]). Men neemt wel eens in deze additieverb. de zuurstof vierwaardig aan, aldus:

$$RCOOH + H_2SO_4 = R - C(=O) - O - \overset{H}{\underset{|}{O}} - SO_2H$$

Anderen, H. MEIJER [2]), nemen aan, een soort van gemengde zuuranhydrieten:

$$R.COOH + H_2SO_4 = R - C(=O) - O - SO_2H + H_2O$$

Het laatste is onwaarschijnlijk, omdat men in al deze verbindingen juist 1 molec. kristalwater zou moeten aannemen op 1 molec. der beide zuren. Wij zagen reeds bij de verzeeping van botervet, dat de concentratie van het H_2SO_4 een groote rol speelt, zoo ook bij het trilaurine. Liet men dus weer bij eene temp. van 1—2°, gedurende 30 minuten inwerken: op 1 molec. trilaurine 52 molec. H_2SO_4 van 94.6%, dan werd nà verwijdering van het H_2SO_4 een stof verkregen, bestaande uit 80% laurinezuur en 20% onontleed glycerid. Dit glycerid werd gescheiden van het laurinezuur en het estercijfer bepaald op 244.0. Deze zijn van trilaurine, dilaurine en monolaurine resp. 263.8 — 246.1 en 204.7, zoodat het afgescheiden glycerid een mengsel is.

Het mono- en dilaurine ontstaan hierbij waarschijnlijk uit verb. als $C_3H_5(OR)(O.SO_2H)_2$ en $C_3H_5(OR)_2(O.SO_2H)$ door ontleding met water $R = C_{11}H_{23}CO$.

[1]) Recueil XVIII 1899 bl. 211.

[2]) Monatshefte für Chemie 24 bl. 840.

Dergelijke verbindingen zijn nog in onderzoek. Ook bij de inwerking van geconc. H_2SO_4 op nitroglycerine komen analoge reacties voor. Zoo schrijven NATHAN en RINTOUL [1]) in een opstel over: Nitroglycerine und seine Darstellung:

„Die Absorption des Nitroglycerins durch die Abfallsäure ist nicht nur ein Lösungsvorgang. Es findet noch eine zweite Reaktion statt, zwischen der Schwefelsäure und dem Nitroglycerine, unter Bildung von Sulfoglycerin und Salpetersäure. Diese umkehrbare Reaktion gelangt schnell in den Gleichgewichtszustand, so dass bei einer normalen Abfallsäure eine Hälfte des gesamten absorbierten Nitroglycerin als Sulfoglycerin vorhanden ist; während der Rest tatsächlich als Nitroglycerin in Lösung geht."

De omgekeerde reactie (2), welke dus bij 60° zelfs in tegenwoordigheid van eene groote overmaat H_2SO_4 nog plaats vindt; aldus:

glycerinetrizwavelzuur + laurinezuur = trilaurine + zwavelzuur is in zekeren zin te vergelijken met de synthese van glyceriden volgens GRÜN en SCHACHT [2]) Zij schrijven echter:

„Die Esterificirung des Glycerins durch Schwefelsäure bleibt — auch bei Anwendung von grossen Überschüssen an Säure — bei der quantitativen Bildung von Glycerindischwefelsäure $(C_3H_5(OH)(O.SO_3H)_2$ stehen, dementsprechend treten auch bei der Einwirkung der organischen Säuren auf diese Verbindungen nur zwei Acyle in das Glycerinmolekül; man gelangt zur Diglyceriden."

„Die Bildung von Mono und Triglyceriden konnte beim Einhalten der unten angegebenen Bedingungen nicht constatirt werden; ebenso wenig die Bildung anderer Nebenproducte."

Het komt mij voor, dat deze uitspraak niet in overeenstemming kan zijn met hetgeen theoretisch te verwachten is; zij strijdt dan ook met mijne waarnemingen. Ten eerste ontstaat bij esterificeering van glycerine door H_2SO_4 nooit quantitatief glycerinedizwavelzuur; ten tweede ontstaan bij hunne synthese van diglyceriden wel nevenproducten.

Lost men één deel glycerine op in 4 dln H_2SO_4 van 98.3% dan ontstaat in hoofdzaak een mengsel van glycerinedizwavelzuur en glycerinetrizwavelzuur, daarnaast eene geringe hoeveelheid van het monozuur. Liet men nu op dit mengsel inwerken palmitinezuur opgelost in H_2SO_4, dan werd een stof verkregen met een estercijfer van 205.1. de estercijfers van tripalmitine en dipalmitine zijn resp. 208.8 en 197.6. Door één keer omkristalliseeren uit absoluten alcohol, kon bijna chem. zuiver tripalmitine met estercijfer van 208.1 en

[1]) Chemiker Zeitung No. 20. 1908. bl. 246.

[2]) Berichte 38 bl. 2284 (1905) zie ook Berichte 40 bl. 1778 (1907).

smeltp. 64-65° afgescheiden worden. Er is dus gevormd een mengsel van dipalmitine en tripalmitine in hoofdzaak. Het, volgens hunne methode, door mij bereidde Ba zout, bezit eene andere samenstelling als door hen wordt opgegeven, waarbij tevens dient opgemerkt te worden, dat $C_3H_6O_3S_2Ba + 2\,H_2O$ niet 7.63% H_2O verlangt, maar 8.50%.

1 deel glycerine van spec. gew. 1.261, chemisch zuiver, werd opgelost in 4 dln H_2SO_4 van 98.5%; na 15 minuten verdund met ongeveer gelijk volume water, geneutraliseerd met $BaCO_3$, het $BaSO_4$ door filtratie verwijderd en het filtraat in vacuum ingedampt. Na toevoeging van wat alcohol wordt nogmaals ingedampt, om zooveel mogelijk het water te verwijderen.

Wordt nu overmaat van absoluten alcohol toegevoegd, dan ontstaat een dik wit neerslag van siroopachtige consistentie, dat verscheidene malen flink wordt doorgeschud met alcohol, om mogelijk ongebonden gebleven glycerine te verwijderen. Het neerslag wordt nu na verloop van eenigen tijd vast en werd daarop in vacuum boven P_2O_5 gedroogd tot constant gewicht.

3.132 gram, van dit boven P_2O_5 gedroogde zout, gaven bij afrooken met H_2SO_4 1.7380 gram $BaSO_4$ dus 55.49% $BaSO_4$ = 32.65% Ba
0.7740 gram gaven bij afrooken met H_2SO_4 0.4295 gram $BaSO_4$ dus 55.49% $BaSO_4$ = 32.65% Ba.

Berekend voor het Ba zout $^{v}/_{h}$ dizuur (watervrij) 60.24% $BaSO_4$.
„ „ „ „ „ „ monozuur(„) 48.67%

Het boven P_2O_5 gedroogde zout, in droogstoof, gedurende $1^1/_2$ uur op 105° verhit, ontleedt onder bruinkleuring en optreding van acroleïne. 1.059 gram verloor bij deze operatie 0.011 gram, dus 1.03%.

Er is dus ontstaan een mengsel van Ba-zouten, hetgeen gemakkelijk verklaarbaar is, daar bij verdunning van het gebruikte mengsel van glycerine en H_2SO_4 het reeds gevormde trizuur tot lagere zuren overgaat.

Claesson [1]), die het eerst het glycerinetrizwavelzuur bereid heeft, merkte dezen overgang van het trizuur in lagere zuren reeds op.

Hij bereidde het trizuur uit watervrij glycerine en chloorsulfonzuur; zijne mededeeling, dat dit trizuur door koken met H_2O of met verdunde zuren, gemakkelijk volledig te splitsen is in glycerine en in zwavelzuur is echter onjuist; er blijft ten minste na één uur kokens, steeds een gedeelte van het H_2SO_4 gebonden aan glycerine in den vorm van een monozuur.

Het glycerinetrizwavelzuur werd door mij bereid volgens Claesson

[1]) Journal für praktische Chemie [2] bd. 20. bl. 1. 1879.

uit watervrij glycerine en chloorsulfonzuur. Afgewogen werd 1.619 gram glycerinetrizwavelzuur, opgelost in water en de opl. één uur gekookt, daarna werd geneutraliseerd met barytopl. en het $BaSO_4$ gewogen. Bij volledige afsplitsing van al het H_2SO_4 moest ontstaan 3.411 gram $BaSO_4$, gevonden werd 2.121 gram, dus zijn 1.290 gram $BaSO_4$ of 0.542 gram H_2SO_4 aan glycerine gebonden gebleven.

Bovenstaande experimenten verschaffen dus eenigszins meer licht aangaande de zwavelzure verzeeping van vetten. Over een en ander zal spoedig uitvoeriger bericht worden.

Gouda, 5 April 1908. *Laborat. der kaarsenfabriek.*

Natuurkunde. — De Heer P. ZEEMAN biedt eene mededeeling aan: „*Verandering van golflengte van de middelste lijn van tripletten in een magnetisch veld.* (Tweede gedeelte)."

§ 6. Wij zullen nu terugkeeren tot de waarnemingen van § 4. Rangschikt men deze naar de veldsterkte dan blijkt het dat de afstand $a'—a''$ met het toenemen der magnetische kracht sterk verandert. De verplaatsing van de lijn 5791 is niet eene lineaire functie van de veldsterkte maar neemt sterker toe dan uit die eenvoudige betrekking zou volgen. Het is echter niet zonder meer mogelijk uit deze waarnemingen te besluiten welken regel de verplaatsing volgt, omdat, zooals reeds in § 4 werd opgemerkt, de vergelijkingslijnen niet op volkomen onveranderden afstand blijven. Hierdoor komt het dan ook dat men eenigszins andere waarden voor $a'—a''$ verkrijgt, indien men deze uit de verandering van $a—a'$, dan wel uit de verandering van $b—a'$ berekent.

Wel is het mogelijk de richting der verplaatsing van 5791 te bepalen. Deze geschiedt naar den kant van het *rood*. Eene verplaatsing naar den kant der grootere golflengten beantwoordt in de figuur van § 3 aan eene verschuiving naar boven. Aan welke zijde van lijn 5791 zich het rood bevindt is op de negatieven steeds uit te maken door te letten op de beide zwakke satellieten met grootere golflengten en den eenen zwakken satelliet met kleinere golflengte, welke de hoofdlijn begeleiden [1]).

§ 7. De verplaatsing van de middelste lijn van het triplet kan ook met de methode van het niet-homogene veld worden aangetoond,

[1]) JANICKI. Feinere Zerlegung der Spektrallinien von Quecksilber u. s. w. Inaugural Diss. Halle a. S. 1905, Annalen der Physik Bd. 19, 36 1906.

indien met een echelon-spectroscoop wordt waargenomen. Zij moet zich dan afspiegelen in eene kromming van de middelste lijn, welke men echter met het tralie van ROWLAND onmogelijk zoude kunnen waarnemen en die dan ook door mij niet waargenomen is.

De kromming zal voor het oog gemakkelijker zichtbaar worden, indien men er voor zorgt dat in het beeld punten, beantwoordende aan zeer verschillende veldsterkten, dicht bijeen liggen. Ten einde dit te bereiken heb ik met een photographisch objectief van 10 c.M. brandpuntsafstand een omstreeks 11 maal verkleind beeld van een vacuumbuisje met kwik, geplaatst in het magnetische veld, op de spleet van den hulpspectroscoop ontworpen.

Op de plaat zijn een paar malen vergroot opnamen weergegeven, verkregen van lijn 5791 resp. van lijn 5770. De middelste lijn is in twee opvolgende orden waargenomen. Daartusschen loopen de componenten van de tripletten. Naarmate de magnetische kracht grooter wordt, verwijderen de componenten zich verder van de lijn waartoe zij behooren om in het midden van het gezichtsveld op een maximum afstand te komen.

De component naar rood bevindt zich in de figuren steeds links van zijne middelste lijn en keert in het midden de concave zijde daar naar toe; de tweede sterk gebogen lijn is de component naar den kant van het violet voor de andere orde.

De kromming van de middelste lijnen, waarvan wij juist het bestaan door onze proef willen aantoonen, is ontwijfelbaar zichtbaar op de figuur voor 5791. Gemakkelijk valt zij op door vergelijking met een rechte strook papier.

De figuur voor 5770 vertoont die kromming niet.

De asymmetrie in de magnetrische splitsing van lijn 5791 is dadelijk daarin zichtbaar, dat de eene middelste lijn dichter door de gebogen uiterste component genaderd wordt dan de andere.

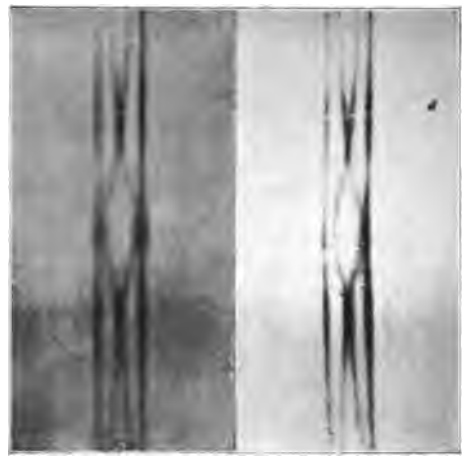
Noemt men a_v en a_r de afstanden der componenten tot de middelste lijn waarbij ze behooren dan is wat ik vroeger [1]) het bedrag der asymmetrie noemde gelijk aan $a_v - a_r$. Dit verschil is ook gelijk aan het verschil der afstanden dat de sterk gebogen componenten scheidt van de middelste lijnen waartoe ze niet behooren, en waarheen ze in het midden de convexe zijde toekeeren.

De beide opnamen werden bij de zelfde veldsterkte van omstreeks 34000 Gauss gedaan.

Men kan nu de vraag stellen of het verschil $a_v - a_r$ gelijk is aan tweemaal de verplaatsing van de middelste lijn of niet. In het eerste geval komt de asymmetrie tot stand door de beweging der middelste

[1]) ZEEMAN, Deze verslagen 30 November 1907.

P. ZEEMAN. „Verandering van golflengte van de middelste lijn van tripletten in een magnetisch veld." (2de gedeelte).



Hg.	5770	5791	1 mm. = 0.12 A.E.
splitsing:	symmetrisch.	asymmetrisch.	
middelste lijnen:	recht.	gebogen.	

lijn naar grootere golflengten, terwijl de buitenste componenten symmetrisch t. o. v. de oorspronkelijke lijn zich verplaatst hebben. Het andere, meer algemeene geval zou men zonder hypothese of zonder de uitkomsten van metingen eerder verwachten.

8. Ten einde eene experimenteele beslissing te verkrijgen heb ik op dezelfde photographische plaat zoowel de figuren in § 7 beschreven als de ongewijzigde lijnen opgenomen. Ik bemerkte echter weldra dat alleen in de allersterkste velden bij lijn 5791 de scheiding tusschen de middelste lijnen, in en buiten het veld, eenigermate voldoende werd om metingen mogelijk te maken en ga daarom op deze proeven niet verder in. Alleen wil ik nog een detail vermelden over de vacuumbuis met kwikdamp die bij al mijne proeven in sterke velden werd gebruikt. Deze vacuumbuis was van den vroeger vermelden, door PASCHEN aangegeven, vorm met niet zeer nauwe capillair. Het deel echter van de capillair dat zich in het weinig uitgestrekte veld bevindt is uitgetrokken, zoodat alleen over dien korten afstand de capillair eene kleine doorsnede heeft. De magneetpolen kunnen nu dicht bij elkaar worden gebracht, terwijl toch de electrische weerstand geen overmatig groote waarden aanneemt.

9. Voor metingen werd ten slotte op de volgende wijze te werk gegaan. De spleet van den hulpspectroscoop, welke voor de voorloopige analyse van het licht dient, werd verwijd, zoodat in den echelonspectroscoop gelijktijdig licht *der beide* gele kwiklijnen zichtbaar werd. De treden van den echelon waren evenwijdig geplaatst aan de spleet van den hulpspectroscoop. Het op die spleet ontworpen beeld van de vacuumbuis was thans zoodanig gekozen dat alleen licht uit het homogene deel van het veld geanalyseerd kon worden. Door een verschuifbaar schermpje vóór de photographische plaat was het mogelijk in het midden daarvan lijnen onder magnetischen invloed af te beelden, terwijl vervolgens de lijnen in een veld nul werden opgenomen in het boven- en het midden-deel der plaat. De opnamen bevestigden de uitkomst van § 6 betreffende de verplaatsing naar rood van lijn 5791.

Wat lijn 5770 aangaat is het nog niet beslist of daarbij inderdaad eene geringe verplaatsing bestaat [1]). Zeker is die uiterst klein.

[1]) Het eerste gedeelte dezer mededeeling bevat eene fout. In de laatste alinea van § 4 is n.l. uit de op de platen gemeten verplaatsing de verandering in golflengte berekend op dezelfde wijze als dit geschiedt, indien men den afstand van 2 orden buiten het veld, vergelijkt met den afstand, die binnen de orden liggende componenten naar rood en violet scheidt na het aanbrengen van het veld. Dit is natuurlijk onjuist in het geval van § 4. De laatste zin van § 4 en de laatste kolom van de tabel in § 5 verliezen dus hunne beteekenis.

Intusschen kwamen deze metingen slechts onvolledig tot uitvoering daar na de publicatie van het eerste deel van dit onderzoek [1]) eene mededeeling van GMELIN verscheen in het Nr. der physikalische Zeitschrift van 1 April 1908. GMELIN is onafhankelijk van mij en langs anderen weg tot eene behandeling van ons vraagstuk gekomen. Het buitengewoon hooge oplossend vermogen van den door GMELIN gebruikten echelon veroorloofde hem het quantitatief onderzoek verder uit te strekken dan mij mogelijk zou zijn geweest.

Ten slotte zij het mij nog vergund op te merken dat uit het bovenstaande wel blijkt, dat de waarneming over de asymmetrie in de richting van de krachtlijnen [2]), welke mij aanleiding tot dit onderzoek gaf, maar die met reserve werd medegedeeld, juist geweest moet zijn.

Plantenkunde. — De Heer WENT biedt eene mededeeling aan: *„Over de ontwikkeling van zaadknop, embryozak en eicel bij de Podostemaceae."*

Tijdens mijn reis naar West-Indië had ik de gelegenheid een van de stroomversnellingen in Suriname te bezoeken, waar Podostemaceae groeien, de Armina-vallen in de Marowyne-rivier. Hier verzamelde ik materiaal van deze merkwaardige planten, terwijl ik later overvloedig materiaal mocht ontvangen, bijeengebracht op de verschillende expeditities, die in de laatste jaren het binnenland van die kolonie onderzochten. Dit in alcohol geconserveerde materiaal is voor mij aanleiding geweest tot een onderzoek over deze plantenfamilie, dat ik spoedig in extenso hoop te publiceeren, maar waarvan ik hier reeds een enkel punt kort wil behandelen, namelijk de ontwikkeling van den zaadknop, den embryozak en de eicel.

Zooals ik boven reeds zeide, was het materiaal getixeerd in alcohol, maar toch bleek de fixatie voldoende te zijn, om tal van cytologische details met voldoende zekerheid aan gekleurde preparaten te onderscheiden. Op de wijze van behandeling van de preparaten wil ik in deze voorloopige mededeeling niet ingaan, alleen vermelden, dat de Heeren A. H. BLAAUW en J. KUYPER mij geholpen hebben bij het maken van de preparaten. Slechts van enkele soorten kon een volledige ontwikkelingsserie verkregen worden: dat waren *Oenone Imthurni Gochel* en *Mourera fluviatilis Aubl.*; van 8 andere soorten werden

[1]) ZEEMAN, Verslag van de Afdeeling van 29 Febr. 1908.

[2]) ZEEMAN, § 7 in Nieuwe waarnemingen enz. Deze verslagen 29 Febr. 1908.

alleen enkele ontwikkelingsstadiën onderzocht, van *Tristicha hypnoides Spr.* beschikte ik alleen over rijpe zaden.

Het bleek al spoedig, dat de geheele ontwikkeling van de zaadknop bij deze plantenfamilie zeer sterk afwijkt van het gewone type der *Angiospermae*, maar dat er in de familie een buitengewone eenvormigheid te constateeren valt, zoodat de verschillen tusschen de onderzochte soorten zoo gering zijn, dat zij in deze voorloopige mededeeling met stilzwijgen kunnen worden voorbijgegaan. De hier te geven beschrijving past dus op alle soorten.

De zaadknoppen zijn anatroop; in het jongste stadium, dat onderzocht werd, had de ombuiging reeds plaats gehad. Hier was nog uitsluitend de nucellus aanwezig en deze bestond uit een centrale rij van een viertal cellen omgeven door een enkele laag van peripherische cellen. Van deze centrale celrij wordt de bovenste, die dus nog door een kapje van epidermiscellen omgeven is, tot sporemoedercel. In verband daarmee onderscheidt deze zich al spoedig niet alleen door de grootte, maar ook door haar dichten protoplasmatischen inhoud en door de groote kern van alle overige cellen van den nucellus. Het verdere gedrag van deze sporemoedercel zal hieronder nader besproken worden.

Gaan wij thans eerst na hoe de integumenten ontstaan. Het buitenste ontstaat het *eerst* en hierin vinden wij de eerste afwijking van het normale verloop van de ontwikkeling bij de andere *Angiospermae*. Het vormt zich overigens gewoon als een ringvormige plooi op den nucellus, waarmee het bij de chalaza in samenhang blijft, terwijl het verder vrij los er omheen groeit. Ten slotte blijft daar, waar de randen bijeen komen een zeer nauwe micropyle over, die alleen goed te zien is, wanneer de doorsnede zuiver mediaan is.

Nadat het buitenste integument reeds de halve zaadknop heeft omgeven, begint het binnenste zich te ontwikkelen. Men ziet dan, dicht boven de inhechtingsplaats van het buitenste integument celdeelingen optreden in enkele epidermiscellen van den nucellus. Deze deelingen vinden zoodanig plaats, dat in elke overlangsche rij van epidermiscellen een wand optreedt in een van de basale cellen; deze wand maakt een hoek van ongeveer 45° met de lengterichting van de zaadknop, waardoor elk van die cellen in tweeën gedeeld wordt. De bovenste van die twee blijft dan epidermiscel van den nucellus, de onderste ontwikkelt zich tot binnenste integument. Op de dwarse doorsnede ziet men, dat het aantal epidermiscellen in den omtrek geteld bedraagt 5, een enkele maal 6 of 7. Oorspronkelijk zal dus ook het binnenste integument op de dwarse doorsnede een even groot aantal cellen te zien geven. Maar al spoedig treden deelwanden

op, waardoor dit binnenste integument twee rijen van cellen dik wordt. Meer dan twee rijen cellen ontwikkelen zich niet. Zij deelen zich wel nog door wanden, die ten deele radiaal gericht zijn, ten deele dwars staan ten opzichte van de lengterichting van den zaadknop. Vooral het aantal radiale wanden is zeer verschillend in de beide cellagen; in de buitenste groot, is het daarentegen in de binnenste klein. Dit heeft ten gevolge, dat men op de dwarse doorsnede het aantal cellen van de binnenste laag van het binnenste integument tellende, meestal slechts weinig meer dan 5 cellen vindt. Wanneer later de cellen van het binnenste integument zich vergrooten waardoor zij dikwijls afmetingen aannemen, die ze zeer sterk in het oog doen vallen, zijn het vooral die binnenste cellen, die door hun grootte afwijken. Daarmede gaat dan dikwijls gepaard de vorming van sterke wandverdikkingen.

Door de dwarse wanden, die in de cellen van het binnenste integument optreden, wordt dit in staat gesteld in de lengte te groeien. Daarbij blijft echter de top van den nucellus vrij, wordt alleen omgeven door het buitenste integument, zoodat deze in het endostomium ligt. De sterke lengtegroei van het binnenste integument heeft dan ook in hoofdzaak naar beneden toe plaats. Het blijft daarbij aan zijn basis nabij de chalaza natuurlijk in verbinding met het nucellusweefsel.

Hoogst merkwaardig is nu, dat het nucellusweefsel aan die sterke lengtegroei van den zaadknop niet meer deelneemt door celdeeling. Het gedeelte van den nucellus, dat buiten het binnenste integument uitsteekt, blijft onveranderd, behoudens de veranderingen, die de sporemoedercel ondergaat en die straks besproken zullen worden. Alleen kan hier reeds opgemerkt worden, dat bij die vorming van embryozak en eicel, dit geheele apparaat op dezelfde plaats blijft liggen en dus nooit omgeven wordt door het binnenste integument.

Het gedeelte van den nucellus, dat daaronder ligt, strekt zich nu, doordat van de centrale en van elk van de 5, 6 of 7 peripherische celrijen, waaruit het bestaat, een enkele cel (of misschien twee cellen in sommige gevallen) buitengewoon sterk gerekt wordt; ook de kern neemt dikwijls een gerekte gedaante aan, zoodat men den indruk krijgt, dat hier een passieve uitrekking plaats heeft. Daarmee gaat gepaard een oplossing van de overlangsche wanden terwijl ten slotte ook de protoplasten min of meer ineenvloeien. Zoodoende ontstaat hier een groote holte met protoplasma, dat dikwijls een peripherische ligging heeft met 6, 7 of 8 kernen en misschien wel eens meer ten gevolge van kernfragmentatie, die hier schijnt te kunnen plaats hebben.

Beziet men een zaadknop in dit stadium zonder dat men de ontwikkelingsgeschiedenis heeft nagegaan, dan houdt men deze holte onvermijdelijk voor den embryozak en de eigenlijke embryozak, die daarboven ligt, wordt dan aangezien voor het ei-apparaat. Zoo heeft WARMING, die slechts een deel van de ontwikkeling van den zaadknop heeft kunnen nagaan, ten gevolge van gebrek aan het noodige materiaal, dan ook de zaak opgevat [1]). Deze pseudo-embryozak blijft tijdens de verdere ontwikkeling van zaadknop tot zaad bestaan; wordt alleen somtijds min of meer samengedrukt door de sterke toename in grootte van de cellen van het binnenste integument, waarover hierboven reeds het noodige gezegd is. Wanneer de kiem zich begint te ontwikkelen groeit deze uit in dien pseudo-embryozak, evenals dit bij een echten embryozak het geval geweest zou zijn.

Gaan wij nu na, wat er met de sporemoedercel verder gebeurt. De kern daarvan vertoont op een zeker oogenblik een duidelijk synapsis-stadium. By de daaropvolgende deeling vindt dus waarschijnlijk de reductie van het aantal chromosomen plaats. De fixatie was niet voldoende om met absolute zekerheid te kunnen zeggen, dat hier een heterotypische kerndeeling plaats heeft (daar komt nog bij, dat de kernen buitengewoon klein zijn); maar hetgeen ervan gezien werd, in verband gebracht met de voorafgaande synapsis maakt het toch niet twijfelachtig, dat hier inderdaad het begin van de haploide generatie te vinden is. Op deze kerndeeling volgt een celdeeling en de vorming van een tusschenschot. De bovenste van de twee zoo ontstane cellen gaat langzamerhand te gronde, wordt meer en meer platgedrukt; daarbij zijn toch nog zeer lang resten van deze cel te zien. In sommige gevallen deelde de kern van deze cel zich nog eens in een vlak loodrecht op het vlak van de vorige deeling, zoodat hierbij het aequatorvlak in de lengterichting van den zaadknop ligt. Misschien vindt deze deeling ook in andere gevallen wel plaats, maar zijn de twee kernen niet te zien ten gevolge van de ongunstige richting van de doorsnede en ten gevolge van het spoedig aborteeren van deze cel. Dat er op die kerndeeling in de bovenste cel nog eens een celdeeling zou volgen, heb ik slechts in een enkel geval meenen te zien.

De onderste van de hiergenoemde cellen is de embryozak. Opvallend is nu, tegenover de grootte van den pseudo-embryozak, dat deze echte embryozak maar zeer weinig in grootte toeneemt en steeds blijft liggen in dat bovenste deel van den nucellus, dat buiten het

[1]) EUG. WARMING, Familien Podostemaceae. II. Afhandling. Kgl. Danske Vidensk Selsk. Skr. 6te Raekke, naturv. og math. Afd. 2det Bd. III. Kjöbenhavn. 1882. Zie b.v. p. 65 (107).

binnenste integument uitsteekt, daarbij natuurlijk voortdurend omgeven door de laag epidermiscellen, die alleen later meer en meer platgedrukt wordt en daardoor moeilijker zichtbaar wordt.

De kern van den embryozak deelt zich nu spoedig weer. Slechts een enkele deeling werd gezien, waarbij de fixatie niet toeliet veel bijzonderheden waar te nemen; maar het is wel aan geen twijfel onderhevig, dat dit een homoiotypische kerndeeling moet zijn. De as van deze deelingsfiguur ligt in de lengterichting van den zaadknop, dus ook van den embryozak. Van de twee zoo ontstane kernen ziet men nog in de anaphasen der deeling de onderste degenereeren, door een samenballing van de chromatinemassa, zoodat deze aan de basis van den embryozak komt te liggen als een zich sterk kleurende chromatine-achtige massa zonder struktuur. Dit is blijkbaar alles, wat er van antipodiaal-apparaat en onderste poolkern in dit geval te zien is. Ik zal deze kern de antipodiale kern van den embryozak noëmen.

In tegenstelling met de genoemde kern neemt de andere een normale gedaante aan en munt daarbij door zijn grootte uit. Spoedig daarop volgt weer een deeling, waarvan ik verschillende stadiën heb kunnen zien. De as van de deelingsfiguur ligt ook nu weer in de lengterichting van embryozak en zaadknop. Op deze deeling volgt voorloopig geen celdeeling, maar daarna deelt elk van deze beide kernen zich nog eens. De deeling zelf heb ik trouwens niet waargenomen, alleen daarna 4 kernen gevonden; deze tweede deeling vindt blijkbaar uiterst snel plaats, want ik heb honderden preparaten, die zich ongeveer in dit stadium bevinden, doorgezien, zonder het eigenlijke deelingsstadium in handen te krijgen. Deze tweede deeling vindt zoodanig plaats, dat de deelingsassen loodrecht op elkaar staan en wel voor het bovenste kernpaar loodrecht op de lengterichting van den embryozak, voor het onderste in die richting.

Voordat deze laatste deeling heeft plaats gehad, ziet men den embryozak nog als een enkele cel, zooals hierboven reeds werd opgemerkt; na die deeling ziet men vier cellen ieder met een kern. Het is natuurlijk mogelijk, waar ik de eigenlijke deeling niet gezien heb, dat deze voorafgegaan wordt door een celdeeling, zoodanig, dat elke cel een kern bevat en dat dan daarna elk van die beide cellen zich weer deelt, nadat zich de kern gedeeld heeft. Hoe dit echter ook zij, men krijgt ten slotte een viertal cellen, die, dat moet hier nog opgemerkt worden, niet door celwanden van elkaar gescheiden zijn, dus vier naakte protoplasten. Van deze vier liggen er twee bovenin naast elkaar, de twee synergiden, dan volgen er twee onder elkaar, waarvan de bovenste de eicel is, de onderste alles wat er

van den embryozak is overgebleven met de bovenste poolkern.

Wanneer wij deze onderste cel maar eens eerst beschouwen, dan zien wij dat deze klein blijft en dat de kern vrij spoedig samenbalt tot een klompje chromatine waaraan geen structuur meer te zien is; dikwijls is daarbij ook nog de antipodiale kern te zien. In andere gevallen is daar niets meer van waar te nemen; ik vermoed, dat deze dan zoover gedegenereerd is, dat hij niet meer zichtbaar te maken is. Er zou nog een andere hypothese over op te stellen zijn, namelijk dat deze kernen als twee poolkernen met elkaar versmelten. Ik acht dit echter hoogst onwaarschijnlijk, juist omdat die kernen zich in een zoo duidelijk degeneratiestadium bevinden. Trouwens van dat heele verdere stuk van den embryozak komt ook verder niet veel meer terecht. Endosperm wordt niet gevormd; men ziet de cel nog een tijdlang, totdat zij met de zich ontwikkelende kiem verdwijnt.

De eicel en de synergiden ondergaan voorloopig geen verdere veranderingen en zijn gereed voor de bevruchting. Deze heb ik alleen bij *Mourera fluviatilis Aubl.* nauwkeurig kunnen volgen; in enkele andere gevallen heb ik een jonge kiem gevonden of ook wel stuifmeelkorrels gezien, die op de stempels gekiemd waren en tot stuifmeelbuizen uitgegroeid. Bij een nieuwe nog nader te beschrijven soort van Apinagia komen naast de normale tweeslachtige bloemen er ook andere voor, die geaborteerde meeldraden bezitten en die voor zoover ik aan het beschikbare materiaal kon zien, binnen de gesloten spathella blijven zitten. Of deze echter zonder bevruchting rijpe zaden kunnen leveren, kan ik niet zeggen, daar zij zich niet verder hadden ontwikkeld dan tot aan het hier beschreven stadium. In tal van preparaten van verschillende *Podostemaceae*, die ik onderzocht, vond ik trouwens zeer veel zaadknoppen, die op het hier genoemde stadium bezig waren te degenereeren, blijkbaar omdat geen bevruchting had plaats gehad. Het wil mij toeschijnen, dat de kans op een regelmatige bestuiving bij deze planten vermoedelijk niet zoo heel groot is en dat ten gevolge daarvan zooveel zaadknoppen ten slotte aborteeren.

Maar ik wil thans nog beschrijven, wat ik van de bevruchting gezien heb. Ik moet daarbij zeggen, dat ik van het binnendringen van stuifmeelbuizen slechts zelden iets heb waargenomen; ten deele zal dit wel een gevolg zijn van de wijze van fixeering, waarbij zulke teere, dunne deelen gemakkelijk verschrompelen, terwijl ook de kleuring niet goed gelukt. In elk geval kan ik wel zeggen, dat de pollenbuis binnendringt door de mikropyle en dan tusschen twee cellen van de epidermis van den nucellus heen het eiapparaat bereikt. Ik heb in één geval twee kernen in den top van de pollenbuis waargenomen, waarvan de eene een generatieve, de andere een vegeta-

tieve scheen te zijn. In een ander geval zag ik een kern, die er zeer langgerekt uitzag met een insnoering in het midden, zoodat het evengoed twee generatieve kernen konden zijn. Wanneer ik alle gevallen, die ik gezien heb, samenvat, dan geloof ik wel, dat de verhoudingen in den top van de stuifmeelbuis normaal zijn, dus twee generatieve kernen en één vegetatieve kern. Bij het eigenlijke bevruchtingsproces vereenigt zich de top van de stuifmeelbuis met een van de synergiden; de synergide en vooral ook de eicel ondergaat daarbij eigenaardige vormveranderingen, het lijkt wel iets op een amoeboide beweging. Wat er dan verder in de synergide gebeurt, is niet gemakkelijk te zien, omdat de inhoud zeer sterk kleurstoffen absorbeert en sterk lichtbrekend wordt. Maar het is mij toch ook hier ten slotte gelukt, het proces in hoofdzaak waar te nemen. Ten minste één kern van de pollenbuis dringt binnen in de synergide en neemt daarbij een min of meer wormvormige gedaante aan. Dan vindt een versmelting van de synergide met de eicel plaats, zoodat de protoplasten ten minste op één plek met elkaar communiceeren. Deze communicatie duurt niet lang, maar gedurende dien tijd dringt blijkbaar een van de generatieve kernen binnen in de eicel, in elk geval vindt men daarna stadiën, waar in de eicel twee kernen dicht bij elkaar liggen. Nog iets later liggen deze tegen elkaar, vindt men ze versmolten op zoodanige wijze, dat het ontstaan uit twee kernen nog te zien is.

De bevruchte eicel vergroot zich nu spoedig, terwijl alle andere cellen in de nabijheid verdrongen worden. Daar dan ook meestal de epidermiscellen van den nucellus geaborteerd zijn, ligt die groote cel vrij wel alleen in het endostomium, dit nagenoeg opvullende. Door de eerste deelwand ontstaat een blaasvormige cel, die in deze ruimte blijft liggen en een kleinere, die langzamerhand vooruitgeschoven wordt in den pseudo-embryozak. Deze cel ondergaat nu eenige deelingen, waarbij de celwanden loodrecht op de lengterichting van het jonge zaad komen te staan. Wanneer er zoodoende een rij van vier cellen ontstaan is, worden de drie naar de micropyle toegekeerde tot kiemdrager, de vierde deelt zich door een wand loodrecht op de vorige en wordt tot kiemkogel.

De verdere ontwikkeling van de kiem heb ik niet nagegaan, ten deele wegens het ontbreken van voldoend materiaal, maar vooral omdat WARMING deze zaak reeds uitstekend behandeld heeft en met afbeeldingen gedemonstreerd. In verband met het vele nieuwe, dat door WILLIS ten opzichte van de kieming van de *Podostemaceae* van Ceylon gevonden is, zou een onderzoek daaromtrent bij de Amerikaansche vormen zeker zeer loonend zijn, daar wij pas een

enkel geval door GOEBEL nader hebben leeren kennen. Maar daarvoor is een onderzoek ter plaatse noodig en het zal uit de uitvoerige mededeelingen wel blijken, dat ik daaromtrent niet veel nieuws heb kunnen vinden.

Wat wij tot nu toe wisten van de zaadknoppen der *Podostemaceae* hebben wij bijna uitsluitend aan WARMING te danken. Zooals ik boven reeds zeide, beschreef deze voor *Mniopsis Weddelliana Tul*, uitvoerig de eerste ontwikkeling der zaadknoppen, waarbij hem alleen ten gevolge van gebrek aan de juiste stadiën de beteekenis van sommige organen niet duidelijk is geworden. De eigenlijke ontwikkeling van den embryozak is hier dan ook geheel buiten beschouwing gelaten; wel is zeer uitvoerig de ontwikkeling van de kiem bij dezelfde plant vanaf het tweecellige stadium behandeld. Uit zijn schriftelijke uiteenzetting en uit zijn teekeningen blijkt trouwens afdoende, dat de geheele ontwikkeling hier geschiedt, zooals in de door mij onderzochte gevallen. Dit zelfde kan gezegd worden van de andere gevallen, waarin door hem iets omtrent zaadknoppen van *Podostemaceae* wordt medegedeeld of afgebeeld, namelijk *Castelnavia princeps Tul. et Wedd.*[1]), *Hydrobryum olivaceum Gardn.*[2]) en *Tristicha hypnoides Spreng*[3]). Wat de laatste betreft, had trouwens reeds CARIO[4]) vroeger verschijnselen gevonden, die er op wijzen, dat deze plant, wat de ontwikkeling van de zaadknoppen betreft, overeenstemt met de overige *Podostemaceae*. Dit is in zooverre belangrijk, omdat deze plant eenigszins afwijkt van de meerderheid der soorten in deze familie, wat den bouw van de bloem betreft. Wanneer dus hier de ontwikkeling der zaadknoppen overeenkomstig plaats heeft aan hetgeen ik voor de door mij onderzochte vond, dan is dit een reden te meer om aan te nemen dan in dit opzicht, waarin zij zoo sterk afwijkt van de overige *Angiospermae*, deze familie buitengewoon eenvormig is. Boven heb ik reeds gezegd, dat ik tot mijn spijt van *Tristicha* alleen rijpe zaden heb en geen jongere stadiën. Verder heeft R. VON WETTSTEIN op de 78e Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte in 1906 te Stuttgart gehouden een mededeeling gedaan: „Ueber Entwickelung der Samenanlagen und Befruchtung der Podostemonaceen". Gepubliceerd heeft hij hierover tot nu toe echter nog niets. Wel heb ik een referaat over die voordracht gevonden in de Naturwissenschaftliche Rundschau van

[1]) WARMING, l.c. Taf. XIV. Fig. 9–21.

[2]) WARMING, Ibid. 6 Raekke. Nat. og. math. Afd. VI 4. 1891. p. 37, fig. 34.

[3]) WARMING, Ibid. 6 Raekke. Nat. og. math. Afd. IX 2. 1899. p. 113, fig. 6.

[4]) R. CARIO. Anatomische Untersuchung von Tristicha hypnoides Spreng. Botan. Zeitung. 1881. S. 73, Taf. I. Fig. 20–24.

1906, Bd. XXI, p. 615, en daarin komt het een en ander voor, dat geheel overeenstemt met hetgeen ik gevonden heb, maar in andere opzichten zijn er zulke verschillen, dat ik moet aannemen, dat de referent tijdens de voordracht de bedoelingen van den spreker niet volkomen begrepen heeft; ik durf dus op dit referaat niet afgaan.

De *Podostemaceae* verschillen dus op de volgende punten van het gewone schema der *Angiospermae* wat de ontwikkeling van hun zaadknoppen betreft: 1. Het binnenste integument begint zich te ontwikkelen na het buitenste; daarmee hangt wellicht ook samen, dat de top van den nucellus vrij blijft binnen het endostomium, een verschijnsel, dat trouwens bij meer planten is waargenomen. 2. De eigenaardige ontwikkeling van een pseudo-embryozak door uitrekking en oplossing van de celwanden van een laag van den nucellus. Iets, dat hiermede overeenstemt, is mij verder uit het plantenrijk niet bekend. Alleen zou men ter verklaring er op kunnen wijzen, dat in vele gevallen de zich ontwikkelende embryozak een oplossende werking uitoefent op het omringende necellusweefsel en dat hier een soortgelijke werking nu uitgeoefend wordt op de naar de chalaza toegekeerde cellen van den nucellus, waarbij deze dan pas geheel verdwijnen, wanneer de kiem zich daar gaat ontwikkelen. Men krijgt ook nog dezen indruk van het verschijnsel, dat er een zekere vergelijkbaarheid bestaat met de nucellusembryo's. Ik bedoel dit, dat uit die nucellusembryo's blijkt, dat er in den embryozak oorzaken werken, die elke zich ontwikkelende cel tot een kiem doen worden. Welke die omstandigheden zijn, is ons onbekend, maar het is volstrekt niet ondenkbaar, dat wij deze eens volledig zullen kennen en ze eventueel kunnen nabootsen, zoodat wij willekeurig een kiem kunnen doen ontstaan. Evenzoo nu schijnt mij uit dit verschijnsel bij de *Podostemaceae* te blijken, dat binnen een zaadknop omstandigheden aanwezig zijn, die het ontstaan van een groote holte als de embryozak is, in de hand werken, zoodat daar waar de embryozak zelf zich niet op die wijze ontwikkelt, omdat hij alleen in het bovendeel van den zaadknop opgesloten blijft, dit door andere cellen geschiedt, die daaronder liggen.

3. Zeer afwijkend van het gewone geval is ook de ontwikkeling van den embryozak, in zooverre, dat er geen antipoden en onderste poolkern ontstaan, maar de kern, die door zijn deelingen hiertoe moest leiden, vroegtijdig degenereert. Verder is na het ontstaan van het ei-apparaat het overblijvende deel van den embryozak uiterst weinig ontwikkeld, zoodat er geen sprake is van endospermontwikkeling (wat er met de eventueel aanwezige tweede generatieve kern gebeurt heb ik niet kunnen uitmaken); daarbij is hier dan wel veel duide-

lijker dan in gewone gevallen, dat dit stuk van den embryozak en de eicel zustercellen zijn. Dat komt overeen met de voorstelling van PORSCH[1]) dat het eiapparaat van de hoogere planten een gereduceerd archegonium zou zijn en wel de synergiden de halscellen en het bovenste stuk van den embryozak met de bovenste poolkern de buikkanaalcel. Dit laatste echter kan men zich vooral hier uiterst moeilijk voorstellen, want hier zou dan de ligging van eicel en buikkanaalcel juist omgekeerd zijn. Een dergelijke reductie van het antipodenapparaat als hier vindt men ook bij *Helosis guyanensis* volgens de onderzoekingen van CHODAT en BERNARD[2]); nog verder zou de reductie zijn gegaan bij *Cypripedium*, waar volgens de onderzoekingen van Mej. PACE[3]) het onderste deel van den embryozak zelfs in het geheel niet aangelegd wordt. Dat men hier met een voortschrijdende differentiatie te doen heeft en niet met het terugkeeren van eigenaardigheden aan de stamvormen eigen, behoeft wel geen nader betoog. Misschien is het ten slotte niet ongewenscht er op te wijzen, dat men ter „verklaring" hier niet gebruik kan maken van een parasitische of saprophytische levenswijze der *Podostemaceae*.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt een mededeeling aan van Prof. J. D. VAN DER WAALS JR., *„De waarde der zelfinductie volgens de electronen-theorie"*.

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

Om een verklaring van het bestaan van bewegingsenergie van electronen te geven wordt dikwijls naar het bestaan van zelfinductie verwezen. Tot op zekere hoogte is daar geen bezwaar tegen, mits men daarbij in het oog houdt: 1e dat die bewegingsenergie grootendeels uit electrische energie bestaat, terwijl bij zelfinductie slechts met magnetische energie wordt rekening gehouden, en 2e en daar is het mij hier om te doen, dat het uit een theoretisch oogpunt juist de zelfinductie is, die uit de kinetische energie der electronen moet verklaard worden.

Denkt men een stuk metaal waarin positief en negatief geladen electrische deeltjes voorkomen, terwijl de gezamenlijke lading der positieve deeltjes gelijk is aan die der negatieve. Brengt men dit

[1]) O. PORSCH. Versuch einer phylogenetischen Erklärung des Embryosackes und der doppelten Befruchtung der Angiospermen. Jena 1907.

[2]) R. CHODAT et C. BERNARD. Sur le sac embryonnaire de l'Helosis guyanensis. Journal de Botanique. T. XIV. 1900. p. 72.

[3]) LULA PACE. Fertilization in Cypripedium. Botanical Gazette. XLIV. 1907. p. 353.

stuk metaal in beweging, dan zal men er een electromagnetische massa aan moeten toekennen, gelijk aan de som der electromagnetische massa's der positieve en der negatieve electronen. Wanneer men daarentegen een stroom in het metaal opwekt, dan zal men de energie daarvan *niet* kunnen voorstellen door $^1/_2 \Sigma m v^2$, waarin m de massa van een deeltje voorstelt en v de snelheid, die het onder invloed der electromotorische kracht verkrijgt.

Dit verschil is daardoor te verklaren, dat in het geval, dat het metaal in zijn geheel beweegt, zoowel de electrische als de magnetische krachten, die van de verschillende electronen afkomstig zijn, voor alle punten van de ruimte verschillende richting hebben en elkaar nagenoeg opheffen, zoodat er slechts merkbare krachten overblijven in de punten, die zóó dicht bij een van de electronen liggen, dat de door dat electron uitgezonden krachten sterk overwegen en alleen in aanmerking genomen behoeven te worden. In het geval dat er een stroom door het metaal gaat daarentegen, zullen de magnetische krachten van een groot deel der electronen elkaar versterken, zoodat in een punt op eenigen afstand, waar de magnetische kracht $\mathfrak{H}$ van een enkel electron verwaarloosbaar klein zou zijn, de kracht van alle (noem dit aantal N) electronen, die in een ruimte-eenheid van het metaal aanwezig zijn, bijna het bedrag $N\mathfrak{H}$ zal bereiken, zoodat de energie van de orde $N^2\mathfrak{H}^2$ wordt. Deze energie is dus volstrekt niet gelijk aan de som, maar van de orde N-maal de som van de energieën, die de afzonderlijke electronen daar ter plaatse zouden teweegbrengen. Hieruit kan men afleiden, dat de energie van den stroom veel grooter dan $^1/_2 \Sigma m v^2$ zal zijn.

Ofschoon het misschien wel de moeite waard zou zijn te trachten het bedrag dier energie meer nauwkeurig te berekenen, komt het mij voor, dat er weinig twijfel aan kan bestaan of men zou daarvoor vinden:

$$^1/_2 (L + L') i^2$$

waarin L voorstelt de coefficiënt van zelfinductie, zooals men dien gewoonlijk, alleen uit de magnetische energie, berekent, en

$$^1/_2 L' i^2 = {}^1/_2 \Sigma m v^2.$$

Denkt men dat slechts één soort electronen aan de stroomgeleiding deelnemen, dan kan men $^1/_2 \Sigma m v^2$ ook voorstellen door $^1/_2 N m v^2$ per volume-eenheid van het metaal.

Denken wij nu dat wij te doen hebben met een cirkelvormigen stroomgeleider met straal $= R$, terwijl de draad een cirkelvormige doorsnede heeft met straal $= r$, dan wordt dus $i = \pi r^2 N e v$ en

$$L' = \frac{\pi r^2 \, 2\pi R \, N m v^2}{(\pi r^2 N e v)^2} = \frac{2R}{r^2} \frac{m}{N e^2}.$$

Voor dienzelfden draad mogen wij als r klein is vergeleken bij R volgens de formule van KIRCHHOFF schrijven

$$L = 2\pi R \left\{ l\left(\frac{8R}{r}\right) - 1{,}75 \right\}.$$

Daar N voor verschillende metalen wel verschillende waarde zal bezitten, blijkt L' in tegenstelling met L afhankelijk te zijn van den aard van het metaal, waaruit de keten bestaat. Daarentegen is L' voor een bepaalden draad onafhankelijk van de wijze waarop deze is gewonden, terwijl L daarvan in hooge mate afhankelijk is.

De waarde der verhouding $\frac{L'}{L}$ zal dus zeer verschillend kunnen zijn in verschillende gevallen. Om ons van de orde van grootte ervan een voorstelling te maken en na te gaan of men steeds het recht heeft L' tegenover L te verwaarloozen, kunnen wij gebruik maken van de waarde voor Ne, die J. J. THOMSON [1]) voor bismuth heeft berekend.

Hij leidt n.l. uit de waarde van den weerstand en uit de verandering van den weerstand in het magnetische veld af, dat voor bismuth de waarde van Ne ongeveer 0,11 bedraagt. In verband met: $\frac{e}{m} = 1{,}865.10^7$ levert dit:

$$L' = \frac{R}{r^2} . 10^{-6}$$

Aan metalen met grooter geleidingsvermogen zal waarschijnlijk een grooter waarde van N moeten toegeschreven worden. THOMSON schat voor koper en zilver N eenige duizenden malen grooter dan voor bismuth.

Tot ongeveer hetzelfde bedrag komen wij uitgaande van de waarden:

$$N_1 = 0{,}69 . 10^{19} \qquad N_2 = 0{,}46 . 10^{19}$$

die DRUDE [2]) voor de aantallen positieve en negatieve electronen per c.M^3 bismuth berekent, daarbij uitgaande van de waarden der verschillende thermische, electrische en magnetische effecten. Met $e = 10^{-20}$ leidt dit tot een waarde voor Ne, die zeer weinig van die van THOMSON afwijkt.

ROSA en COHEN [3]) berekenen voor een cirkel met $R = 25$ c.M. en $r = 0{,}05$ c.M.

---

[1]) J. J. THOMSON. Rapports présentés au congrès de physique à Paris, III. p. 145. 1900.

[2]) DRUDE. Ann. der Phys. IV Folge. 3. S. 388. 1900.

[3]) EDW. B. ROSA and LOUIS COHEN. Bulletin of the Bureau of Standards. Vol. 4. No. 1. Reprint No. 75.

$$L = 654,\ 40496.$$

Wij vinden daarbij $L' = 0.01$ zoodat het verwaarloozen van L' hier slechts een fout van $\pm\ 0.002\ ^0/_0$ tengevolge heeft. Dit geldt voor bismuth; voor andere metalen is de correctie nog veel kleiner te verwachten. Ook wordt de correctie relatief nog kleiner, wanneer wij niet één cirkel maar een aantal windingen nemen. Bij een dunneren draad vindt men echter een grootere correctie.

Daar de hier gevonden waarden, niettegenstaande de goede overeenstemming tusschen de door THOMSON en door DRUDE gevonden getallen, echter geen onbeperkt vertrouwen schijnen te verdienen, is het niet overbodig na te gaan, of het mogelijk is op andere wijze tot een taxatie van de grootte van L' te geraken. Misschien zou dat op de volgende wijze kunnen geschieden.

HAGEN en RUBENS [1]) vonden, dat het terugkaatsend vermogen van metalen voor infrarood licht van grootte golflengte verklaard kon worden door aan de metalen voor electrische trillingen van die frequentie hetzelfde geleidingsvermogen toe te kennen als voor stationaire stroomen. Dit schijnt erop te wijzen, dat de weglengte der electronen in het metaal klein is vergeleken bij die golflengte [2]). Daar echter hetzelfde niet geldt voor licht van een golflengte kleiner dan één micron, zou men geneigd zijn uit die optische eigenschappen af te leiden, dat de weglengte niet veel minder dan een micron bedraagt.

Het valt niet te ontkennen dat deze waarde verrassend groot is, daar voor luchtmoleculen in lucht van 1 atm. druk slechts een weglengte, die ongeveer 10 maal kleiner is, wordt gevonden. Maar nemen wij die weglengte toch eens voor een oogenblik als juist aan, dan geeft zij ons een nieuw middel om L' te berekenen. Immers voor het electrisch geleidingsvermogen van een metaal wordt gevonden:

$$\sigma = n\frac{2Ne^2l}{mu}$$

waarin u de gemiddelde snelheid der electronen in hun warmtebeweging voorstelt, en n een getallen factor, die volgens DRUDE $^1/_4$, volgens LORENTZ [3]) $\sqrt{\frac{2}{3\pi}}$ bedraagt.

Dit geeft:

$$L' = \frac{2R}{r^2}\frac{m}{Ne^2} = \frac{2R}{r^2}\frac{nl}{\sigma u}$$

---

[1]) HAGEN und RUBENS. Berl. Sitzungsber. 1903, S. 269. Ber. d. deutschen phys. Gesellsch. 1903, S. 145.

[2]) Verg. H. A LORENTZ. Deze verslagen XI, p. 787, 1903.

[3]) H. A. LORENTZ. Deze verslagen XIII, p. 503. 1904.

Bij $T = 300$ kunnen wij stellen $u = 7{,}75.10^6$. Verder is voor zilver $\sigma = 6{,}14.10^{-4}$ en zullen wij onderstellen $l = 10^{-4}$. Zoo vinden wij

$$L' = \frac{R}{r^2} . 5 . 10^{-8}$$

Dit is dus slechts $^1/_{20}$ van de voor bismuth gevonden waarde en niet minder dan $^1/_{1000}$ zooals wij meenden te mogen verwachten. Bij een cirkel van zilverdraad van $R = 25$ cM. en $r = 0.05$ zou de fout door het verwaarloozen van L' dus $\pm 0.0001\%$ worden.

Met zekerheid kunnen wij dus naar het mij voorkomt de waarde van L' nog niet bepalen. Toch meen ik het waarschijnlijk gemaakt te hebben dat bij klossen, die zoo gewonden zijn dat zij groote zelfinductie hebben L' tegen L zal kunnen worden verwaarloosd, dat echter bij klossen die zoo gewonden zijn, dat de zelfinductie zoo gering mogelijk is, de waarde van L' niet steeds te verwaarloozen is vergeleken bij de toch altijd nog voorkomende waarde van L; zoodat, wanneer men in het laatste geval de zelfinductie wil kennen, men waarschijnlijk met L' rekening zal moeten houden. Misschien zou het mogelijk zijn voor „zelfinductie vrij" gewonden draadklossen het bestaan van L' experimenteel aan te toonen. En zoo het mocht gelukken voor klossen van verschillende metalen de waarden van L' te vergelijken, zou dit een belangrijk gegeven kunnen zijn voor de uitbreiding van onze kennis van de electronenbeweging in metalen.

Ten slotte zal men zeker ook een aanzienlijk bedrag voor L' vinden bij een stroom, die niet een metalen geleider maar b.v. een Röntgen-buis doorloopt. De groote waarde, die de snelheid der electronen dan verkrijgt, heeft groote levende kracht tengevolge, en die „energie der kathodestralen" zou zich ongetwijfeld ook als een vergrooting der zelfinductie van de keten waarin de buis is opgenomen, kenbaar maken.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan: *„Over ruimtekrommen van het geslacht twee".*

1. Een kromme van het geslacht *twee* draagt één en slechts één involutie van puntenparen, I^2. Op de vlakke nodale biquadratische kromme wordt zij ingesneden door den stralenbundel die het dubbelpunt tot top heeft; haar coïncidenties zijn dan de raakpunten der zes stralen welke de kromme aanraken. Kon men de punten der kromme in een tweede I^2 rangschikken, dan zou deze I^2 uit het

dubbelpunt geprojecteerd worden door een stralenstelsel in verwantschap [2], en de bovengenoemde zes raaklijnen zouden zes vertakkingsstralen leveren, terwijl een [2] er slechts vier kan hebben.

2. Wij beschouwen nu de *fundamentale* involutie van puntenparen, F^2, op een ruimtekromme ϱ^n van het geslacht twee. Zij kan ingesneden worden door een bundel kegels van den graad $(n-3)$. Immers door een willekeurig punt P gaan $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-2$ bisecanten der ϱ^n, en de kegels van den graad $(n-3)$ door deze $\frac{1}{2}(n-3)n-1$ rechten snijden ϱ^n nog in twee veranderlijke punten.

Deze F^2 rangschikt de vlakken door de willekeurige rechte a in een verwantschap $[n]$. Wordt a gesneden door een bisecante b die een paar der F^2 draagt, dan is het vlak ab een dubbele coïncidentie der $[n]$, want het is toegevoegd aan $(n-2)$ vlakken, waarmee het niet samenvalt. Daarentegen bepaalt elke coïncidentie der F^2 een enkelvoudige coïncidentie van $[n]$. Het aantal dubbele coïncidenties bedraagt dus $\frac{1}{2}(2n-6)=n-3$, zoodat a door $(n-3)$ bisecanten b wordt gesneden. D. w. z.:

De rechten welke de paren der fundamentale involutie dragen, vormen een regelvlak van den graad $(n-3)$.

Om het geslacht te bepalen van dit regelvlak Φ^{n-3} maken we gebruik van een bekende formule van ZEUTHEN. Wanneer tusschen de punten van twee krommen c en c' een zoodanige betrekking bestaat, dat met een punt P van c overeenkomen $\varkappa'$ punten P' van c' en met een punt P' overeenkomen $\varkappa$ punten P, terwijl het y' maal geschiedt dat twee punten P' en y maal dat twee punten P samenvallen, dan zijn de geslachten p en p' der krommen met de reeds genoemde getallen verbonden door de vergelijking [1])

$$2\varkappa'(p-1)-2\varkappa(p'-1)=y-y'.$$

Worden nu de punten P en P^* van een paar der F^2 toegevoegd aan den doorgang P' van hun verbindingslijn met een vast vlak, dan is $p=2$, $\varkappa'=1$, $\varkappa=2$, $y'=0$, $y=6$, dus $2-4(p'-1)=6$ en $p'=0$.

Het regelvlak Φ^{n-3} is derhalve van het *geslacht nul*, en bezit daarom een *dubbelkromme* van den graad $\frac{1}{2}(n-4)(n-5)$.

3. Voor een ϱ^5 is dit involutieregelvlak quadratisch, dus een *hyperboloïde* of een *kegel*.

In het eerste geval bestaat een der regelscharen uit trisecanten,

[1]) Zie ZEUTHEN, Math. Ann. III, 150. Een eenvoudig bewijs is door KLUYVER gegeven (N. Archief v. W. XVII, 16).

de andere uit de bisecanten welke de paren der F^2 dragen. De steunpunten der trisecanten zijn dan gerangschikt in de drietallen van een involutie, die evenzeer fundamentaal (d. w. z. met de kromme gegeven) is. Dat de laatste acht coïncidenties heeft, blijkt gemakkelijk uit de verwantschap (2,3) tusschen de beide regelscharen.

Door centrale projectie vindt men een quadrinodale vlakke kromme c^5, waarop F^2 wordt ingesneden door de kegelsneden welke de vier dubbelpunten bevatten, terwijl de verbindingslijnen der paren een kegelsnede omhullen, en tevens de groepen van een fundamentale I^2 dragen[1]).

Is het involutieregelvlak der F^2 een *quadratische kegel*, dan liggen elke twee paren der F^2 in een vlak door den top, die tevens een punt der ϱ^6 is. Deze bijzondere ϱ^6 is blijkbaar de doorsnede van een kubisch oppervlak en een quadratisch kegelvlak, welke een rechte gemeen hebben[2]).

4. Wij beschouwen nu een ϱ^6 van het geslacht twee. Het involutieregelvlak der F^2 is thans van den derden graad (Φ^3). Zij q de dubbelrechte, e de enkelvoudige richtlijn van Φ^3. Daar ϱ^6 op Φ^3 ligt, en een vlak door q nog slechts één rechte van Φ^3 bevat, welke rechte een paar der F^2 draagt, heeft q vier punten met ϱ^6 gemeen, is dus een *quadrisecante*. De fundamentale involutie wordt derhalve ingesneden door den vlakkenbundel, die de quadrisecante tot as heeft. Hieruit blijkt tevens dat ϱ^6 geen tweede quadrisecante kan hebben.

Elk vlak door e draagt twee paren der F^2; dus is e een koorde van ϱ^6, en worden de paren der F^2 paarsgewijs tot de groepen van een bijzondere I^4 vereenigd.

De vlakken, welke e verbinden met de beide torsale rechten van Φ^3, zijn blijkbaar dubbelraakvlakken van ϱ^6. Op e rusten dus, behalve de raaklijnen in de 6 coïncidenties der F^2, nog de 4 in die dubbelraakvlakken gelegen raaklijnen en de, dubbel te tellen, raaklijnen in de steunpunten der koorde e. Het *raaklijnen-oppervlak* van ϱ^6 is derhalve van den graad 14. Dit blijkt trouwens ook hieruit dat de quadrisecante, behalve door de raaklijnen in haar steunpunten, slechts door de 6 raaklijnen der coïncidenties wordt gesneden.

---

[1]) Een aantal eigenschappen der c^5 vindt men in mijn verhandeling „Ueber Curven fünfter Ordnung mit vier Doppelpunkten" (Sitz. Ber. Akad. Wien, 1895, CIV, 46—59). De krommen γ^5 en c^5 behandelt H. E. Timerding „Ueber eine Raumcurve fünfter Ordnung" (Journal f. d. r. u. a. Math. 1901, CXXIII, 284—311).

[2]) De centrale projectie dezer γ^5 is behandeld in mijn boven aangehaald opstel, bl. 53. Zij ontstaat bij de projectieve toevoeging van de stralen van een waaier aan de paren van een uit de kegelsneden van een bundel gevormde involutie.

Door centrale projectie uit een punt van e vindt men een bijzondere c^6 met acht dubbelpunten waarvan de paren der F^2 twee aan twee gelegen zijn op stralen door een dubbelpunt, dat tevens het snijpunt is van twee dubbelraaklijnen.

5. Het regelvlak β der bisecanten, welke op een trisecante t rusten, is, evenals ϱ^6, van het geslacht *twee*. Immers, liggen de punten B_1, B_2, B_3 van ϱ^6 met t in een vlak, dan kan men elk punt B_k toevoegen aan de koorde $B_l B_m$, waardoor een verwantschap (1, 1) is bepaald tusschen de punten van ϱ^6 en de punten van een vlakke doorsnede van het regelvlak β.

Daar elk punt van t blijkbaar 5 bisecanten draagt, terwijl een vlak door t er 3 bevat, is β een regelvlak van den graad 8. Een vlakke doorsnede moet nu singulariteiten vertoonen die gelijkwaardig zijn met 19 dubbelpunten. Nu is de doorgang van t een 5-voudig punt, terwijl de 6 doorgangen van ϱ^6 even zoovele dubbelpunten leveren; de ontbrekende 3 dubbelpunten worden blijkbaar vervangen door een drievoudig punt, dat de doorgang is van een op t rustende trisecante.

Op het *regelvlak* τ *der trisecanten* zijn deze dus in paren van een involutie gerangschikt.

Verder volgt hieruit dat het regelvlak τ van den graad 12 is. Want, is x de graad van τ, dan is een van de $(x-1)$ punten, welke t gemeen heeft met de restdoorsnede in een door t gelegd vlak, als doorgang van t te beschouwen; de overige $(x-2)$ zijn afkomstig van veelvoudige krommen. Nu wordt t buiten ϱ^6 door één trisecante en in elk van haar drie steunpunten door drie trisecanten gesneden; dus is $x - 2 = 10$ en $x = 12$.

6. Uit een punt C van ϱ^6 wordt F^2 op de kromme geprojecteerd in de drietallen van een involutie, C^3.

Immers, is P een punt van ϱ^6, dan snijdt de rechte CP het regelvlak Φ^3 nog in een punt F, en het vlak door C, F en het in F^2 aan F toegevoegde punt bepaalt op ϱ^6 nog twee punten P' en P'', die met P een involutorische groep vormen.

De vlakken $\pi \equiv PP'P''$ omhullen een quadratischen kegel, en wel den tangentiaalkegel van Φ^3, die C tot top heeft. Een rechte l door C wordt dus gesneden door twee drietallen van koorden PP', gelegen in de beide vlakken π door l; maar bovendien door de beide koorden welke C verbinden met de beide overeenkomstige punten C' en C''. *Het involutieregelvlak der* C^3 *is dus van den achtsten graad.*

Daar we P kunnen toevoegen aan de koorde $P'P''$, is ook dit regelvlak van het geslacht *twee*. In een vlakke doorsnede zijn de doorgangen met ϱ^6 dubbelpunten. Hieruit volgt (zie § 5) dat er een *dubbelkromme* van den graad *dertien* moet zijn.

De centrale projectie van ϱ^6 uit C is een quadrinodale c^4, waarop elke groep der C^3 collineair is met een paar der F^2. Beschouwt men c^4 als centrale projectie van een ϱ^4 dan is C^3 afkomstig van de I^2 op de trisecanten; bijgevolg heeft C^3, evenals de laatst genoemde I^3, acht coïncidenties.

7. Legt men een kubisch oppervlak ψ^3 door 19 punten van ϱ^6, dan ligt deze kromme op ψ^3, is dus de gedeeltelijke doorsnede van ψ^3 met het involutieregelvlak Φ^3. Daar q dubbelrechte van Φ^3 en enkelvoudige rechte van ψ^3 is, hebben de beide oppervlakken nog een rechte r gemeen. Deze kan niet met de enkelvoudige richtlijn e samenvallen, want dan zou elke rechte van Φ^3 vier punten met ψ^3 gemeen hebben, n.l. haar snijpunten met ϱ^6, q en e; ψ^3 zou dan evenwel met Φ^3 samenvallen.

Omgekeerd kan men ϱ^6 beschouwen als doorsnede van een kubisch regelvlak Φ^3, met dubbelrechte q, en een kubisch oppervlak ψ^3, dat met Φ^3 de rechte q en een op deze rustende rechte r gemeen heeft. Een vlak π door q snijdt Φ^3 in een rechte, ψ^3 in een kegelsnede, bevat dus buiten q twee punten der snijkromme, waaruit blijkt dat q quadrisecante is; haar steunpunten zijn coïncidenties der verwantschap (1, 4) tusschen de raakpunten van π met de beide oppervlakken; een der 5 coïncidenties is het snijpunt van q en r. Dat de enkelvoudige richtlijn van Φ^3 koorde is van ϱ^6, blijkt hieruit dat ze ψ^3 op r, dus tweemaal op ϱ^6 snijdt.

8. Wordt Φ^3 vervangen door een regelvlak van CAYLEY, zoodat q enkelvoudige richtlijn en tevens enkelvoudige beschrijvende lijn is, dan bepaalt de kegelsnede van ψ^3, die in het torsale raakvlak van Φ^3 ligt, op q twee punten, die ieder in elk vlak π door q twee doorsneden met ϱ^6 vervangen; zij zijn derhalve *dubbelpunten* van ϱ^6. Op deze bijzondere kromme zijn de groepen der F^2 niet in paren gerangschikt, immers e valt met q samen.

Een andere *bijzondere* ϱ^6 verkrijgt men door voor Φ^3 te nemen een kegel met dubbelribbe q. De kegelsneden van ψ^3 gelegen in de vlakken welke Φ^3 langs de dubbelribbe raken, snijden q in de steunpunten der quadrisecante. Elke ribbe van Φ^3 draagt een paar der F^2, zoodat een vlak door den top T drie paren bevat.

De raakkegel uit T aan ψ^3 heeft q en r tot dubbelribben; de zes

enkelvoudige ribben welke hij met Φ^3 gemeen heeft, zijn blijkbaar raaklijnen van ϱ^6 en bevatten de coïncidenties der F^2.

Door een willekeurig punt O gaan vier raakvlakken naar Φ^3; dus geeft de centrale projectie van ϱ^6 een vlakke kromme c^6 met vier dubbelraaklijnen, die in een punt C samenkomen. De zes enkelvoudige raaklijnen uit C bevatten de coïncidenties der fundamentale involutie, waarvan elke straal door C drie paren draagt. Deze worden gescheiden als men F^2 insnijdt door den bundel van kubische krommen, die de acht dubbelpunten van c^6 tot basispunten heeft.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan over: *„Algebraische ruimtekrommen op regelvlakken van den n^{en} graad met $(n-1)$-voudige rechte."*

1. Snijdt men een kubisch regelvlak Φ^3 door een vlakkenbundel, die een rechte a van Φ^3 tot as heeft, dan verkrijgt men een stelsel van kegelsneden ϱ^2, die allen gaan door het punt O waar a de dubbelrechte d ontmoet. Wordt tusschen dezen vlakkenbundel en den vlakkenbundel met as d een verwantschap (p, q) aangenomen, dan zijn daardoor aan elke ϱ^2 toegewezen p rechten r van Φ^3, en aan elke rechte r blijkbaar q kegelsneden ϱ^2. De meetkundige plaats der snijpunten van aan elkaar toegevoegde lijnen r en ϱ^2 is een ruimtekromme van den graad $m = p + q$; immers de punten der rationale kubische kromme welke Φ^3 op een willekeurig vlak insnijdt, zijn in een (p, q) gerangschikt, waarvan elke coïncidentie het snijpunt is van een ϱ^2 met een aan haar toegevoegde rechte r.

De ruimtekromme ϱ^m heeft de rechten r tot q-voudige secanten, terwijl ze door elke der ∞^2 kegelsneden van Φ^3 in p punten wordt gesneden.

2. Wordt Φ^3 door centrale projectie uit O op een vlak τ afgebeeld, dat a en d in A en D snijdt, dan gaan de stelsels (r) en (ϱ^2) over in de waaiers (D) en (A), welke nu eveneens in een (p, q) zijn gerangschikt. De daardoor voortgebrachte kromme c^m heeft in D een p-voudig, in A een q-voudig punt. Maar bovendien heeft ze een q-voudig punt in den doorgang B van de rechte b van Φ^3, die nog door O gaat; immers b is q-voudige secante van ϱ^m. Hieruit volgt dat de verwantschap (p, q) in τ niet willekeurig kan worden aangenomen.

De kromme ϱ^m is door haar centrale projectie c^m volkomen bepaald. Immers de kegel die c^m uit O projecteert, heeft een p-voudige

ribbe langs d en q-voudige ribben langs a en b; zijn doorsnede met Φ^3 bestaat dus uit $2p + 2q = 2m$ rechten en een ruimtekromme van den graad m, die p punten met d en q punten met a gemeen heeft.

3. Daar de singuliere punten van c^m gelijkwaardig zijn met $\frac{1}{2}p(p-1) + q(q-1)$ dubbelpunten, wordt het geslacht van c^m aangewezen door

$$g = \frac{1}{2}(p+q-1)(p+q-2) - \frac{1}{2}p(p-1) - q(q-1) =$$

$$= (p-1)(q-1) - \frac{1}{2}q(q-1),$$

of

$$g = (m-1)(q-1) - \frac{3}{2}q(q-1).$$

Dit is dan tevens het geslacht van ϱ^m. Blijkbaar mag p niet kleiner zijn dan $(\frac{1}{2}q + 1)$. Voor de kleinste waarden van p en q heeft men

m	p	q	g
2	1	1	0
3	2	1	0
4	3	1	0
4	2	2	0
5	4	1	0
5	3	2	1
6	5	1	0
6	4	2	2
6	3	3	1

4. De bovenstaande beschouwingen kunnen uitgebreid worden door in de plaats van het regelvlak Φ^3 te nemen een regelvlak Φ^n met $(n-1)$-voudige rechte d. Uit een punt O van d vertrekken nu $(n-1)$ rechten $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$. Een verwantschap (p, q) tusschen de vlakkenbundels (a_1) en (d) bepaalt weer een ruimtekromme van den graad $p + q = m$, die tot centrale projectie heeft een c^m met p-voudig punt D en q-voudige punten in $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$; en, omgekeerd, is ϱ^m weer geheel bepaald door c^m. Voor het geslacht van ϱ^m (en c^m) vindt men nu

$$g = \frac{1}{2}(p+q-1)(p+q-2) - \frac{1}{2}p(p-1) - \frac{1}{2}q(q-1)(n-1)$$

of

$$g = (q-1)(m-1) - \frac{1}{2}q(q-1)n.$$

Om algemeene ruimtekrommen te verkrijgen zal men p niet grooter dan 4, q niet grooter dan 3 mogen nemen. Voor $n = 2$ heeft men blijkbaar de bekende beschouwingen omtrent krommen op een hyperboloïde.

5. Vervangt men in τ de kromme c^m door een kromme, die p maal door D, q maal door A_k gaat en de rechte DA_k bovendien nog in s punten snijdt, dan is deze kromme blijkbaar de centrale projectie van een kromme op Φ^n, die een veelvoudig punt heeft in O. Immers elk der $(n-1)$ raakvlakken in O zal nu s rechten bevatten, die de ruimtekromme in O aanraken.

Natuurkunde. — De Heer DU BOIS biedt, mede namens den Heer G. J. ELIAS, eene mededeeling aan uit het Bosscha-Laboratorium: *„De invloed van temperatuur en magnetisatie op selectieve absorptiespecta"* III.

§ 20. Sedert onze vorige mededeeling (Maartverslag p. 749), verkregen wij een aantal chemische preparaten, waarvan de kristallisatie uit oplossingen in water of amylacetaat eerst na vele mislukte proeven en wekenlang afwachten in voldoenden omvang tot stand kwam. Waarnemingen, die enkel den invloed van het anion of de temperatuur op het absorptiespectrum weergeven, moeten hier als te uitgebreid ter zijde worden gelegd, al blijkt hieromtrent incidenteel wel een en ander. Ook wat het ZEEMAN-effect betreft, volstaan wij met eene keuze uit het overvloedige materiaal, die voorloopig niet anders kan zijn dan een opsomming der velerlei schakeeringen, waaronder de invloed der magnetisatie zich kan voordoen; het moet voor later onderzoek worden weggelegd, meer orde en regelmaat te brengen in de tot nu toe vrij stelsellooze reeksen van uitkomsten.

Over het algemeen werd weer in het spectrum der eerste orde gewerkt; in enkele gevallen namen wij onze toevlucht tot de tweede orde, waarin somtijds een enkele bijzondere schakeering qualitatief althans beter kan worden beoordeeld; voor metingen bleek echter de eerste orde over het algemeen verkieselijker. Daar men hier toch nooit met zeer fijne lijnen te doen krijgt is een al te groote dispersie

van geen nut en zeker van minder belang dan een sterk magnetisch splitsingsvermogen. Daar zeer dunne kristalschilfers van enkele tienden mm. dikte, inzonderheid bij neodymzouten, reeds gitzwarte absorptiebanden vertoonen, konden wij deze gebruiken en aan zeer sterke velden blootstellen, meestal van 38—42 kilogauss; trouwens draagt de juiste keuze der dikte voor elk zout veel bij tot de duidelijkheid van het spectrale beeld. De velden werden met een bismuthspiraal gemeten; de storing door de nauwe spleten is zeker minder dan met de gewone ronde boringen; de toeneming van de — verzadigde — magnetisatie der poolspitsen bij hunne afkoeling tot — 190° is vermoedelijk gering; het ware wenschelijk over nadere gegevens omtrent een en ander te beschikken. Intusschen meenen wij dat de nauwkeurigheid onzer veldmetingen van dezelfde orde is als die der aflezingen in het spectrum. Wij gaven ook nu weer aan deze de voorkeur boven een photographische afbeelding; immers bij visuëele waarneming bleek het identificeeren der lijnen met en zonder veld, inzonderheid bij erbiumverbindingen, beslist gemakkelijker.

§ 21. Derde reeks. Wij hebben thans enkele organische dubbelzouten van chromium en kalium met het oog op een mogelijk ZEEMAN-effect onderzocht, waarvan de absorptiespectra bij gewone temperatuur door LAPRAIK [1]) uitvoerig werden beschreven. Het in onze eerste mededeeling vermelde z.g. „blauwe" (dichroïtisch rood-blauwe) chroomkaliumoxalaat $[Cr_2K_6(C_2O_4)_6+6H_2O]$ vertoonde in vloeibare lucht een sterken band 696,4—701,4 (verg. § 5); blijkbaar nog te breed om hier in aanmerking te komen. Dit zuringzure zout mag niet worden verward met de z.g. „roode" verbinding:

Chroomkaliumoxalaat $[Cr_2K_3(C_2O_4)_4+xH_2O$; verschillende schrijvers stellen $x = 8, 10, 12]$; dit werd door CROFT in 1842 verkregen en zijn absorptiespectrum door BREWSTER onderzocht [2]). Sterk dichroïtische (wijnrood-blauwgrijs) vermoedelijk monokliene kristallen. Bij — 193° ziet men met den spectrometer in het rood eene menigte fijne banden en lijnen, waarvan de meest opvallende zijn een vrij sterke band 680,0 en een sterke band 692,5 tusschen de roode robijnbanden $R_2 = 691{,}8$ en $R_1 = 693{,}2$ (verg. §§ 7, 17).

Een plaatje, 1,5 m.m. dik moest met zonlicht worden onderzocht wegens de sterke absorptie; om dezelfde reden kon de kristallographische oriëntatie niet worden bepaald. Bij — 193° had band 692,5 met ongepolariseerd licht een veldvrije breedte van 0,14 $\mu\mu$; in een veld van 36,5 kgs. bedroeg de verbreeding ongeveer 0,05 $\mu\mu$.

[1]) W. LAPRAIK, Journ. f. prakt. Chemie (2) **47** p. 307, 1893.

[2]) A. ROSENHEIM, Zeitschr. f. anorg. Chemie **11** p. 196, 1896; en **28** p. 337, 1901.

Chroomkaliummalonaat $[Cr_2K_6(C_3H_2O_4)_6 + 6H_2O]$, is blijkbaar homoloog met het „blauwe" oxalaat. Dit kon slechts als een dooreengegroeid donker kristalmagma met ongelijkmatige oriëntatie worden verkregen; dichroïtisch (grasgroen-hemelsblauw). Spectrometrisch zichtbaar zijn in het rood bij — 193° een zware band, waarvan het midden 693,3 vrij wel samenvalt met den rooden robijnband R_1=693,2; alsmede een breedere vrij zwakke band 698,3. Een preparaat van slechts 0,15 mm. dikte vertoonde met ongepolariseerd licht band 693,3 met een veldvrije breedte van 0,8 $\mu\mu$; hij blijkt daarenboven t. o. van bovengenoemden overeenkomstigen band van het oxalaat 0,8 $\mu\mu$ naar het rood verplaatst. In een veld van ruim 40 kgs. werd de band beslist vager en verdween bijkans. Een met het „roode" oxalaat homoloog malonaat hebben wij tot nu toe niet kunnen onderzoeken; wellicht zoude het verschijnsel daarbij nog duidelijker optreden.

§ 22. Vijfde reeks. Wij hebben nu enkele zouten van de vier metalen *Pr*, *Nd*, *Sm* en *Er* nader onderzocht, zooals die in 1899 waren gebruikt.

Praseodymsulfaat $[Pr_2(SO_4)_3. 8H_2O]$ Lichtgroen plaatje, beide optische assen bevattende, 0,6 mm. dik. Vertoont bij — 193° in het violet en blauw ettelijke niet al te smalle banden; in het oranje enkele zware breede banden, verder een sterken band 599,0—599,3, een vrij zwakken 600,9—601,4. Het plaatje werd nu — met de lijn, die den scherpen assenhoek middendoordeelt verticaal — in een veld van 40 kgs. onderzocht.

Met verticaal gepolariseerd licht bleek band 599,0—599,3 een duidelijke verbreeding van 0,1 $\mu\mu$ te ondergaan; de andere band werd eveneens breeder en vager. Met horizontaal gepolariseerd licht was het verschijnsel analoog, maar minder duidelijk te zien; daarentegen vertoonen enkele der breedere banden hier eene onmiskenbare verbreeding [1]).

Neodymsulfaat $[Nd_2(SO_4)_3. 8H_2O]$.

§ 23. Ter aanvulling van het in § 19 medegedeelde werden een aantal plaatjes van verschillende dikte uitvoeriger onderzocht, die

[1]) Uit een welwillende toezending van den Heer Kamerlingh Onnes bleek ons achteraf dat in de mededeeling van hem en den Heer J. Becquerel (Versl. Afd. Nat. 16 p. 682, 1908) de uitkomsten voor de silicaten van *Pr* en *Nd* feitelijk voor de sulfaten gelden; wij hadden onze waarnemingen toen reeds bijna gereed; daar deze trouwens bij — 193° in plaats van bij — 253° en in een veel sterker veld geschiedden, zijn de beide reeksen van uitkomsten niet voetstoots vergelijkbaar, maar kunnen daarentegen over en weer ter aanvulling dienen.

weer beide optische assen bevatten; de middenlijn in den scherpen hoek werd ook hier verticaal gesteld.

Bandengroep in 't blauw bij — 193°; hiervan werden 8 banden gemeten. Wij zien ons hier genoodzaakt de uitkomsten kortheidshalve in een tabel samen te stellen; daarbij beteekent λ de golflengte, β_0 de veldvrije breedte, β_x de breedte in een veld van x kgs., $d\beta$ de verbreeding; in geval er een multiplet ontstaat, wordt de afstand der middens van de uiterste componenten door $d\lambda$ voorgesteld; $d\lambda/\lambda^2$ is in cm^{-1} uitgedrukt, zooals thans veelal gebruikelijk.

41 Kilogauss. — Polarisatievlak horizontaal — Dikte 0.3 mm.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	
λ	469.5	472.8	474.0	474.5	475.3	476.2	477.0	477.4	$\mu\mu$
β_0	0.26	0.26	0.14	0.05	0.035	0.16	0.105	0.09	„
β_{41}	0.26	0.35	—	0.105	—	0.195	0.21	0.23	„
$d\beta$	0	0.09	—	0.055	—	0.035	0.105	0.14	„
$d\lambda$	—	—	0.22	—	0.18	—	—	—	„
$d\lambda/\lambda^2$	—	—	9.8	—	8.0	—	—	—	$cm.^{-1}$

Hierbij vormde III een onsymmetrisch duplet, waarvan de component aan de roode zijde smaller was; V een zwak duplet; bij VI werd het midden iets lichter.

Met een verticaal polarisatievlak werden alle banden vager, de meesten iets naar het rood verplaatst; in het veld werd verbreeding of meerdere vervaging gezien; III gaf nu een symmetrisch duplet.

Band in 't blauwgroen bij — 193°: met een horizontaal polarisatievlak $\lambda = 511{,}9$, $\beta_0 = 0{,}13\ \mu\mu$; in een veld van 42 kgs. verscheen een duplet: breedte der linkerlijn 0,13, der rechterlijn 0,18, der lichte tusschenruimte 0,09 $\mu\mu$; het geheel maakte den indruk van wellicht een quadruplet te zijn. Met een verticaal polarisatievlak was het verschijnsel analoog maar minder duidelijk.

Bandengroep in 't groen bij — 193°: 6 banden werden gemeten.

Band II gaf een gewoon duplet; dat van III bleef in 't midden vrij donker, zoodat men ook in dit geval een meer samengestelde structuur moet vermoeden.

Met een verticaal polarisatievlak was een en ander minder goed zichtbaar; band II gaf nog een duidelijk duplet, bij III was hiervan slechts een spoor te onderkennen.

42 Kilogauss. — Polarisatievlak horizontaal — Dikte 0,3 mm.

	I	II	III	IV	V	VI	
λ	521.2	523.0	523.9	525.3	526.0	527.5	$\mu\mu$
β_0	0.49	0.105	0.355	0.10	0.13	0.195	»
β_{42}	0.58	—	—	0.15	0.275	0.275	»
$d\beta$	0.09	—	—	0.05	0.145	0.08	»
$d\lambda$	—	0.26	0.29	—	—	—	»
$d\nu/\lambda^2$	—	9.5	10.5	—	—	—	cm^{-1}.

Bandengroep in 't geel bij —193°. Twee vrij scherpe banden 576,0($\beta_0 = 0{,}3$) en 586,0($\beta_0 = 0{,}14$) ondergingen in een veld van 42 kgs. een duidelijke verbreeding van 0,05 $\mu\mu$. De tusschengelegen banden zijn hier voor de waarneming te breed.

Bandengroep in 't oranjerood bij —193°: 5 banden werden gemeten.

38 Kilogauss. — Polarisatievlak horizontaal — Dikte 0,6 mm.

	I	II	III	IV	V	
λ	623.2	624.1	625.6	627.2	628.3	$\mu\mu$
β_0	0.31	0.13	0.18	0.13	0.08	»
β_{38}	—	0.26	—	0.15	—	»
$d\beta$	—	0.13	—	0.02	—	»
$d\lambda$	0.22*	—	0.40*	—	0.34	»
$d\nu/\lambda^2$	5 7	—	10.2	—	8.6	cm^{-1}.

Hierbij leverden I en III zeer vervaagde dupletten, waarvan hier de afstanden * der uiterste grenzen zijn opgegeven; V een duidelijk duplet met een schaduw tusschen de componenten, wellicht een quadruplet.

Met een verticaal polarisatievlak was het verschijnsel analoog en werd met een dunner plaatje bevestigd: I was een duplet, III was hier onzichtbaar, bij IV vertoonde zich in 't midden eenig licht bij grootere

verbreeding, structuur vermoedelijk gecompliceerd, V was weer een zeer duidelijk duplet.

Bandengroep in 't rood bij — 193°: Vier banden, waaronder twee vrij scherpe 674,4 en 676,2 vertoonden een verbreeding of vervaging in het veld; laatstgenoemde werd met een verticaal polarisatievlak een duplet, wellicht ook een quadruplet.

Neodymnitraat $[Nd(NO_3)_3 . 6\,H_2O]$.

§ 24. Het scheen ons van belang naast het amorphe nitraat (§ 9) ook kristallen te onderzoeken, die bij een veel geringere dikte intensieve en smalle absorptiebanden vertoonen; de natuurlijke monokliene plaatjes waren loodrecht op een der optische assen georiënteerd, zoodat hierbij de nicol kon worden gemist. De golflengten der banden zijn voor het nitraat over 't algemeen iets kleiner — tot 3 $\mu\mu$ toe — dan voor het sulfaat.

Band in 't blauwgroen bij —193°. De golflengte was nu $\lambda = 511{,}3\ \mu\mu$; in een veld van 41 kgs. verscheen een duplet, waarvan de componenten een afstand hadden van 0,22 $\mu\mu$.

Bandengroep in 't groen bij — 193°. 5 banden werden in het spectrum der tweede orde gemeten.

41 Kilogauss. Dikte 0.2 mm.

	I	II	III	IV	V	
λ	521.3	522.3	523.1	524.6	525.0	$\mu\mu$
β_0	0.155	0.11	0.18	0.09	0.045	"
β_{41}	0.265	0.18	0.22	—	0.11	"
d_β	0.11	0.07	0.04	—	0.065	"
d_λ	--	—	—	0.22	—	"
$d_{\lambda/\beta}$	—	—	—	8.0	—	cm [1].

Bij het duplet IV bleef in 't midden een schaduw.

Bandengroep in 't geel bij — 193°. Twee vrij scherpe banden 581,9 en 583,1 ondergingen in een veld van 42 kgs. een verbreeding van 0.05 $\mu\mu$; de overige waren te breed en te wazig.

Bandengroep in 't oranjerood bij — 193°. 3 banden werden gemeten.

40 Kilogauss.				Dikte 0.45 mm.	
	I	II	III S.	III	
λ	624.2	625.2	(626.7)	626.9	$\mu\mu$
β_0	0.265	0.18	(0.05)	0.14	„
d_1	0 5	0.5	—	0.5	„
d_1/λ^2	12.8	12.8	—	12.8	cm^{-1}

De dupletten I en III waren normaal, II daarentegen onsymmetrisch, de component aan de roode zijde zwakker zijnde; de satelliet III S was in het veld niet meer zichtbaar.

Bandengroep in 't rood bij — 193°: 8 banden werden gemeten.

40 Kilogauss.							Dikte 0.45 mm.		
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	
λ	671.0	672.0	673 3	674.3	675.2	675 8	676.6	677.2	$\mu\mu$
β_0	0.31	0.26	0.25	0 22	0.25	0.26	0 22	0.31	„
β_{40}	v.	0.52	0.45	0.32	v.	v.	—	—	„
d_3	—	0.26	0.20	0.10	—	—	—	—	„
d_2	—	—	—	—	—	—	0.80	0.90	„
d_2/λ^2	—	—	—	—	—	—	17.5	19.6	cm^{-1}

Band I, V en VI verdwenen in het veld; II was veldvrij een donkere kern met schaduwen aan beide zijden, die in 't veld verdwenen. De beide dupletten VII en VIII gaven de grootste tot nu toe gemeten splitsing $-1{,}5 \times (D_1 - D_2)$; toevallig vielen bij het hier gebruikte veld de naar elkaar toegekeerde componenten samen zoodat het duplettenpaar er uitzag als een wijd triplet met zwaren middenband. Een verschijnsel van zoodanige orde van grootte moet men met elken goeden spectroscoop reeds kunnen waarnemen.

Ten slotte merken wij nog op dat het in § 9 genoemde neodymmagnesiumnitraat ook in hexagonale kristallen kan worden verkregen; zulke optisch éénassige preparaten zijn zeer gewenscht (§ 19); verder bestaat ook een isomorphe zoutenreeks, die mangaan, cobalt, nikkel of zink bevat. Metingen hierover zijn gedeeltelijk reeds uitgevoerd, ten deele nog in voorbereiding.

Samariumsulfaat $[Sm_2(SO_4)_3 . 8\,H_2O]$.

§ 25. Wij onderzochten thans een beter doorzichtig preparaat (verg.

§ 19) hetgeen weer beide optische assen bevatte en even als de overige sulfaten werd georiënteerd; 4 banden in 't groen werden bij —193° gemeten.

40 Kilogauss — Polarisatievlak horizontaal — Dikte 0.8 mm.

	I	II	III	IV	
λ	—	—	558.2	559.1	$\mu\mu$
β_0	0.09 3.3	0.09	0.105	0.18	„
β_{40}	0.18	0.11	0.18	0.31	„
$d\beta_{40}$	0.09	0.02	0.075	0.13	„

Het effect was hier blijkbaar gering; de verbreede banden waren vaag. Met een verticaal polarisatievlak bleef het verschijnsel vrij wel onveranderd.

Erbiumyttriumsulfaat $[(Er, Y_2)(SO_4)_3]$.

§ 26. Wij onderzochten ook een onzuiver product van de bewerking der oorspronkelijke mineralen met zwavelzuur, waarin erbium en yttrium in onstandvastige verhouding voorkomen, en laatstgenoemd overweegt; de kristallen waren monoklien. De bandengroepen in 't groen, geelgroen en rood vertoonden eigenaardige en ingewikkelde werkingen der magnetisatie; o. a. traden enkele nauwelijks zichtbare veldvrije banden in het veld juist veel duidelijker op, omgekeerd als in vele andere gevallen. Wij houden ons met nadere metingen hieromtrent onledig.

Het is zeer mogelijk dat dit zout nog andere zeldzame aardmetalen bevat; dat is trouwens bij de andere onderzochte preparaten eveneens denkbaar.

Erbiumnitraat $[Er(NO_3)_3 . 6H_2O]$.

§ 27. Ook hier werden, behalve het amorphe zout (§ 10) monokliene kristalplaatjes van gemiddeld 0.6 m.m. dikte onderzocht, die beide optische assen bevatten. De banden waren hier fijner dan bij eenig ander tot nu toe onderzocht preparaat. Tengevolge van de meestal zeer gecompliceerde splitsingen was het vaak ietwat bezwaarlijk na te gaan tot welke banden de diverse componenten behoorden. Bij inschakeling van 't veld zag men eene plotselinge verwarring, waaruit bij uitschakeling de veldvrije banden eerst weer langzaam te voorschijn kwamen. Waargenomen werd uitsluitend met ongepolariseerd licht.

De uitkomsten worden hier het best op eenigszins andere wijze in eene tabel gerangschikt.

Bandengroep in 't groen bij — 193°.

λ	β_0	Invloed van een veld van 39 Kilogauss.
516.4	0.17	ondergaat verbreeding (niet gemeten).
517.2	0.13	geeft quadruplet, waarvan de uiterste lijnen zeer fijn zijn, de middelste (van violet naar rood) resp. 0.12 en 0.15 $\mu\mu$ breed zijn, de afstanden der middens resp. 0.08; 0.27; 0.08 $\mu\mu$ bedragen, terwijl het midden der buitenste componenten ongeveer 0.01 $\mu\mu$ naar violet verplaatst schijnt t.o.v. de veldvrije lijn.
schaduw		
517.6	zeer smal	niet meer zichtbaar.
518.0	0.06	geven een zeer samengesteld lijnencomplex dat nader onderzocht zoude moeten worden.
518.3	0.11	
518.6	0.07	
519.1	0.10	geeft duplet (niet gemeten).
519.7	0.16	geeft onsymmetrisch quadruplet, waarvan de uiterste lijnen zeer fijn zijn; die aan den violetten kant zwak; de middelste zijn resp. (van violet naar rood) breed 0.11 (deze zeer zwak) en 0.135 $\mu\mu$; de afstanden der middens zijn resp. 0.07, 0.255, 0.13 $\mu\mu$, terwijl het midden tusschen de uiterste componenten 0.05 $\mu\mu$ naar violet verplaatst schijnt te zijn t.o.v. de veldvrije lijn.
520.2	0.17	geeft onsymmetrisch duplet, waarvan de component aan de violette zijde 0.05 $\mu\mu$ breed is, de andere zeer smal; afstand der middens 0.175 $\mu\mu$; het gemiddelde dezer middens niet merkbaar verplaatst t.o.v. de veldvrije lijn.
520·7	0.14	geeft onsymmetrisch triplet (duplet met satelliet aan violette zijde); niet gemeten.
521.3	0.11	geeft onsymmetrisch quadruplet; uiterste component aan violette zijde vrij sterk, aan roode zijde zwak; middelste componenten sterker.

§ 28. *Bandengroep in 't geelgroen bij* — 193°

λ	β_0	Invloed van een veld van 39 Kilogauss.
534.8	0.13 (zwak)	ondergaat verbreeding en vervaging, niet wel meetbaar.
535.5 schaduw[1]	0.13	geven onsymmetrisch duplet, bestaande uit (van violet naar rood) eerst een schaduw ter breedte van 0.29 $\mu\mu$, vervolgens een sterke band 0.18 $\mu\mu$ breed, dan een schaduw, en eindelijk een zwakke onscherpe band 0.26 $\mu\mu$ breed; van de eerste component is het midden 0.17 $\mu\mu$ naar 't violet t. o. v. den veldvrijen band 535.5 verplaatst, terwijl de plaats van 't midden der tweede component 535.8 is.
535.8	0.09	
536.95	smalle satelliet	geven te zamen, in de 1e orde gezien, een triplet waarvan de componenten (van violet naar rood) resp. breed zijn 0.10; 0.05; 0.07 $\mu\mu$, de eerste zeer zwak, de laatste twee sterker en door eene schaduw verbonden; de ligging der middens van de eerste twee is resp. 0.44 en 0.14 $\mu\mu$ naar 't violet, die van de laatste 0.05 $\mu\mu$ naar 't rood t. o. v. den veldvrijen band 537.15 verplaatst. In de 2e orde gezien wordt de lijn 536.95 een symmetrisch duplet, ongeveer 0.44 $\mu\mu$ gescheiden; de lijn 537.15 een onsymmetrisch duplet, waarvan de component aan de roode zijde zeer zwaar is.
537.15	0.05	
537.35	smalle, zwakke satelliet	geven te zamen een triplet, waarvan de componenten (van violet naar rood) resp. breed zijn 0.08; 0.08; 0.10 $\mu\mu$, de eerste twee sterk en door eene schaduw verbonden, de laatste zeer zwak; de ligging van het midden der eerste component is 0.02 $\mu\mu$ naar 't violet, die der beide volgende resp. 0.07 en 0.34 $\mu\mu$ naar 't rood t. o. v. de veldvrije lijn 537.6 verplaatst.
537.6	0.06	
537.8	smalle satelliet iets sterker dan eerste	
538.5	(smal, zwak)	geeft duplet (niet gemeten).
539.15	0.09	geeft duplet, met componenten ieder 0.08 $\mu\mu$ breed,

[1]) Vormen bij een ietwat dikker kristal te zamen een zwaren band.

λ	β_0	Invloed van een veld van 39 Kilogauss.
		en afstand der middens 0.30 $\mu\mu$; terwijl zich aan de violette zijde nog eene schaduw vertoont, waar zich wellicht nog eene derde component bevindt; het midden der twee lijnen van 't duplet schijnt 0.03 $\mu\mu$ naar 't violet te zijn verplaatst t. o. v. de veldvrije lijn 539.15.
539.7	0.08	geeft onsymetrisch sextuplet, waarvan de uiterste vier componenten zwak zijn, en zeer smal, de middelste twee zwaar, en resp. (van violet naar rood) 0.06 en 0.03 $\mu\mu$ breed zijn, terwijl de afstanden der middens resp. bedragen 0.045; 0.05; 0.11; 0.17; 0.035, totaal 0.41 $\mu\mu$. Het midden der uiterste twee componenten valt samen met de veldvrije lijn. De twee componenten aan de violette zijde zijn door een schaduw verbonden.
540.3	0.07	geeft eenigszins vagen band, 0.22 $\mu\mu$ breed, waarin niet met zekerheid lijnen konden worden onderscheiden; wellicht is 't echter een triplet. Het midden schijnt 0.03 $\mu\mu$ naar 't violet t. o. v. de veldvrije lijn verplaatst te zijn.
540.8	0.07	geeft onsymmetrisch quadruplet, waarvan de drie aan de violette zijde gelegen componenten vrij sterk, de vierde zwak is; de onderlinge afstanden der componenten zijn vrijwel gelijk, en bedragen 0.18 $\mu\mu$.

§ 29. *Bandengroep in 't rood bij* — 193°.

λ	β_0	Invloed van een veld van 40 Kilogauss.
640.3	niet gemeten	geeft onsymmetrisch duplet, (niet gemeten).
640.9	niet gemeten	geeft onsymmetrisch duplet, (niet gemeten).
642.2	0.09	geeft duplet, bestaande uit eene zwakke, smalle lijn, aan de violette zijde, en eene zware lijn, 0.11 $\mu\mu$ breed, waarvan het midden 0.09 $\mu\mu$ van

λ	β_0	Invloed van een veld van 40 Kilogauss.
		de andere, zwakke, lijn verwijderd is, en 0.18 $\mu\mu$ naar 't rood verplaatst is t.o.v. de veldvrije lijn. Waarschijnlijk bevindt zich aan de roode grens van die zware lijn nog eene er mede samenhangende zwakke lijn, zoodat het geheel een triplet zoude vormen.
642.8	0.11	geeft triplet, waarvan de uiterste componenten zwak zijn, en zeer smal, de middelste sterk, en 0.125 $\mu\mu$ breed; de afstanden der middens (van violet naar rood) bedragen resp. 0.11 en 0.16 $\mu\mu$; het midden der middelste componenten is 0.035 $\mu\mu$ naar 't rood verplaatst t.o.v. de veldvrije lijn.
650.5	0.09 (ietwat vaag)	ondergaat verbreeding; de breedte bedraagt 0.35 $\mu\mu$, terwijl de band aan de violette zijde donkerder is dan aan den rooden kant (wellicht ontstaat er een quadruplet, wat echter onzeker is); eene verplaatsing werd niet waargenomen.
651.3	0.09 (ietwat vaag)	ondergaat verbreeding en vervaging; de breedte bedraagt 0.40 $\mu\mu$; eene verplaatsing naar violet schijnt aanwezig, kon echter niet met zekerheid worden geconstateerd.

§ 30. Zevende reeks. Wij onderzochten thans

Uranylkaliumsulfaat $[UO_2K_2(SO_4)_2 + 2H_2O]$

Een rhombisch plaatje, beide assen bevattend, 0.7 m.m. dik, werd in een veld van omstreeks 40 kgs. met ongepolariseerd licht, bij — 193°. onderzocht. De bekende banden bleken hier veel talrijker en smaller dan bij het uranylnitraat (verg. § 11), o. a. 487.8, 488.2, 488.8 en 490.5 in 't blauw. Deze banden schenen weliswaar in het veld iets te vervagen, maar het verschijnsel was hier twijfelachtig en in elk geval de verbreeding niet grooter dan 0.02 $\mu\mu$. Bij de vele banden in het violet viel geen inwerking van het veld te bespeuren.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 106 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: Dr. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. C. BRAAK: *„Isothermen van tweeatomige gassen en hunne binaire mengsels. VIII. Over de draagkracht van glas en de toepassing van glazen buizen bij metingen onder hoogen druk bij gewone en bij lage temperaturen."*

§ 1. *Inleiding.* Bij vorige isothermen bepalingen (Med. N°. 78 (Maart 1902), N°. 97^a (Dec. 1906), 99^a (Juni 1907), 100^a en 100^b (Nov. 1907), 102^a (Dec. 1907) en 102^b (Maart 1908)) kon met den druk niet boven 60 atmosfeeren worden gegaan. Voor het verkrijgen van de beoogde nauwkeurigheid van ongeveer $^1/_{1000}$ is namelijk een tot dezelfde nauwkeurigheid betrouwbare manometer noodig. En tot nog toe konden wij ons dezen alleen verschaffen door bij de calibratie terug te gaan tot den in Med. N°. 44 (Oct. 1898) beschreven open manometer, die slechts tot 60 atmosfeeren aanwijst.

Reeds lang echter bestond het plan hoogere drukkingen in het onderzoek op te nemen. Als eerste stap in die richting hebben wij de bovenste grens van den druk tot 120 atmosfeeren opgevoerd. Want de bestaande open manometer kon zeer geschikt bij behoud van dezelfde inrichting, enkel door het toevoegen van een aantal nieuwe manometerbuizen van grooter weerstandsvermogen dan de reeds aanwezige, worden uitgebreid tot een open manometer van dezelfde nauwkeurigheid, die tot 120 atmosfeeren loopt. Zoowel de nieuwe manometer als de overige voor drukkingen tot 120 atmosfeeren bestemde toestellen naderen reeds hun voltooiïng en zullen spoedig het bepalen der isothermen tot 120 atm. veroorloven. Later hopen wij metingen bij nog hoogere drukkingen te laten volgen. Het schijnt zelfs mogelijk tot 500 atmosfeeren te gaan zonder veel van de tot nog toe bereikte nauwkeurigheid prijs te geven.

Voor deze verschillende onderzoekingen levert het een groot voordeel op, wanneer de piëzometer- en manometerbuizen van glas vervaardigd kunnen worden. Wij hebben dus nagegaan in hoeverre dit bij de maximale belasting, die glas verdraagt, mogelijk is.

Het uitvoerigst hebben wij de draagkracht van glas bij de gewone temperatuur onderzocht met het oog daarop, dat het in de eerste plaats wenschelijk is de reservoirs der manometerbuizen bij den open manometer en de verdeelde steelen bij de piëzometerbuizen van glas te vervaardigen.

Aan deze metingen werd toegevoegd eene reeks van bepalingen bij lagere temperaturen om te beoordeelen in hoever bij deze voor de

hoogere drukkingen nog van glazen piëzometerreservoirs gebruik kon worden gemaakt.

Over de maximale belasting van glas zijn reeds onderzoekingen gedaan door GALITZIN [1]) en WINKELMANN en SCHOTT [2]). De eerste bepaalde den inwendigen druk, waaraan cylindrische glazen buizen kunnen weerstand bieden, de laatsten de maximale belasting van glazen staven. De bepalingen van GALITZIN werden echter slechts bij betrekkelijk geringe drukken uitgevoerd, die van WINKELMANN en SCHOTT slechts bij gewone temperatuur.

Ten deele volgden wij bij ons onderzoek de methode van GALITZIN. De elasticiteits-theorie leert uit den maximalen druk, welken de glazen buis uithoudt, in verband met de afmetingen van den toestel de maximale spanning in het glas berekenen. De hiervoor verkregen uitkomsten werden getoest aan de directe gegevens verkregen in een tweede serie van metingen, waarbij de maximale belasting van glazen staven werd bepaald. Dat de uitkomsten der beide seriën onregelmatige verschillen vertoonen is met het oog op het onderzochte materiaal niet bevreemdend. Deze verschillen doen geen afbreuk aan de algemeene gevolgtrekkingen, die uit de metingen kunnen worden gemaakt.

§ 2. *Bepalingen bij gewone temperatuur.*

Overzicht der waarnemingen en inrichting der meettoestellen.

1°. *Bepaling van den maximalen inwendigen druk.*

De onderzoekingen geschiedden met gewoon Thüringer glas. Een cylindervormig reservoir van het te onderzoeken glas werd aan een dikwandige glazen capillair geblazen. De capillair was aan het einde voorzien van een stalen moer met zeskant, waarmee ze aan een stalen capillair kon worden geschroefd, die met een perspomp met metaal manometer is verbonden. Het staalstuk werd voor metingen tot 200 atmosferen met lak op het glas bevestigd, voor hoogere drukken werd het op het glas vastgesoldeerd (vergelijk Med. N°. 99^a § 15 October 1907). Mits met zorg gemaakt, bleek deze verbinding tegen de hoogste drukken (1200 atm.) bestand. De buizen werden van te voren zorgvuldig gekoeld.

Zij kunnen naar hunne afmetingen worden verdeeld in drie soorten:

a. Dikwandige buizen met groote inwendige doorsnede.

b. Dikwandige capillaire buizen.

c. Dunwandige buizen met groote inwendige doorsnede.

---

[1]) Bull. de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Pétersbourg, Ve Serie, B. XVI N°. 1.

[2]) Wied. Ann. 51.

Het zal blijken dat deze drie soorten van buizen onderling verschillende uitkomsten geven.

De nauwkeurigheid van den manometer is ongeveer 2% hetgeen voor ons doel volkomen voldoende is.

2°. *Directe meting van de maximum spanning T_m door bepaling van de maximale belasting.*

Om ongelijkmatige belasting bij het ophangen zoo goed mogelijk te voorkomen, werden hiervoor glasdraden van hoogstens 0.6 mm. dikte aangewend [1]).

Ten einde de spanningen nog tot een minimum te reduceeren werd het glasstaafje aan de beide einden tot een haak vervormd. Daarna werd de bovenste haak opgehangen en de staaf in het midden tot een draad uitgetrokken, door op de onderste haak een kracht uit te oefenen op dezelfde wijze als bij de proefneming het geval zou zijn. De belasting bestond uit een bekerglas waarin water vloeide.

§ 3. *Uitkomsten.*

1°. *Bepalingen met cylindrische buizen onder inwendigen druk.*

Ten einde vergelijking met de uitkomsten van GALITZIN gemakkelijk te maken nemen wij voor den contractiecoefficiënt dezelfde waarde $\frac{1}{4}$ aan. Verstaan wij onder P_m den maximalen inwendigen druk, onder $2R$ de uitwendige, onder $2R'$ de inwendige middellijn (deze wordt verder in mM. opgegeven) en stellen wij $n = \frac{R}{R'}$, dan wordt de maximale spanning T_m in het glas, in dit geval die van de binnenste deelen van het glas in een richting loodrecht op de beschrijvende lijnen, voorgesteld door:

$$T_m = \frac{1}{4}\left\{5P_m + 7\left(\frac{P_m - 1}{n^2 - 1} - 1\right)\right\}.$$

Is P_m, gelijk in de volgende tabellen uitgedrukt in atmosferen, dan vindt men T_m in KG/mm^2, zooals zij in de volgende tabellen wordt opgegeven, door de bovengevonden waarde nog met 0.01033 te vermenigvuldigen.

Voor de drie in § 2 onder a, b en c genoemde seriën zijn de uitkomsten in onderstaande tabel vereenigd. De beteekenis der kolommen zal na het hier boven vermelde duidelijk zijn. De eerste kolom geeft het nummer aan der gebruikte buis. Waar meerdere opgaven onder één nummer zijn vereenigd is eenzelfde buis na dat zij onvolledig

[1]) Bij de proeven van WINKELMANN en SCHOTT waar dikkere staafjes van 10—20 mM^2. doorsnede werden gebruikt, bleek dit groote zorg te vereischen.

gesprongen was (bijv. doordat slechts het uiteinde er af sprong, of de buis bij het staalstuk afbrak) weer voor een volgende proef gebruikt.

TABEL I. Maximale inwendige druk en spanning van cylindrische glazen buizen.

No.	$2R$	$2R'$	n	P_m	T_m
Serie *a*					
1	9.3	3.5	2.66	340	5.38
2	8.8	4.0	2.20	280	4.91
3	8.7	4.2	2.07	230	4.21
4	9.4	3.2	2.94	270	4.10
5	9.2	3.0	3.07	380	5.70
6	9.7	4.2	2.31	370	6.30
7	10.4	4.0	2 60	240	3.83
8	12.8	5.8	2.21	260	4.54
9	17.6	5.0	3.52	290	4.19
Serie *b*					
10	7.4	1.00	7.40	510	6.74
11	6.8	1.00	6.80	420	5.57
12	7 5	0.27	27.78	460	5.93
13	6.5	0.35	18.57	500	6.46
14	6.7	0.24	27.92	540	6.97
				800	10.33
				1100	14.21
15	6.7	1 08	6.20	530	7.08
16	5.9	0.70	8.43	680	8.94
17	5.8	0.46	12.61	1200	15.61
18	5.9	0.62	9.52	820	10.74
19	5.3	0.46	11.52	920	11.99
20	5.5	0.46	11.96	1060	13.80
21	6.6	1.00	6.60	660	8.78
22	7.2	1.40	5.14	520	7.07
23	6.4	1.35	4.74	520	7.13
Serie *c*					
24	3.8	2.42	1.57	283	7.12
25	5.6	4.00	1.40	193	6.09
26	6.4	4.78	1.34	221	7.84
27	6.9	3.91	1.76	329	7.06
28	7.4	5.11	1.45	179	5.21
29	7.9	5.46	1.45	157	4.57
30	3.5	2.26	1.54	261	6.78
31	6.8	5.13	1.32	203	7.52
32	7.4	5.19	1.43	201	6.04
33	6.8	5.78	1.18	66	3.83
34	3.8	2.42	1.57	377	9.49
35	3.8	2.50	1.52	277	7.36
36	6.0	4.37	1.37	179	5.96
37	6.8	5.17	1.31	159	6.02
38	6.8	4.85	1.40	169	5 33
39	7.3	5.62	1.30	109	4.22
40	7.8	7.31	1.067	54	7.60

De uitkomsten voor T_m voor serie *a* zijn het laagst, die voor serie *b* het hoogst. Bij deze laatste serie springt dit vooral in het oog voor de buizen met zeer kleine inwendige middellijn, wanneer men N°s. 12 en 13 uitzondert, waarbij het soldeeren te wenschen overliet. De volgende buizen zijn aan de hand der opgedane ervaring met meer zorg behandeld. Bij de buizen, die onder te lagen druk zijn gesprongen blijkt in den regel het bestaan van onregelmatige spanningen duidelijk uit de wijze van springen, doordat de breuk dwars of onregelmatig verloopt en niet, zooals de theorie vereischt volgens een beschrijvende lijn.

2°. *Maximale belasting van glasdraden.*

De middellijn der draden ligt tusschen 0.1 en 0.6 mm. De uitkomsten zijn in de twee onderstaande tabellen vereenigd. De doorsnede werd bepaald door in twee loodrecht op elkaar staande richtingen de middellijn te bepalen. Het gemiddelde van deze beide metingen is in de tabellen gegeven. De eerste tabel bevat de resultaten verkregen met glasdraden, die slechts de bewerking ondergingen in § 2 vermeld. Om den invloed van onregelmatigheden na te gaan, die op deze wijze in de structuur van het glas kunnen overblijven, werd nog een serie van metingen verricht, met draden, die van te voren tot roodgloeihitte werden verwarmd en daarna zeer langzaam afgekoeld. De uitkomsten van deze serie zijn in tabel III vereenigd.

TABEL II. Maximale belasting van niet gekoelde glasdraden.

Belasting in grammen	Middellijn in mm	T_m in KG/mm^2	Belasting in grammen	Middellijn in mm	T_m in KG/mm^2
257.6	0.119	23.1	2615	0.424	18.4
496.5	0.162	17.5	2785	0.446	17.8
457.8	0.159	22.9	1425	0.351	14.7
			1635	0.370	17.5
2325	0.384	19.8	1325	0.325	16.0
1175	0.257	22.7			
1475	0.325	17.6	1555	0.298	22.4
1695	0.311	22.4	2335	0.370	21.5
4105	0.487	22.1			

Behalve de draad waarvoor T_m het laagst is n.l. 14.7 vertoonen alle draden van tabel II op de doorsnede een vezelige structuur terwijl aan den rand een kleine halfcirkelvormige gladde plek zich bevindt overeenkomstig het door WINKELMANN en SCHOTT gevondene[1]).

TABEL III. Maximale belasting van gekoelde glasdraden.

Belasting in grammen	Middellijn in m.m.	T_m in $KG./mm^2$	Belasting in grammen	Middellijn in m.m.	T_m in $KG./mm^2$
2920	0.438	19.4	1910	0.325	23.4
3530	0.597	12.6	1760	0.322	21.6
2120	0.532	9.5	2850	0.445	18.3

Wat de serie van tabel III betreft kan nog worden opgemerkt, dat om vormveranderingen van de in den oven opgehangen en door de verhitting week geworden draden onder de werking der zwaartekracht, welke later bij het belasten tot onregelmatige spanningen aanleiding kunnen geven, te voorkomen, de uiteinden (zie § 2) in plaats van tot haken, zooals bij de vorige serie, tot gesloten ringen werden toegesmolten, in dier voege dat het geheel zoo goed mogelijk symetrisch werd ten opzichte van een vlak door de lengte-as gebracht. Vergelijking van de tabellen II en III leert dat beide methoden tot dezelfde resultaten voeren.

Bij den glasdraad met de laagste T_m (zie tabel III) was de doorsnede weinig vezelig maar glad, de in grootte daarop volgende waarde van T_m ($= 12.6$) ging gepaard met een betrekkelijk groote gladde halfcirkelvormige vlek, terwijl bij de hoogste T_m ($= 23.4$) in het geheel geen vlek was te zien, maar de doorsnede een sterk vezelige structuur vertoonde. Al deze feiten komen overeen met hetgeen door WINKELMANN en SCHOTT[2]) is gevonden.

Op de plaat is voor een tweetal draden de structuur der doorsnede op de plaats, waar de draad is stuk getrokken, weergegeven. Zij vertoonen beide duidelijk de vlakke halfcirkelvormige gedeelten en de hiervan straalsgewijze uitgaande structuur. De kleinste middellijn der doorsneden is respectievelijk 0.530 en 0.555 mm.

---

[1]) p. 718 loc. cit.

[2]) loc. cit.

§ 4. *Gevolgtrekkingen.*

Een blik op tabel I doet zien, dat wat serie *a* en *c* betreft onze resultaten vrijwel met die van GALITZIN [1]) overeenkomen.

Die van serie *b* echter wijzen er op, dat het door hem afgeleide resultaat voor den maximalen inwendigen druk, n.l. 623 atm. onjuist is, aangezien de hoogste door ons waargenomen druk 1200 atm. bedraagt. T_m blijkt n.l. voor de buizen van serie *b* aanmerkelijk hooger te liggen dan volgens de waarnemingen van de beide andere seriën te verwachten was. Wat het lager zijn der waarden voor *a* dan voor *b* betreft, dit moet wel daaraan worden toegeschreven, dat bij ongeveer gelijke inwendige doorsnede de wanddikte bij de eerste serie veel grooter is, waardoor de kans op onregelmatige spanningen in het glas grooter wordt. Verder is bij serie *b* weliswaar de wanddikte grooter dan voor serie *c*, echter is hier de inwendige doorsnede veel geringer, waardoor het bestaan van oneffenheden en krassen aan het oppervlak, welke zeer nadeelig op de draagkracht werken [2]) tot een minimum wordt teruggebracht zoodat T_m in deze serie toch boven die in serie *c* kon blijven. Bij de buizen waarvoor $R' = 1$ mm. schijnen beide factoren elkaar op te heffen, voor die met kleinere inwendige doorsnede blijkt de gunstige invloed van het kleinere oppervlak overwegend.

Teneinde nader te onderzoeken in hoeverre de bovengenoemde twee schadelijke factoren op T_m invloed uitoefenen, werden zooals wij reeds vermeldden, de directe bepaling toegepast met dunne glasdraden, die een zoo gaaf mogelijk oppervlak hebben en waarbij wegens de geringe doorsnede abnormale spanningen slechts gering kunnen zijn. De uitkomsten, die belangrijk hooger zijn dan die van WINKELMANN en SCHOTT, zijn in overeenstemming met die volgens de eerste methode gevonden en schijnen de onderstelling hierboven gemaakt omtrent den schadelijken invloed van een niet volkomen gaaf oppervlak en inwendige abnormale spanningen te rechtvaardigen. Zij wijzen op een bovenste grens voor $P_m = 1700$ atm.

§ 5. *Bepalingen bij lage temperatuur.*

De bepalingen in vloeibare lucht geschiedden op dezelfde wijze als de vorige bij gewone temperatuur. De onderste haak van den glasdraad was bevestigd aan een houten drager, die naast den draad in een vacuumglas met vloeibare lucht was geplaatst. De eerste

---

[1]) Tabel I p. 12 en 13, loc. cit.

[2]) Vergelijk WINKELMANN en SCHOTT, loc. cit.

Dr. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. C. BRAAK. Isothermen van twee-atomige gassen en hunne binaire mengsels VIII. Over de draagkracht van glas en de toepassing van glazen buizen bij metingen onder hoogen druk bij gewone en bij lage temperaturen.

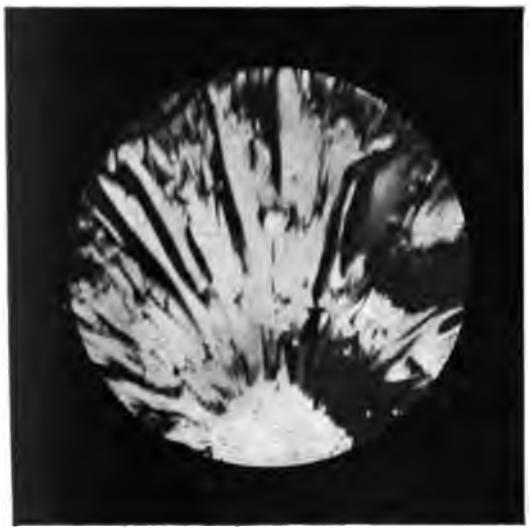


Fig. 1.

Fig. 2.

bepalingen gaven resultaten, die aanmerkelijk van de latere afwijken. Zij stemmen slecht onderling overeen en kenmerken zich vooral door zeer hooge waarden voor de maximale belasting, die variëert van 44 tot 73 KG. per mm.^{2}, terwijl voor de gewone temperatuur de hoogste belasting per mm.^{2} 23 KG. was. Ook de structuur der doorsnede was geheel verschillend, weinig vezelig en meer slierachtig. Het vlakke stukje op de breuk ontbrak in den regel geheel. Bij deze metingen werden de draden stuk getrokken bijna onmiddellijk nadat ze in vloeibare lucht waren geplaatst. Bij de volgende bepalingen werden ze eerst minstens 20 minuten in het bad van lage temperatuur geplaatst. Deze laatste geven lagere en beter overeenstemmende uitkomsten. De structuur der doorsnede is analoog aan die bij gewone temperatuur, over het algemeen iets minder duidelijk. In onderstaande tabel zijn de resultaten vereenigd.

TABEL IV. Maximale belasting van glasdraden bij de temperatuur van vloeibare lucht.

Belasting in grammen.	Middellijn in mm.	T_m in KG/mm^2.	Belasting in grammen.	Middellijn in mm.	T_m in KG/mm^2
1993	0.280	32.4	2498	0.297	35.9
2653	0.372	24.3	2055	0.286	31.9
2523	0.290	38.2	3550	0.359	35.1
1293	0.236	29.5	3865	0.396	31.3

De uitkomsten zijn nog aanmerkelijk hooger dan voor de gewone temperatuur, een voor metingen bij lage temperatuur zeer gunstig resultaat.

Eindelijk werd nog een enkele bepaling gedaan in vloeibare waterstof. 15 minuten nadat de draad de temperatuur van het bad had aangenomen werd de draad stuk getrokken. De totale belasting was 3013 gram de middellijn 0.271 m.m., derhalve de maximale belasting in $^{KG}/_{mm_2} = 52.1$ dus weer belangrijk hooger dan bij de temperatuur van vloeibare lucht. De structuur der breukvlakte was slierachtig, niet vezelig, zonder vlak gedeelte.

Palaeontology. — De Heer MOLENGRAAFF biedt eene mededeeling aan van den Heer CLEMEND REID F. R. S. and Mrs ELEANOR M. REID B. Sc.: *"On Dulichium vespiforme sp. nov. from the brick-earth of Tegelen"*.

(Mede aangeboden door den Heer F. A. F. C. WENT).

In our paper on the Fossil Flora of Tegelen published in 1907 [1]) we figured a fruit provisionally referred to *Rhynchospora*, though it did not possess the articulate beak of that genus. All the specimens then available were so much distorted and injured by germination that it was difficult to determine what the character of the perfect fruit would be. In addition to this, the most perfect specimen appeared to possess a quadrate base and 8 setae, characters unknown in *Dulichium*, to which genus the fruit was in other respects comparable.

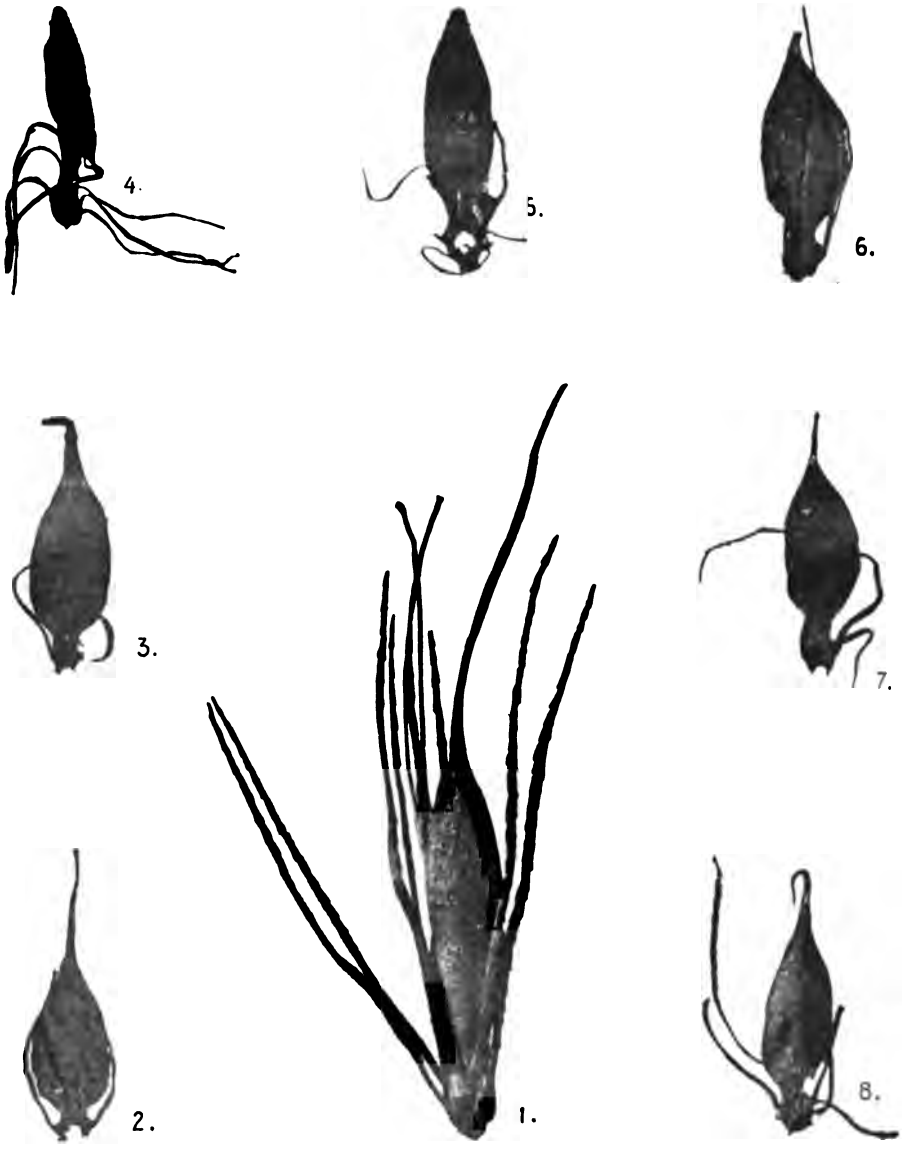
Since the publication of our paper we have obtained more material, thanks to the kindness of Dr. LORIÉ and Baron L. GREINDL. This new material and a closer examination of the specimens before collected, enables us now to describe the fruit as a new species belonging te *Dulichium*, a genus now confined to America, though already recorded by Dr. N. HARTZ as occurring in an interglacial peat-moss in Denmark [2]). Dr. HARTZ's specimens are referred, we think correctly, to the only living species, *Dulichium spathaceum;* our fruits are very different.

Fructus dimidio brevior eo *D. spathacei* tamen latior, long. (rostro incluso) circiter 3—5 mm.; setae 7 vel 8 (forsitan 9), longitudinaliter complanatae, canaliculatae, striatae; nux ovata subito in stipitem coarctata, in rostrum longum gracile attenuata, paulo triangularis vel plano-convexa, praesertim rostrum versus; superficies foveolata, multangula, eâ *D. spathacei* crassior; long. (rostro excluso) 2.0—2.5 mm., lat. 1 mm.

Figs. 1—8, photographed on the same scale, show the differences between the recent and fossil forms. In the living species the nut is oblong, not ovate, and is much narrower in proportion to its length. The long stalked nut with oblique attachment, inarticulate style, setae more than 6 with recurved hooks, are generic characters common to the two species. In section the nut of *D. vespiforme* is somewhat triangular near the base, becomes plano-convex in the middle, but

[1]) Verhand. Kon. Akad. Wetensch. (Tweede Sectie). Deel XIII, No. 6, fig. 105.
[2]) Dansk. geol. Forening 10, 1904, p. 13.

CLEMENT REID en Mrs ELEANOR M. REID. "On Dulichium vespiforme sp. nov. from brick-earth of Tegelen."



1. Dulichium spathaceum L. C. RICH. Recent, America. 2—8. Dulichium vespiforme *sp. nov.* Fossil, Tegelen. All the figures are magnified to the same scale — 12 diameters.

loses its convexity as it passes into the beak; the beak at its base is flattened triangular, but becomes terete above.

As all the specimens we have yet seen (about 20) have apparently germinated, it is impossible to describe the exact shape of the nuts or the complete setae; we have therefore figured several actual specimens, without attempting to restore them. The setae are more or less broken, but we cannot find clear evidence of more than 8 in any of the specimens; they differ from those of *D. spathaceum* in their flattening, and they are longitudinally channelled instead of showing a midrib. The fruits undoubtedly belong to the genus *Dulichium*; and as the living species has a wide range in latitude we thought it possible that some form (several different ones have been recorded) might agree with our fossil. We find, however, that the fruits of the recent forms in the Kew herbarium vary only slightly; they are always much larger than our fossil, and the nut is long, narrow, and parallel-sided.

Whether the genus *Dulichium* originated in Europe or in North America there is nothing to show. It has now only one living species, confined to America; but this species has been found also in a fossil state in Denmark. Now, in an older deposit in the province of Limburg, we discover an extinct form. Very little is yet known as to the geological history of the Cyperaceae, and *Dulichium* will probably turn out to have been widely distributed and to have had many species. The genus is at present very isolated and the new fossil form makes no approach to any other genus.

De Voorzitter brengt in herinnering dat, volgens de bepalingen van het Buitenzorg-fonds, in de eerstvolgende weken de oproeping zal moeten geschieden voor personen, die voor een bezoek aan 's Lands Plantentuin te Buitenzorg in aanmerking wenschen te komen; en deelt mede dat hij wegens het bereiken van den 70-jarigen leeftijd tot de rustende leden is overgegaan.

Op voorstel van den Voorzitter wordt besloten de volgende vergadering te houden op Vrijdag 29 Mei a.s. wanneer het blijkt dat bij de Hollandsche Maatschappij van Wetenschappen onoverkomelijke bezwaren bestaan op een anderen dag te vergaderen dan Zaterdag 30 Mei a.s.

Voor de Boekerij wordt aangeboden 1°. door den Heer LORENTZ de dissertaties van de Heeren L. S. ORNSTEIN en H. B. A. BOCKWINKEL 2°. door den Heer PLACE de dissertatie van den Heer J. G. SLEESWIJK ; 3°. door den Heer VAN DER WAALS: „*Lehrbuch der Thermodynamik*" Nach Vorlesungen von Prof. Dr. J. D. VAN DER WAALS bearbeitet von Dr. PH. KOHNSTAMM, Teil I.

De vergadering wordt gesloten.

E R R A T U M.

p. 581 r. 3 v. b. en p. 755 r. 5 v. o. staat: $r_i = a_i(1 + \varrho_i)$
lees: $r_i = a_i \varrho_i$.

(7 Mei, 1908).

REGISTER.

Aardkunde. Mededeeling van den Heer C. E. A. WICHMANN: „Over ertsgangen in de provincie Limburg". 69.

— Mededeeling van den Heer P. TESCH: „Beschouwingen over het Staringsche Zanddiluvium". 123.

— Mededeeling van den Heer J. SCHMUTZER: „Over de scheeve uitdooving van rhombische kristallen". 362.

— Mededeeling van den Heer J. SCHMUTZER: „Over de termen Schalie, Lei en Schist". 463.

— Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1907. 510.

— Aanbieding eener verhandeling van den Heer J. SCHMUTZER: „Bijdrage tot de kennis der oude eruptiefgesteenten en amphiboolschisten aan de rivieren Sĕbilit en Tĕbaoeng in Centraal Borneo". 690. Verslag hierover. 692.

— Mededeeling van den Heer C. E. A. WICHMANN: „Over steenen bijtels van Nieuw-Guinea." 824.

AARDE (Electromagnetische verschijnselen en de beweging der). 511.

AARDEN (De absorptiespectra van de verbindingen der zeldzame) bij de temperaturen, die met vloeibare waterstof te bereiken zijn, en hunne verandering door het magnetische veld. 678.

AARDSTROOMREGISTRATIE te Batavia tot onderzoek van het verband tusschen aardstroom en aardmagnetische kracht. 435, 737.

ABSORPTIESPECTRA (De invloed van temperatuur en magnetisatie op selectieve). 635. II. 749. III. 878.

— (De) van de verbindingen der zeldzame aarden bij de temperaturen, die met vloeibare waterstof te bereiken zijn, en hunne verandering door het magnetische veld. 678.

ADSORPTIE (De) van muskongeur tegen vlakten van verschillend materiaal. 31. 139.

AEROLOGISCHE STATIONS in Nederlandsch-Indië (Verzoek van het kön. preuss. Aeronautisch Observatorium te Lindenberg om steun voor de oprichting van). 248.

AMPHIBOOLSCHISTEN (Bijdrage tot de kennis der oude eruptiefgesteenten en) aan de rivieren Sĕbilit en Tĕbaoeng in Centraal Borneo. 690. Verslag hierover. 692.

Anatomie. Mededeeling van den Heer J. W. LANGELAAN: „Over de ontwikkeling van het Corpus Callosum in de hersenen van den mensch". 329.

Anatomie. Mededeeling van den Heer S. J. DE LANGE: „Opstijgende degeneratie na gedeeltelijke doorsnijding van het ruggemerg". 350.

— Aanbieding eener verhandeling van Mej. CLARA POLAK: „Die Anatomie des Genus Colobus". 504. Verslag hierover. 509.

Anthropologie. Mededeeling van den Heer L. BOLK: „Is rood haar een nuance of een variëteit"? 260.

ASSOCIATIE der Akademiën (Internationale) — (Toezending eener medaille geslagen ter herinnering aan de 1ste algemeene vergadering der) door het Institut de France. 68.

— (Verslag over het behandelde op de te Weenen gehouden algemeene vergadering der). 68, 434.

BAANELEMENTEN (Over de massa's en de) der satellieten van Jupiter. 579, 709.

BAKHUYZEN (E. F. VAN DE SANDE). Zie SANDE BAKHUYZEN (E. F. VAN DE).

BAKHUYZEN (H. G. VAN DE SANDE). Zie SANDE BAKHUYZEN (H. G. VAN DE).

BANEN (Over periodieke) van den Hestia-typus. 35.

BARRAU (J. A.). De uitbreiding der configuratie van KUMMER op ruimten van (2p—1) afmetingen. 205.

— Het analogon der Cf. van KUMMER in de ruimte van zeven afmetingen. 457.

BATAVIA (Aardstroomregistratie te) tot onderzoek van het verband tusschen aardstroom en aardmagnetische kracht. 435, 737.

BECQUEREL (JEAN) en H. KAMERLINGH ONNES. De absorptiespectra van de verbindingen der zeldzame aarden bij de temperaturen, die met vloeibare waterstof te bereiken zijn, en hunne verandering door het magnetische veld. 678.

BEGINSTOOT (De) van magnetische storingen. 728.

BEMMELEN (J. M. VAN). Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1907. 510.

BEMMELEN (W. VAN). Aardstroomregistratie te Batavia tot onderzoek van het verband tusschen aardstroom en aardmagnetische kracht. 435, 737.

— De beginstoot van magnetische storingen. 728.

BERNELOT MOENS (H. M) — Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken met verzoek om bericht over een door den Heer — gedaan verzoek om ondersteuning voor wetenschappelijke onderzoekingen. 2.

BEUSEKOM (J. VAN). Over den invloed van wondprikkels op de vorming van adventieve knoppen in de bladeren van Gnetum Gnemon L. 93.

BEVRUCHTING (Over een tweemalige reductie van het aantal chromosomen bij het ontstaan der geslachtscellen en over de daarop volgende tweemalige) bij enkele Polytrichum soorten. 312.

BINAIRE MENGSELS (Bijdrage tot de theorie der). IV. 12. V. 143. VI. 216.

— (Isothermen van twee-atomige gassen en hunne). VI. Isothermen van waterstof tusschen — 104° C. en — 217° C. (Vervolg). 162. 411. VII. Isothermen van waterstof tusschen 0° C. en 100° C. 418. VIII. Over de draagkracht van glas en de toepassing van glazen buizen bij metingen onder hoogen druk bij gewone en bij lage temperaturen. 850.

BINAIRE MENGSELS (Over het zinken van de gasphase in de vloeistofphase bij) voor het geval dat de moleculen van eene der componenten slechts eene zwakke aantrekking uitoefenen. 233.

— (Isothermen van één-atomige gassen en hunne). I. Isothermen van helium tusschen + 100° C. en — 217° C. 430, 495. II. Isothermen van helium bij ongeveer — 252° C. en — 259° C. 690, 815.

BINNENLANDSCHE ZAKEN (Minister van). Zie Minister van Binnenlandsche Zaken.

BLANKSMA (J. J.). Over de constitutie van het oxymethyldinitro-benzonitril van VAN GEUNS. 512.

BLIKSEMAFLEIDERS op het Rijksmuseum te Amsterdam (Overlegging van de definitief vastgestelde veranderingen der). 177.

BOEKE (J.) Over den bouw van de gangliencellen in het centraal zenuwstelsel van Branchiostoma lanceolatum (1ste mededeeling). 5.

— en G. J. DE GROOT. Physiologische regeneratie van neurofibrillaire eindnetten. 319.

BOEKGESCHENKEN (Aanbieding van). 2, 66, 177, 505, 562, 690, 692, 822, 900.

BOIS (H. E. J. G. DU). Bekrachtiging zijner benoeming tot buitenlandsch lid. 2.

— Dankzegging voor zijne benoeming. 2.

— en G. J. ELIAS. De invloed van temperatuur en magnetisatie op selectieve absorptiespectra. 635. II. 749. III. 878.

— G. J. ELIAS en F. LÖWE. Een autocollimatieve spectraaltoestel van groote lichtintensiteit, tevens monochromator. 744.

BOLK (L.). Is rood haar een nuance of een variëteit? 260.

— Aanbieding eener verhandeling van Mej. CLARA POLAK: „Die Anatomie des Genus Colobus". 504.

BOOLE STOTT (A.) en P. H. SCHOUTE. Aanbieding eener verhandeling: „On the sections of a block of eight cells by a space rotating about a plane". 431.

— Over vijf paren uit eenzelfde bron afgeleide vierdimensionale cellen. 1ste gedeelte. 482.

BOUMAN (Z. P.). Bijdrage tot de kennis der oppervlakken met constante gemiddelde kromming. 537.

BRAAK (C.), J. CLAY en H. KAMERLINGH ONNES. Over het meten van zeer lage temperaturen. XVII. Contrôlebepalingen met den waterstofthermometer en den weerstandsthermometer. 420.

— en H. KAMERLINGH ONNES. Isothermen van twee-atomige gassen en hunne binaire mengsels. VI. Isothermen van waterstof tusschen —104° C. en —217° C. (Vervolg). 162. 411. VII. Isothermen van waterstof tusschen 0° C. en 100° C. 418. VIII. Over de draagkracht van glas en de toepassing van glazen buizen bij metingen onder hoogen druk bij gewone en bij lage temperaturen. 890.

— Over het meten van zeer lage temperaturen. XVIII. Bepaling van het absolute nulpunt volgens den waterstofthermometer van constant volume en herleiding van de aflezingen op den normalen waterstofthermometer tot de absolute schaal. 427. XX. Invloed van de afwijkingen van de wet van Boyle-Charles op de temperatuur, gemeten met de schaal van den gasthermometer van constant volume volgens de waarnemingen met dit werktuig. 690, 817.

BRANCHIOSTOMA LANCEOLATUM (Over den bouw van de gangliencellen in het centraal zenuwstelsel van). 1ste mededeeling. 5.

BRAUNS (D. H.). Over een gekristalliseerd *d*-fructosetetracetaat. 577.

BRUYN (H. E. DE). Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1907. 510.

BUITENZORG (Verslag van de onderzoekingen van Dr. PH. VAN HARREVELD, verricht gedurende zijn verblijf aan het Departement van Landbouw te). 434.

BURCK (W.). Bekrachtiging zijner benoeming tot gewoon lid. 2.

— Dankzegging voor zijne benoeming. 68.

BUYS BALLOT (C. H. D.) — Aanbieding van een portret in gips van —. 562.

BIJTELS (Steenen) van Nieuw Guinea. 824.

CALIBRATIE van eenige platina-weerstandsthermometers. 165.

CARDINAAL (J.). Eenige constructiën afgeleid uit de beweging van een vlak stelsel. 566.

CELLEN (Over vijf paren uit een zelfde bron afgeleide vierdimensionale). 1ste gedeelte. 482.

CHROMOSOMEN (Over een tweemalige reductie van het aantal) bij het ontstaan der geslachtscellen en over de daarop volgende tweemalige bevruchting bij enkele Polytrichum- soorten. 319.

CHYMOSINE (Over de verhouding van pepsine tot). 268.

CLAIJ (J.), C. BRAAK en H. KAMERLINGH ONNES. Over het meten van zeer lage temperaturen. XVII. Contrôlebepalingen met den waterstofthermometer en den weerstandsthermometer. 420.

— en H. KAMERLINGH ONNES. Over het meten van zeer lage temperaturen. XIV. Calibratie van eenige platina-weerstandsthermometers. 165.

— Over de verandering van den weerstand der metalen bij zeer lage temperaturen en den invloed, dien kleine bijmengselen hierop hebben. I. 169.

— Opmerking over de uitzetting van platina bij lage temperaturen. 243.

COL D'OLEN (Verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om bericht omtrent de deelname van Nederland aan de werkzaamheden op het Laboratorium van den). 507. Verslag hierover. 508.

COLOBUS (Die Anatomie des Genus). 504. Verslag hierover. 509.

COMPONENT (Geval dat de eene) een aantrekkingloos gas is met moleculen die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen. (2de Vervolg). 59.

COMPONENTEN (Over het zinken van de gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels voor het geval dat de moleculen van eene der) slechts eene zwakke aantrekking uitoefenen. 233.

— (De intensiteiten der) van door magnetisme gesplitste spectraallijnen. 286.

CONFIGURATIE van KUMMER (De uitbreiding der) op ruimten van $(2p-1)$ afmetingen. 205.

— (Het analogon der) in de ruimte van zeven afmetingen. 457.

CONGRES (9e Internationaal aardrijkskundig). Toezending van het Reglement en Programma. 824.

— (Circulaire van het 3e) international de Botanique in 1910 te Brussel te houden. 824.

— voor poolonderzoek (Verslag over een uitnoodiging van den Belgischen gezant aan de Regeering om zich te doen vertegenwoordigen op een) in Mei 1908 te Brussel te houden. 3.

CONGRES voor poolonderzoek. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken met verzoek te willen berichten. welke personen zijn aan te wijzen als gedelegeerden der Regeering voor het te Brussel te houden). 692.

— Bericht dat de door de Afdeeling voorgedragenen benoemd zijn. 824.

CONSTRUCTIËN (Eenige) afgeleid uit de beweging van een vlak stelsel. 566.

CONTRÔLEBEPALINGEN met den waterstofthermometer en den weerstandsthermometer. 420.

CORPUS CALLOSUM (Over de ontwikkeling van het) in de hersenen van den mensch. 329.

DEGENERATIE (Opstijgende) na gedeeltelijke doorsnijding van het ruggemerg. 350.

DIAGONAAL (Over de doorsnee van het maatpolytoop M_n der ruimte R_n met een centrale ruimte R_{n-1} loodrecht op een). 467.

— (Over de doorsneden van het net der maatpolytopen M_n der ruimte R_n met een ruimte R_{n-1} loodrecht op een). 699.

DIAMANT (Over het kristalstelsel van). 142.

DIEREN (E. VAN). Aanbieding van een boekgeschenk. 248.

Dierkunde. Mededeeling van den Heer J. BOEKE: »Over den bouw van de gangliencellen in het centraal zenuwstelsel van Branchiostoma lanceolatum". (1ste mededeeling). 5.

— Mededeeling van de Heeren J. BOEKE en G. J. DE GROOT over »Physiologische regeneratie van neurofibrillaire eindnetten." 319.

DOCTERS VAN LEEUWEN-REYNVAAN (W. en J.). Over een tweemalige reductie van het aantal chromosomen bij het ontstaan der geslachtscellen en over de daarop volgende tweemalige bevruchting bij enkele Polytrichum soorten. 312.

DUBBELSTER (β Lyrae als). 380.

DULICHIUM VESPIFORME sp. nov (On) from the brick-earth of Tegelen. 898.

EICEL (Over de ontwikkeling van zaadknop, embryozak en) bij de Podostemaceae. 858.

EINDNETTEN (Physiologische regeneratie en neurofibrillaire). 319.

EINTHOVEN (W.). Over een derden hartstoon. 108.

— Verslag over een verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om bericht omtrent de deelname van Nederland aan de werkzaamheden op het Laboratorium op den Col d'Olen. 508.

EINTHOVEN (W.) en W. A. JOLLY. Over de electrische reactie van het oog op lichtprikkels van verschillende intensiteit. 693.

ELDIK THIEME (B. W. VAN). De inwerking van geconcentreerd zwavelzuur op glycerino-esters van verzadigde éénbasische vetzuren. 849.

ELECTRISCHE REACTIE (Over de) van het oog op lichtprikkels van verschillende intensiteit. 693.

ELECTROMAGNETISCHE verschijnselen en de beweging der aarde. 511.

ELECTRONEN-THEORIE (De waarde der zelfinductie volgens de). 867.

ELIAS (G. J.) en H. E. J. G. DU BOIS. De invloed van temperatuur en magnetisatie op selectieve absorptiespectra. 635. II. 749. III. 878.

ELIAS (G. J.), F. LÖWE en H. E. J. G. DU BOIS. Een autocollimatieve spectraaltoestel van groote lichtintensiteit, tevens monochromator. 744.

EMBRYOZAK (Over de ontwikkeling van zaadknop) en eicel bij de Podostemaceae. 858

ENZYMEN (Over een methode om) en pro-enzymen uit de mucosa van het spijsverteeringskanaal te extraheeren en de topische verbreiding er van vast te stellen. 191.

ERRATUM. 178, 246, 305, 431, 505, 563, 822, 900.

ERTSGANGEN (Over) in de provincie Limburg. 69.

ERUPTIEFGESTEENTEN (Bijdrage tot de kennis der oude) en amphiboolschisten aan de rivieren Sëbilit en Tëbaoeng in Centraal Borneo. 690. Verslag hierover. 692.

EVENWICHTEN (Over) in quaternaire stelsels. 843.

EVERDINGEN (E. VAN). Verband tusschen kindersterfte en hooge temperaturen. 274.

EIJKMAN (C.). Bekrachtiging zijner benoeming tot gewoon lid. 2.

— Dankzegging voor zijne benoeming. 2.

FABIUS (G. H.) en H. KAMERLINGH ONNES. Herhaling van de proeven van DE HEEN en TEICHNER omtrent den kritischen toestand. 44.

FERMAT (Inzending van een verzegelde oplossing van het vraagstuk van) door den Heer J. W. N. LE HEUX. 824.

FLORA (The fossil) of Tegelen sur Meuse, near Venloo, in the province of Limburg. (Verslag hierover). 4.

— van Java (Bijdrage No. 1 tot de kennis der). 645. 803.

FRANCHIMONT (A. P. N.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over de vraag naar de mengbaarheid en de vormanalogie bij aromatische Nitro- en Nitrosoverbindingen". 491.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer D. H. BRAUNS: „Over een gekristalliseerd d. fructosetetracetaat". 577.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over de Tri-para-Halogeensubstitutieproducten van het Triphenylmethaan en van het Triphenylcarbinol". 756.

FREQUENTIE-KROMMEN (De analyse van) van de luchttemperatuur. 248.

— (De analyse van) volgens eene algemeene methode. 825.

FRUCTOSE TETRACETAAT (Over een gekristalliseerd d.). 577.

GANGLIENCELLEN (Over den bouw van de) in het centraal zenuwstelsel van Branchiostoma lanceolatum (1ste mededeeling). 5.

GAS (Geval dat de eene component een aantrekkingloos) is met moleculen die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen. (2de vervolg). 59.

GASPHASE (Over het zinken van de) in de vloeistofphase bij binaire mengsels voor het geval dat de moleculen van eene der componenten slechts eene zwakke aantrekking uitoefenen. 233.

GASSEN (Beperkte mengbaarheid van twee). 59.

— (Isothermen van twee-atomige) en hunne binaire mengsels. VI. Isothermen van waterstof tusschen — 104° C. en — 217° C. (Vervolg). 162, 411. VII. Isothermen van waterstof tusschen 0° C. en 100° C. 418. VIII. Over de draagkracht van glas en de toepassing van glazen buizen bij metingen onder hoogen druk bij gewone en bij lage temperaturen. 890.

— (Isothermen van één-atomige) en hunne binaire mengsels. I. Isothermen van helium tusschen + 100° C. en — 217° C. 430. 495. Isothermen van helium bij ongeveer — 252° C. en — 259° C. 690, 815.

GASTHERMOMETER (Invloed van de afwijkingen van de wet van Boyle-Charles op de temperatuur, gemeten met de schaal van den) van constant volume volgens de waarnemingen met dit werktuig. 690, 817.

GEOLOGICAL SOCIETY te Londen (Verslag van den Heer G. A. F. MOLENGRAAFF over de feestelijke viering van het honderdjarig bestaan van de). 504.

— Dankzegging voor de betoonde belangstelling bij gelegenheid van het 100-jarig bestaan. 566.

GEOLOGISCHE COMMISSIE (Jaarverslag der) over het jaar 1907. 510.

— Bericht van den Minister van Waterstaat dat op de betaling van het subsidie voor het loopende jaar voor de kosten van geologische onderzoekingen orde gesteld is. 566.

Geophysica. Verslag over een missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken, betreffende een uitnoodiging van den Belgischen gezant aan de Regeering om zich te doen vertegenwoordigen op een Congres voor poolonderzoek in Mei 1908 te Brussel te houden. 3.

— Mededeeling van den Heer W. VAN BEMMELEN: „Aardstroomregistratie te Batavia tot onderzoek van het verband tusschen aardstroom en aardmagnetische kracht". 435, 737.

— Mededeeling van den Heer W. VAN BEMMELEN: „De beginstoot van magnetische storingen". 728.

— Mededeeling van den Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN: „Omtrent de hoogte van den gemiddelden zeestand in het IJ voor Amsterdam van 1700—1860". 766.

— Mededeeling van den Heer J. P. VAN DER STOK: „De analyse van frequentiekrommen volgens eene algemeene methode". 825.

GESLACHT twee (Over ruimtekrommen van het). 671.

GESLACHTSCELLEN (Over een tweemalige reductie van het aantal chromosomen bij het ontstaan der) en over de daarop volgende tweemalige bevruchting bij enkele Polytrichum-soorten. 312.

GEUNS (VAN) (Over de constitutie van het oxymethyldinitro-benzonitril van). 512.

GEURVERWANTSCHAPPEN (OVER). 183.

GEWIN (J. W. A.) (Over een onderzoek van den Heer), aangaande de verhouding van pepsine tot chymosine. 268.

GLAS (Over de draagkracht van) en de toepassing van glazen buizen bij metingen onder hoogen druk bij gewone en bij lage temperaturen. 890.

GLYCERINE-ESTERS (De inwerking van geconcentreerd zwavelzuur op) van verzadigde éénbasische vetzuren. 849.

GNETUM GNEMON L. (Over den invloed van wondprikkels op de vorming van adventieve knoppen in de bladeren van). 93.

GODEAUX (LUCIEN). Le théorème de GRASSMANN dans l'espace à *n* dimensions. 213.

GOLFLENGTE (Verandering van) van de middelste lijn van tripletten in een magnetisch veld (1ste gedeelte). 618. (2de gedeelte). 855.

GRASSMANN (Le théorème de) dans l'espace à *n* dimensions. 213.

GRONINGEN (Verzoek om advies van den Minister van Binnenlandsche Zaken betreffende de aanleg eener electrische tram nabij het Natuurkundig Laboratorium te). 308. Verslag hierover. 308.

GROOT (G. J. DE) en J. BOEKE. Physiologische regeneratie van neurofibrillaire eindnetten. 319.

HAAR (Is rood) een nuance of een variëteit? 260.

HALOGEENSUBSTITUTIE-PRODUCTEN (Over de analogie in kristalvorm bij de) van koolwaterstoffen met open koolstofketen. 514.

— (Over de Tri-para-) van het Triphenylmethaan en van het Triphenylcarbinol. 756.

HAMBURGER (H. J.). Over een methode om enzymen en pro-enzymen uit de mucosa van het spijsverteeringskanaal te extraheeren en de topische verbreiding er van vast te stellen. 191.

— Verslag over een verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om bericht omtrent de deelname van Nederland aan de werkzaamheden op het Laboratorium op den Col d'Olen. 508.

— Een methode van koude injectie van organen voor histologische doeleinden. 801.

HAMBURGER (H. J.). en E. HEKMA. Over Phagocytose. 71.

HARREVELD (PH. VAN). Verslag van de onderzoekingen verricht gedurende het verblijf aan het Departement van Landbouw te Buitenzorg. 434.

HARTSTOON (Over een derden). 108.

HEEN (DE) en TEICHNER (Herhaling van de proeven van) omtrent den kritischen toestand. 44.

HEKMA (E.) en H. J. HAMBURGER. Over Phagocytose. 71.

HELIUM (Isothermen van) tusschen + 100° C. en — 217° C. 430, 495.

— (Isothermen van) bij — 252° C. en — 259° C. 690, 815.

— (Afleiding van den spanningscoëfficient van) voor den internationalen heliumthermometer en herleiding van de aflezingen op den heliumthermometer tot de absolute schaal. 430, 501.

— (Over proeven ter verdichting van het) door expansie. 819.

HELIUMTHERMOMETER (Afleiding van den spanningscoëfficient van helium voor den internationalen) en herleiding van de aflezingen op den heliumthermometer tot de absolute schaal. 430, 501.

HERSENEN (Over de ontwikkeling van het Corpus Callosum in de) van den mensch. 329.

Histologie. Mededeeling van den Heer H. J. HAMBURGER: „Een methode van koude injectie van organen voor histologische doeleinden". 801.

HESTIA-TYPUS (Over periodieke banen van den). 35.

HEUX (J. W. N. LE). Inzending eener verzegelde oplossing van het vraagstuk van FERMAT. 824.

HOLLEMAN (A. F.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. BLANKSMA: „Over de constitutie van het oxymethyldinitro-benzonitril van VAN GEUNS". 512.

HOOGEWERFF (S.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer R. A. WEERMAN: „Inwerking van kaliumhypochloriet op kaneelzuuramide" (2de mededeeling). 303.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. P. H. TRIVELLI: „Bijdrage tot de kennis van het solarisatie-verschijnsel en van verdere eigenschappen van het latente beeld". 773.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer B. W. VAN ELDIK THIEME: „De inwerking van geconcentreerd zwavelzuur op glycerine-esters van verzadigde éénbasische vetzuren". 849.

HUIDVERZORGING (Over segmentale) door het sympathische zenuwstelsel bij gewervelde dieren, op grond van proefondervindelijke onderzoekingen over de zenuwverzorging der kleurstofcellen bij platvisschen en der haarbewegende spieren bij katten. 290.

INJECTIE (Een methode van koude) van organen voor histologische doeleinden. 801.

INTEGRAAL (Over een oneindig produkt, voorgesteld door een bepaalde). 325.

ISOTHERMEN van twee-atomige gassen en hunne binaire mengsels. VI. Isothermen van waterstof tusschen — 104° C. en — 217° C. (Vervolg). 162, 411. VII. Isothermen van waterstof tusschen 0° C. en 100° C. 418. VIII. Over de draagkracht van glas en de toepassing van glazen buizen bij metingen onder hoogen druk bij gewone en bij lage temperaturen. 890.

— van één-atomige gassen en hunne binaire mengsels. I. Isothermen van helium tusschen + 100° C. en — 217° C. 430, 495. II. Isothermen van helium bij ongeveer — 252° C. en — 259° C. 690, 815.

JAEGER (F. M.). Over de vraag naar de mengbaarheid en de vormanalogie bij aromatische nitro- en nitroso-verbindingen. 491.

— Over de analogie in kristalvorm bij de halogeensubstitutieproducten van koolwaterstoffen met open koolstofketen. 514.

— Over de Tri-para-Halogeen-Substitutieproducten van het Triphenylmethaan en van het Triphenylcarbinol. 756.

JAVA (Bijdrage N°. 1 tot de kennis der Flora van). 645. 803.

JOLLY (W. A.) en W. EINTHOVEN. Over de electrische reactie van het oog op lichtprikkels van verschillende intensiteit. 693.

JULIUS (W. H.). Verslag over een missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken betreffende den aanleg eener electrische tram in Groningen nabij het Natuurkundig Laboratorium. 308.

JUPITER (Over de massa's en de baanelementen der satellieten van). 579, 709.

JUPITERSATELLIETEN (Over enkele punten uit de theorie der). 110.

KALIUMHYPOCHLORIET (Inwerking van) op kaneelzuuramide (2de mededeeling). 303.

KAMERLINGH ONNES (H.). Verslag over een missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken betreffende den aanleg eener electrische tram in Groningen nabij het Natuurkundig Laboratorium. 308.

— Isothermen van één-atomige gassen en hunne binaire mengsels. I. Isothermen van helium tusschen + 100° C. en — 217° C. 430, 495. II. Isothermen van helium bij ongeveer — 252° C. en — 259°. 690, 815.

— Over het meten van zeer lage temperaturen. XIX. Afleiding van den spanningscoëfficient van helium voor den internationalen heliumthermometer en herleiding van de aflezingen op den heliumthermometer tot de absolute schaal. 430, 501.

— De verdichting van helium. 690, 818.

— Over proeven ter verdichting van het helium door expansie. 819.

KAMERLINGH ONNES (H.) en JEAN BECQUEREL. De absorptiespectra van de verbindingen der zeldzame aarden bij de temperaturen, die met vloeibare waterstof te bereiken zijn, en hunne verandering door het magnetische veld. 678.

KAMERLINGH ONNES (H). en C. BRAAK. Isothermen van twee-atomige gassen en hunne binaire mengsels. VI. Isothermen van waterstof tusschen —104° C. en —217° C. (Vervolg). 162, 411. VII. Isothermen van waterstof tusschen 0° C. en 100° C. 418. VIII. Over de draagkracht van glas en de toepassing van glazen buizen bij metingen onder hoogen druk bij gewone en bij lage temperaturen. 890.

— Over het meten van zeer lage temperaturen. XVIII. Bepaling van het absolute nulpunt volgens den waterstofthermometer van constant volume en herleiding van de aflezingen op den normalen waterstofthermometer tot de absolute schaal. 427. XX. Invloed van de afwijkingen van de wet van Boyle-Charles op de temperatuur, gemeten met de schaal van den gasthermometer van constant volume volgens de waarnemingen met dit werktuig. 690, 817.

KAMERLINGH ONNES (H.), C. BRAAK en J. CLAY. Over het meten van zeer lage temperaturen. XVII. Contrôlebepalingen met den waterstofthermometer en den weerstandsthermometer. 420.

KAMERLINGH ONNES (H.) en J. CLAY. Over het mete van zeer lage temperaturen. XIV. Calibratie van eenige platina-weerstandsthermometers. 165.

— Over de verandering van den weerstand der metalen bij zeer lage temperaturen en den invloed, dien kleine bijmengselen hierop hebben. I. 169.

— Opmerking over de uitzetting van platina bij lage temperaturen. 243.

KAMERLINGH ONNES (H.) en G. H. FABIUS. Herhaling van de proeven van DE HEEN en TEICHNER omtrent den kritischen toestand. 44.

KAMERLINGH ONNES (H.) en W. H. KEESOM. Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS. XV. Geval dat de eene component een aantrekkingloos gas is met moleculen die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen. (2de Vervolg). 59. XVI. Over het zinken van de gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels voor het geval dat de moleculen van eene der componenten slechts eene zwakke aantrekking uitoefenen. 233.

— (Iets naar aanleiding der laatste opmerkingen van Prof.). 136.

— Over de toestandsvergelijking van eene stof in de nabijheid van het kritisch punt vloeistof-gas. I. De storingsfunctie in de nabijheid van den kritischen toestand. 659. II. Spectrophotometrisch onderzoek van de opalescentie van eene stof in de nabijheid van den kritischen toestand. 667.

KANEELZUURAMIDE (Inwerking van kaliumhypochloriet op). (2de mededeeling). 303.

KAPTEIJN (J. C.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer W. DE SITTER: „Over periodieke banen van den Hestia-typus". 35.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer W. DE SITTER: „Over de massa's en de baanelementen der satellieten van Jupiter." 579, 709.

— Over de gemiddelde stersdichtheid op verschillenden afstand van het zonnestelsel. 600.

KAPTEIJN (W.). Over een oneindig produkt, voorgesteld door een bepaalde integraal. 325:

— Over vermenigvuldiging van trigonometrische reeksen. 571.

KATTEN (Over segmentale huidverzorging door het sympathische zenuwstelsel bij gewervelde dieren, op grond van proefondervindelijke onderzoekingen over de zenuwverzorging der kleurstofcellen bij platvisschen en der haarbewegende spieren bij). 290.

KERSOM (W. H.) en H. KAMERLINGH ONNES. Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS. XV. Geval dat de eene component een aantrekkingloos gas is met moleculen die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen. 2de Vervolg. 59. XVI. Over het zinken van de gasphase in de vloeistof-phase bij binaire mengsels voor het geval dat de moleculen van eene der componenten slechts eene zwakke aantrekking uitoefenen. 233.

— (Iets naar aanleiding der laatste opmerkingen van Dr.). 136.

— Over de toestandsvergelijking van eene stof in de nabijheid van het kritisch punt vloeistof-gas. I. De storingsfunctie in de nabijheid van den kritischen toestand. 659. II. Spectrophotometrisch onderzoek van de opalescentie van eene stof in de nabijheid van den kritischen toestand. 667.

KELVIN (Lord). Zie THOMSON (WILLIAM).

KINDERSTERFTE (Verband tusschen) en hooge temperaturen. 274.

KLEURSTOFCELLEN (Over segmentale huidverzorging door het sympathische zenuwstelsel bij gewervelde dieren, op grond van proefondervindelijke onderzoekingen over de zenuwverzorging der) bij platvisschen en der haarbewegende spieren bij katten. 290.

KLUIJVER (J. C.). Over het cyclische minimaalvlak. 550.

KNOPPEN (Over den invloed van wondprikkels op de vorming van adventieve) in de bladeren van Gnetum Gnemon L. 93.

KONIJN (Over den centralen loop van den nervus octavus en zijn invloed op de beweging bij het). 68.

KOOLWATERSTOFFEN (Over de analogie in kristalvorm bij de halogeensubstitutieprodukten van) met open koolstofketen. 514.

KOORDERS (S. H.). Aanbieding eener verhandeling: „Botanische Untersuchungen über einige in Java vorkommende Pilze, besonders über Blätter bewohnende, parasitisch auftretende Arten". 177.

— Bijdrage No. 1. tot de kennis der Flora van Java. 645, 803.

KORTEWEG (D. J.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. A. BARRAU: „De uitbreiding der configuratie van KUMMER op ruimten van $(2p-1)$ afmetingen". 205.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. A. BARRAU: „Het analogon der Cf. van KUMMER in de ruimte van zeven afmetingen". 457.

— Bekrachtiging zijner benoeming tot Onder-Voorzitter. 824.

KOSTER (W.). Bericht van overlijden. 180.

KRISTALLEN (Over de scheeve uitdooving van rhombische). 362.

Kristallografie. Mededeeling van den Heer A. L. W. E. VAN DER VEEN: „Over het kristalstelsel van diamant". 142.

— Mededeeling van den Heer W. VOIGT: „Ueber die krystallographisch zulässigen Zähligkeiten der Symmetrieaxen". 406.

— Mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over de analogie in kristalvorm bij de halogeensubstitutieprodukten van koolwaterstoffen met open koolstofketen". 514.

KRISTALSTELSEL van diamant (Over het). 142.

KRISTALVORM (Over de analogie in) bij de halogeensubstitutieprodukten van koolwaterstoffen met open koolstofketen. 514.

KRITISCH PUNT vloeistof-gas (Over de toestandsvergelijking van eene stof in de nabijheid van het) I. De storingsfunctie in de nabijheid van den kritischen toestand. 659. II. Spectrophotometrisch onderzoek van de opalescentie van eene stof in de nabijheid van den kritischen toestand. 667.

KRITISCHEN TOESTAND (Herhaling van de proeven van DE HEEN en TEICHNER omtrent den). 44.

— (De storingsfunctie in de nabijheid van den). 659.

— (Spectrophotometrisch onderzoek van de opalescentie van eene stof in de nabijheid van den). 667.

KROMMING (Bijdrage tot de kennis der oppervlakken met constante gemiddelde). 537.

KUMMER (De uitbreiding der configuratie van) op ruimten van ($2p$-1) afmetingen. 205.

— (Het analogon der configuratie van) in de ruimte van zeven afmetingen. 457.

LAAR (J. J. VAN) Iets naar aanleiding der laatste opmerkingen van Prof. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. W. H. KEESOM. 136.

LANGE (S. J. DE). Opstijgende degeneratie na gedeeltelijke doorsnijding van het ruggemerg. 350.

LANGELAAN (J. W.). Over de ontwikkeling van het Corpus Callosum in de hersenen van den mensch. 329.

LATENTE BEELD (Bijdrage tot de kennis van het solarisatie-verschijnsel en van verdere eigenschappen van het). 773.

LEERSUM (E. C. VAN). Dankzegging voor de medewerking verleend bij de inrichting van de geschiedkundige tentoonstelling van het Natuur- en Geneeskundig Congres. 8.

LEI en Schist (Over de termen Schalie,). 463.

LELY (C.) Verslag over een uitnoodiging van den Belgischen Gezant aan de Regeering om zich te doen vertegenwoordigen op een Congres voor poolonderzoek in Mei 1908 te Brussel te houden. 3.

— Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1907. 510.

LICHTINTENSITEIT (Een autocollimatieve spectraaltoestel van groote), tevens monochromator. 744.

LICHTPRIKKELS (Over de electrische reactie van het oog op) van verschillende intensiteit. 693.

LIMBURG (Over ertsgangen in de provincie). 69.

LINDENBERG (Kön. preuss. Aeronautisch Observatorium te). Verzoek om steun tot oprichting van een of meer aerologische stations in Nederlandsch Indië. 248.

LINNAEUS (CAR.) — Dankzegging van de Universiteit te Upsala voor de ontvangen gelukwenschen bij gelegenheid van de herdenking van den 200sten geboortedag van —. 68.

— (Verslag van den Heer J. W. MOLL over zijn reis naar Zweden bij gelegenheid van de herdenking van den 200sten geboortedag van). 68.

— Dankzegging van de Kon. Akademie van Wetenschappen te Stockholm voor de betoonde belangstelling bij gelegenheid van de herdenking van den 200sten geboortedag van —. 179.

LORENTZ (H. A.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Iets naar aanleiding der laatste opmerkingen van Prof. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. W. H. KEESOM". 136.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer O. POSTMA: „Beweging van molecuul-systemen waarop geen uitwendige krachten werken". 332.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer W. VOIGT: „Ueber die krystallographisch zulässigen Zähligkeiten der Symmetrieaxen". 406.

— Electromagnetische verschijnselen en de beweging der aarde. 511.

LÖWE (F.), H. E. J. G. DU BOIS en G. J. ELIAS. Een autocollimatieve spectraaltoestel van groote lichtintensiteit, tevens monochromator. 744.

LUCHTTEMPERATUUR (De analyse van frequentie-krommen van de). 248.

LUPEOL (Over het). 300.

β LYRAE als dubbelster. 380.

MAATPOLYTOOP M_n (Over de doorsnee van het) der ruimte R_n met een centrale ruimte R_{n-1} loodrecht op een diagonaal. 467.

MAATPOLYTOPEN M_n (Over de doorsneden van het net der) der ruimte R_n met een ruimte R_{n-1} loodrecht op een diagonaal. 699.

MAGNETISATIE (De invloed van temperatuur en) op selectieve absorptiespectra. 635. II. 749. III. 878.

MAGNETISCHE SPLITSING der spectraallijnen en veldsterkte. 2de gedeelte. 354.

— (Waarneming van de) der spectraallijnen met de methode van FABRY en PEROT. 486.

MAGNETISCHE STORINGEN (De beginstoot van). 728.

MAGNETISCHE VELD (De absorptiespectra van de verbindingen der zeldzame aarden bij de temperaturen, die met vloeibare waterstof te bereiken zijn, en hunne verandering door het). 678.

— (Verandering van golflengte van de middelste lijn van tripletten in een). 1ste gedeelte. 618. 2de gedeelte. 855.

MAGNETISME (De intensiteiten der componenten van door) gesplitste spectraallijnen. 286.

— (Nieuwe waarnemingen over asymmetrisch door) gesplitste tripletten. 610.

MARTIN (K.). Verslag over eene verhandeling van den Heer CLEMEND REID en Mrs. ELEANOR M. REID. 4.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer P. TESCH: „Beschouwingen over het Staringsche zanddiluvium". 123.

— Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1907. 510.

MENGBAARHEID (Beperkte) van twee gassen. 59.

— (Over de vraag naar de) en de vorm-analogie bij aromatische Nitro- en Nitroso-verbindingen. 491.

MENGSELS (Bijdrage tot de theorie der binaire). IV. 12. V. 143. VI. 216.

— (Isothermen van twee-atomige gassen en hunne binaire). VI. Isothermen van waterstof tusschen —104° C. en —217° C. (Vervolg). 162, 411. VII. Isothermen van waterstof tusschen 0° C. en 100° C. 418. VIII. Over de draagkracht van glas en de toepassing van glazen buizen bij metingen onder hoogen druk bij gewone en bij lage temperaturen. 890.

MENGSELS (Over het zinken van de gasphase in de vloeistofphase bij binaire) voor het geval dat de moleculen van eene der componenten, slechts eene zwakke aantrekking uitoefenen. 233.

— (Isothermen van één-atomige gassen en hunne binaire). I. Isothermen van helium tusschen + 100° C. en —217° C. 430, 495. II. Isothermen van helium bij ongeveer — 252° C. en — 259° C. 690, 815.

METALEN (Over de verandering van den weerstand der) bij zeer lage temperaturen en den invloed, dien kleine bijmengselen hierop hebben. I. 169.

METEN (Over het) van zeer lage temperaturen. XVI. Calibratie van eenige platina-weerstandsthermometers. 165. XVII. Contrôlebepalingen met den waterstofthermometer en den weerstandsthermometer. 420. XVIII. Bepaling van het absolute nulpunt volgens den waterstofthermometer van constant volume en herleiding van de aflezingen op den normalen waterstofthermometer tot de absolute schaal. 427. XIX. Afleiding van den spanningscoëfficient van helium voor den internationalen heliumthermometer en herleiding van de aflezingen op den heliumthermometer tot de absolute schaal. 430, 501. XX. Invloed van de afwijkingen van de wet van Boyle-Charles op de temperatuur, gemeten met de schaal van den gasthermometer van constant volume volgens de waarnemingen met dit werktuig. 690, 817.

Meteorologie. Mededeeling van den Heer J. P. VAN DER STOK: „De analyse van frequentie-krommen van de luchttemperatuur". 248.

METHODE van FABRY en PEROT (Waarneming van de magnetische splitsing der spectraallijnen met de). 486.

— (Een) van koude injectie van organen voor histologische doeleinden. 801.

METINGEN onder hoogen druk (Over de draagkracht van glas en de toepassing van glazen buizen bij) bij gewone en bij lage temperaturen. 890.

MINIMAALVLAK (Over het cyclische). 550.

MINISTER van Binnenlandsche Zaken (Bericht van den) dat H. M. de Koningin bekrachtigd heeft de benoeming van de Heeren W. BURCK en C. EYKMAN tot gewone leden en van de Heeren W. C. RÖNTGEN, H. E. J. G. DU BOIS, J. P. PAWLAW en EDM. B. WILSON tot buitenlandsche leden. 2.

— Verzoek om bericht over een door den Heer H. M. BERNELOT MOENS gedaan verzoek om ondersteuning voor wetenschappelijke onderzoekingen. 2.

— Verslag over een uitnoodiging van den Belgischen Gezant aan de Regeering om zich te doen vertegenwoordigen op een congres voor poolonderzoek in Mei 1908 te Brussel te houden. 3.

— Verzoek om advies betreffende den aanleg eener electrische tram in Groningen nabij het terrein van het Natuurkundig Laboratorium. 308. Verslag hierover. 308.

— Verzoek om bericht en raad omtrent deelname van Nederland aan het Physiologisch Laboratorium op den Col d'Olen bij de Monte Rosa. 507. Verslag hierover. 508.

— Verzoek te willen berichten, welke personen zouden zijn aan te wijzen als gedelegeerden en plaatsvervangende gedelegeerden der Nederlandsche regeering bij het in de maand Mei te Brussel te houden Congres voor poolonderzoek. 692.

MINISTER van Binnenlandsche Zaken. Bericht dat de benoemingen van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUIJZEN en D. J. KORTEWEG tot Voorzitter en Ondervoorzitter door H. M. de Koningin zijn bekrachtigd. 824.

— Bericht dat de door de Akademie voorgedragenen tot gedelegeerden der regeering zijn benoemd op het te Brussel te houden Congres voor poolonderzoek. 824.

— Toezending van het Reglement voor het 9e Internationaal aardrijkskundig Congres. 824.

MINISTER van Waterstaat. Bericht dat op de betaling van het subsidie voor de kosten van geologische onderzoekingen orde gesteld is. 566.

MOENS (H. M. BERNELOT). Zie BERNELOT MOENS (H. M.).

MOLECUUL-SYSTEMEN (Beweging van) waarop geen uitwendige krachten werken. 332.

MOLENGRAAFF (G. A. F.). Verslag over eene verhandeling van den Heer CLEMEND REID en Mrs. ELEANOR M. REID. 4.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. L. W. E VAN DER VEEN: „Over het kristalstelsel van diamant". 142.

— Verslag over de feestelijke viering van het honderdjarig bestaan van de Geological Society te Londen. 504.

— Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1907. 510.

— Aanbieding eener verhandeling van den Heer J. SCHMUTZER: „Bijdrage tot de kennis der oude eruptiefgesteenten en amphiboolschisten aan de rivieren Sĕbilit en Tĕbaoeng in Centraal Borneo". 690. Verslag hierover. 692.

— On Dulichium vespiforme sp. nov. from the brick-earth of Tegelen. 898.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer CLEMEND REID en Mrs. ELEANOR M. REID."

MOLL (J. W.). Verslag over zijn reis naar Zweden bij gelegenheid van de herdenking van den 200sten geboortedag van Carl. Linnaeus. 68.

MONOCHROMATOR (Een autocollimatieve spectraaltoestel van groote lichtintensiteit, tevens). 744.

MUCOSA van het spijsverteeringskanaal (Over een methode om enzymen en pro-enzymen uit de) te extraheeren en de topische verbreiding er van vast te stellen. 191.

MUSKONGEUR (De adsorptie van) tegen vlakten van verschillend materiaal. 31, 139.

Natuurkunde. Mededeeling van den Heer J. D. VAN DER WAALS: „Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels". IV. 12. V. 143. VI. 216.

— Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en G. H. FABIUS: „Herhaling van de proeven van DE HEEN en TEICHNER omtrent den kritischen toestand". 44.

— Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en W. H. KEESOM: „Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS. XV. Geval dat de eene component een aantrekkingloos gas is met moleculen die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen". (2de Vervolg). 59. XVI. Over het zinken van de gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels voor het geval dat de molekulen van eene der componenten slechts eene zwakke aantrekking uitoefenen". 233.

— Mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Iets naar aanleiding der laatste opmerkingen van Prof. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. W. H. KEESOM". 136.

Natuurkunde. Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „Isothermen van twee-atomige gassen en hunne binaire mengsels. VI. Isothermen van waterstof tusschen —104° C. en —217° C. Vervolg. 162. 411. VII. Isothermen van waterstof tusschen 0° C. en 100° C. 418. VIII. Over de draagkracht van glas en de toepassing van glazen buizen bij metingen onder hoogen druk bij gewone en bij lage temperaturen." 890.

— Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en J. CLAY: „Over het meten van zeer lage temperaturen. XIV. Calibratie van eenige platina-weerstandsthermometers". 165.

— Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en J. CLAY: „Over de verandering van den weerstand der metalen bij zeer lage temperaturen en den invloed, dien kleine bijmengselen hierop hebben". I. 169.

— Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en J. CLAY: „Opmerking over de uitzetting van platina bij lage temperaturen". 243.

— Mededeeling van den Heer P. ZEEMAN: „De intensiteiten der componenten van door magnetisme gesplitste spectraallijnen". 286.

— Mededeeling van den Heer O. POSTMA: „Beweging van molecuul-systemen waarop geen uitwendige krachten werken". 332.

— Mededeeling van den Heer P. ZEEMAN: „Magnetische splitsing der spectraallijnen en veldsterkte." 2de gedeelte. 354.

— Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES, C. BRAAK en J. CLAY: „Over het meten van zeer lage temperaturen. XVII. Contrôlebepalingen met den waterstofthermometer en den weerstandsthermometer." 420.

— Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „Over het meten van zeer lage temperaturen. XVIII. Bepaling van het absolute nulpunt volgens den waterstofthermometer van constant volume en herleiding van de aflezingen op den normalen waterstofthermometer tot de absolute schaal." 427.

— Mededeeling van den Heer H. KAMERLINGH ONNES: „Isothermen van één-atomige gassen en hunne binaire mengsels. I. Isothermen van helium tusschen +100° C. en —217° C. 430, 495. II. Isothermen van helium bij ongeveer —253° C. en —259°." 690, 815.

— Mededeeling van den Heer H. KAMERLINGH ONNES: „Over het meten van zeer lage temperaturen. XIX. Afleiding van den spanningscoëfficient van helium voor den internationalen heliumthermometer en herleiding van de aflezingen op den heliumthermometer tot de absolute schaal". 430, 501.

— Mededeeling van den Heer P. ZEEMAN: „Waarneming van de magnetische splitsing der spectraallijnen met de methode van FABRY en PEROT". 486.

— Mededeeling van den Heer H. A. LORENTZ: „Electromagnetische verschijnselen en de beweging der aarde". 511.

— Mededeeling van den Heer P. ZEEMAN: „Nieuwe waarnemingen over asymmetrisch door magnetisme gesplitste tripletten". 610.

— Mededeeling van den Heer P. ZEEMAN: „Verandering van golflengte van de middelste lijn van tripletten in een magnetisch veld". 1ste gedeelte. 618. 2de gedeelte. 855.

Natuurkunde. Mededeeling van de Heeren H. E. J. G. DU BOIS en G. J. ELIAS: „De invloed van temperatuur en magnetisatie op selectieve absorptiespectra". 635. II. 749. III. 878.

— Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en W. H. KEESOM: „Over de toestandsvergelijking van eene stof in de nabijheid van het kritisch punt vloeistof-gas. I. De storingsfunctie in de nabijheid van den kritischen toestand. 659. II. Spectrophotometrisch onderzoek van de opalescentie van eene stof in de nabijheid van den kritischen toestand." 667.

— Mededeeling van de Heeren JEAN BECQUEREL en H. KAMERLINGH ONNES: „De absorptiespectra van de verbindingen der zeldzame aarden bij de temperaturen, die met vloeibare waterstof te bereiken zijn, en hunne verandering door het magnetische veld". 678.

— Mededeeling van den Heer H. KAMERLINGH ONNES: „Over de verdichting van Helium". 690, 818.

— Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „Over het meten van zeer lage temperaturen. XX. Invloed van de afwijkingen van de wet van Boyle-Charles op de temperatuur, gemeten met de schaal van den gasthermometer van constant volume volgens de waarnemingen met dit werktuig." 690, 817.

— Mededeeling van de Heeren H. E. J. G. DU BOIS, G. J. ELIAS en F. LÖWE: „Een autocollimatieve spectraaltoestel van groote lichtintensiteit, tevens monochromator". 744.

— Mededeeling van den Heer A. P. H. TRIVELLI: „Bijdrage tot de kennis van het solarisatie-verschijnsel en van verdere eigenschappen van het latente beeld". 773.

— Mededeeling van den Heer H. KAMERLINGH ONNES: „Over proeven ter verdichting van het helium door expansie." 819.

— Mededeeling van den Heer J. D. VAN DER WAALS jr.: „De waarde der zelfinductie volgens de electronen-theorie". 867.

NATUURKUNDIG LABORATORIUM te Groningen (Verzoek om advies van den Minister van Binnenlandsche Zaken betreffende den aanleg eener electrische tram nabij het). 308. Verslag hierover. 308.

NERVUS OCTAVUS (Over den centralen loop van den) en zijn invloed op de beweging bij het konijn. 68.

NETTEN (Over vierdimensionale) en hun ruimtedoorsneden. 1ste gedeelte. 526. 2de gedeelte. 623.

NIEUW GUINEA (Steenen bijtels van). 824.

NITRO- en Nitroso-verbindingen (Over de vraag naar de mengbaarheid en de vormanalogie bij aromatische). 491.

NULPUNT (Bepaling van het absolute) volgens den waterstofthermometer van constant volume en herleiding van de aflezingen op den normalen waterstofthermometer tot de absolute schaal. 427.

ONNES (H. KAMERLINGH.). Zie KAMERLINGH ONNES (H.).

OOG (Over de electrische reactie van het) op lichtprikkels van verschillende intensiteit. 693.

OPALESCENTIE (Spectrophotometrisch onderzoek van de) van eene stof in de nabijheid van den kritischen toestand. 667.

OPPERVLAKKEN (Bijdrage tot de kennis der) met constante gemiddelde kromming. 537.

OXYMETHYLDINITRO-BENZONITRIL van VAN GEUNS (Over de constitutie van het). 512.

Palaeontologie. Verslag over eene verhandeling van den Heer CLEMEND REID en Mrs. ELEANOR M. REID: „The fossil flora of Tegelen sur Meuse, near Venloo, in the province of Limburg." 4.

— Mededeeling van den Heer CLEMEND REID en Mrs. ELEANOR M. REID: „On Dulichium vespiforme sp. nov. from the brick-earth of Tegelen." 898.

PAREN (Over vijf) uit een zelfde bron afgeleide vierdimensionale cellen. 1ste gedeelte. 482

PAWLOW (J. P.). Bekrachtiging zijner benoeming tot buitenlandsch lid. 2.

— Dankzegging voor zijne benoeming. 68.

PEKELHARING (C. A.). Over een onderzoek van den Heer J. W. A. GEWIN, aangaande de verhouding van pepsine tot chymosine. 268.

PENTA-ERYTHRIETTETRAFORMIAAT (Over de ontleding van) bij verhitting. 137.

PEPSINE (Over de verhouding van) tot chymosine. 268.

PHAGOCYTOSE (Over). 71.

Physiologie. Mededeeling van den Heer H. ZWAARDEMAKER: „De adsorptie van muskongeur tegen vlakten van verschillend materiaal". 31. 139.

— Mededeeling van den Heer C. WINKLER: „Over den centralen loop van den nervus octavus en zijn invloed op de beweging bij het konijn". 68.

— Mededeeling van de Heeren H. J. HAMBURGER en E. HEKMA over „Phagocytose". 71.

— Mededeeling van den Heer W. EINTHOVEN: „Over een derden hartstoon". 108.

— Mededeeling van den Heer H. ZWAARDEMAKER: „Over geurverwantschappen". 183.

— Mededeeling van den Heer H. J. HAMBURGER: „Over eene methode om enzymen en pro-enzymen uit de mucosa van het spijsverteeringskanaal te extraheeren en de topische verbreiding er van vast te stellen". 191.

— Mededeeling van den Heer C. A. PEKELHARING: „Over een onderzoek van den Heer J. W. A. GEWIN, aangaande de verhouding van pepsine tot chymosine". 268.

— Mededeeling van den Heer G. VAN RIJNBERK: „Over segmentale huidverzorging door het sympathische zenuwstelsel bij gewervelde dieren, op grond van proefondervindelijke onderzoekingen over de zenuwverzorging der kleurstofcellen bij platvisschen en der haarbewegende spieren bij katten". 290.

— Mededeeling van de Heeren W. EINTHOVEN en W. A. JOLLY: „Over de electrische reactie van het oog op lichtprikkels van verschillende intensiteit". 693.

PHYSIOLOGISCH LABORATORIUM op den Col d' Olen bij de Monte Rosa (Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken om bericht en raad omtrent de deelname van Nederland aan het). 507. Verslag hierover. 508.

PILZE (Botanische Untersuchungen über einige in Java vorkommende), besonders über Blätter bewohnende, parasitisch auftretende Arten. 177.

PLACE (T.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. W. LANGELAAN: „Over de ontwikkeling van het Corpus Callosum in de hersenen van den mensch". 329.

Plantkunde. Mededeeling van den Heer J. VAN BEUSEKOM: „Over den invloed van wondprikkels op de vorming van adventieve knoppen in de bladeren van Gnetum Gnemon L". 93.

— Aanbieding eener verhandeling van den Heer S. H. KOORDERS: „Botanische Untersuchungen über einige in Java vorkommende Pilze, besonders über Blätter bewohnende, parasitisch auftretende Arten." Abschnitt II—V. 177.

Plantkunde. Mededeeling van den Heer en Mevr. W. en J. DOCTERS VAN LEEUWEN-REYNVAAN: „Over een tweemalige reductie van het aantal Chromosomen bij het ontstaan der geslachtscellen en over de daarop volgende tweemalige bevruchting bij enkele Polytrichum soorten". 312.

— Verslag van de onderzoekingen door Dr. PH. VAN HARREVELD verricht gedurende zijn verblijf aan het Departement van Landbouw te Buitenzorg. 434.

— Mededeeling van den Heer S. H. KOORDERS: „Bijdrage No. 1 tot de kennis der Flora van Java". 645, 803.

— Mededeeling van den Heer F. A. F. C. WENT: „Over de ontwikkeling van zaadknop, embryozak en eicel bij de Podostemaceae". 858.

PLATINA (Opmerking over de uitzetting van) bij lage temperaturen. 243.

PLATVISSCHEN (Over segmentale huidverzorging door het sympathische zenuwstelsel bij gewervelde dieren, op grond van proefondervindelijke onderzoekingen over de zenuwverzorging der kleurstofcellen bij) en der haarbewegende spieren bij katten. 290.

PLOOIPUNTSLIJN (De). 216.

PODOSTEMACEAE (Over de ontwikkeling van zaadknop, embryozak en eicel bij de). 858.

POLAK (CLARA). Aanbieding eener verhandeling „Die Anatomie des Genus Colobus". 504. Verslag hierover. 509.

POLYTRICHUM-SOORTEN (Over een tweemalige reductie van het aantal Chromosomen bij het ontstaan der geslachtscellen en over de daarop volgende tweemalige bevruchting bij enkele). 312.

POOLONDERZOEK (Verslag over een uitnoodiging van den Belgischen Gezant aan de Regeering om zich te doen vertegenwoordigen op een Congres voor) in Mei 1908 te Brussel te houden. 3.

— Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken met verzoek te willen berichten, welke personen zouden zijn aan te wijzen als gedelegeerden en plaatsvervangende gedelegeerden der Nederlandsche Regeering bij het in de maand Mei te Brussel te houden Congres voor poolonderzoek. 692.

— Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken waarbij bericht wordt dat de door de Afdeeling voorgedragenen benoemd zijn tot gedelegeerden der Regeering op het te Brussel te houden Congres voor). 824.

POSTMA (o.). Beweging van molecuul-systemen waarop geen uitwendige krachten werken. 332.

PRODUKT (Over een oneindig) voorgesteld door een bepaalde integraal. 325.

PRO-ENZYMEN (Over een methode om enzymen en) uit de mucosa van het spijsverteeringskanaal te extraheeren en de topische verbreiding er van vast te stellen. 191.

QUATERNAIRE STELSELS (Over evenwichten in). 843.

REEKSEN (Over vermenigvuldiging van trigonometrische). 571.

REGELVLAKKEN (Algebraische ruimtekrommen op) van den $n$en graad met $(n-1)$-voudige rechte. 876.

REGENERATIE (Physiologische) van neurofibrillaire eindnetten. 319.

REID (CLEMEND) en Mrs. ELEANOR M. REID: „The fossil flora of Tegelen sur Meuse, near Venloo, in the province of Limburg." (Verslag hierover). 4.

— On Dulichium vespiforme sp. nov. from the brick-earth of Tegelen. 898.

RHOMBISCHE KRISTALLEN (Over de scheeve uitdooving van). 362.

ROMBURGH (P. VAN). Over de ontleding van penta-erythriettetraformiaat bij verhitting. 137.

— Over het lupeol. 300.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over de analogie in kristalvorm bij de halogeensubstitutieprodukten van koolwaterstoffen met open koolstofketen". 514.

RÖNTGEN (W. C.). Bekrachtiging zijner benoeming tot buitenlandsch lid. 2.

— Dankzegging voor zijne benoeming. 68.

RUGGEMERG (Opstijgende degeneratie na gedeeltelijke doorsnijding van het). 350.

RUIMTE van zeven afmetingen (Het analogon der Cf. van KUMMER in de). 457.

RUIMTE R_n (Over de doorsnee van het maatpolytoop M_n der) met een centrale ruimte R_{n-1} loodrecht op een diagonaal. 467.

— (Over de doorsneden van het net der maatpolytopen M_n der) met een ruimte R_{n-1} loodrecht op een diagonaal. 699.

RUIMTEDOORSNEDEN (Over vierdimensionale netten en hun). 1ste gedeelte. 526. 2de gedeelte. 623.

RUIMTEKROMMEN (Over) van het geslacht twee. 871.

— (Algebraische) op regelvlakken van den $n$en graad met $(n-1)$-voudige rechte. 876.

RUIMTEN van $(2p-1)$ afmetingen (De uitbreiding der configuratie van KUMMER op). 205.

RIJKSMUSEUM te Amsterdam (Overlegging van de definitief vastgestelde veranderingen der bliksemafleiders op het). 177.

RIJNBERK (G. VAN). Over segmentale huidverzorging door het sympathische zenuwstelsel bij gewervelde dieren, op grond van proefondervindelijke onderzoekingen over de zenuwverzorging der kleurstofcellen bij platvisschen en der haarbewegende spieren bij katten. 290.

SANDE BAKHUYZEN (E. F. VAN DE). Aanbieding eener mededeeling van den Heer W. DE SITTER: „Over enkele punten uit de theorie der Jupitersatellieten". 110.

SANDE BAKHUYZEN (H. G. VAN DE). Verslag over het behandelde op de te Weenen gehouden algemeene vergadering der Internationale Associatie der Akademiën. 68.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. STEIN S. J. „β Lyrae als dubbelster". 380.

— Omtrent de hoogte van den gemiddelden zeestand in het IJ voor Amsterdam van 1700—1860. 766.

— Bekrachtiging zijner benoeming tot voorzitter. 824.

SATELLIETEN van Jupiter (Over de massa's en de baanelementen der). 579, 709.

SCHALIE, Lei en Schist (Over de termen). 463.

Scheikunde. Mededeeling van den Heer P. VAN ROMBURGH: „Over de ontleding van penta-erythriettetraformiaat bij verhitting". 137.

— Mededeeling van den Heer P. VAN ROMBURGH: „Over het lupeol". 300.

— Mededeeling van den Heer R. A. WEERMAN: „Inwerking van kaliumhypochloriet op kaneelzuuramide". (2de mededeeling). 303.

Scheikunde. Mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over de vraag naar de mengbaarheid en de vormanalogie bij aromatische Nitro- en Nitroso-verbindingen". 491.
— Mededeeling van den Heer J. J. BLANKSMA: „Over de constitutie van het oxymethyldinitrobenzonitril van VAN GEUNS". 512.
— Mededeeling van den Heer D. H. BRAUNS: „Over een gekristalliseerd d. fructosetetracetaat". 577.
— Mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over de Tri-para-Halogeen-substitutieproducten van het Triphenylmethaan en van het Triphenylcarbinol". 756.
— Mededeeling van den Heer F. A. H. SCHREINEMAKERS: „Over evenwichten in quaternaire stelsels". 843.
— Mededeeling van den Heer R. W. VAN ELDIK THIEME: „De inwerking van geconcentreerd zwavelzuur op glycerine-esters van verzadigde éénbasische vetzuren". 849.
SCHIST (Over de termen Schalie, Lei en). 463.
SCHMUTZER (J.). Over de scheeve uitdooving van rhombische kristallen. 362.
— Over de termen Schalie, Lei en Schist. 463.
— Aanbieding eener verhandeling: „Bijdrage tot de kennis der oude eruptiefgesteenten en amphiboolschisten aan de rivieren Sĕbilit en Tĕbaoeng in Centraal Borneo". 690. Verslag hierover. 692.
SCHOUTE (P. H.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer LUCIEN GODEAUX: „Le théorème de GRASSMANN dans l'espace à n dimensions". 213.
— Over de doorsnee van het maatpolytoop M_n der ruimte R_n met een centrale ruimte R_{n-1} loodrecht op een diagonaal. 467.
— Over vierdimensionale netten en hun ruimtedoorsneden. 1ste gedeelte. 526. 2de gedeelte. 623.
— Over de doorsneden van het net der maatpolytopen M_n der ruimte R_n met een ruimte R_{n-1} loodrecht op een diagonaal. 699.
SCHOUTE (P. H.) en Mrs. A. BOOLE STOTT. Aanbieding eener verhandeling: „On the sections of a block of eight cells by a space rotating about a plane". 431.
— Over vijf paren uit een zelfde bron afgeleide vierdimensionale cellen. (1ste gedeelte). 482.
SCHREINEMAKERS (F. A. H.). Over evenwichten in quaternaire stelsels. 843.
SITTER (W. DE). Over periodieke banen van den Hestia-typus. 35.
— Over enkele punten uit de theorie der Jupitersatellieten. 110.
— Over de massa's en de baanelementen der satellieten van Jupiter. 579, 709.
SOLARISATIE-VERSCHIJNSEL (Bijdrage tot de kennis van het) en van verdere eigenschappen van het latente beeld. 773.
SPANNINGSCOËFFICIENT (Afleiding van den) van helium voor den internationalen heliumthermometer en herleiding van de aflezingen op den heliumthermometer tot de absolute schaal. 430, 501.
SPECTRAALLIJNEN (De intensiteiten der componenten van door magnetisme gesplitste). 286.
— (Waarneming van de magnetische splitsing der) met de methode van FABRY en PEROT. 486.
— en veldsterkte (Magnetische splitsing der). 2de gedeelte. 354.
SPECTRAALTOESTEL (Een autocollimatieve) van groote lichtintensiteit, tevens monochromator. 744.

SPIEREN (Over segmentale huidverzorging door het sympathische zenuwstelsel bij gewervelde dieren, op grond van proefondervindelijke onderzoekingen over de zenuwverzorging der kleurstofcellen bij platvisschen en der haarbewegende) bij katten. 290.

SPIJSVERTEERINGSKANAAL (Over een methode om enzymen en pro-enzymen uit de mucosa van het) te extraheeren en de topische verbreiding er van vast te stellen. 191.

STARINGSCHE zanddiluvium (Beschouwingen over het). 123.

Statistiek. Mededeeling van den Heer E. VAN EVERDINGEN: „Verband tusschen kindersterfte en hooge temperaturen". 274.

STEIN (J.). β Lyrae als dubbelster. 380.

STELSEL (Eenige constructiën afgeleid uit de beweging van een vlak). 566.

STELSELS (Over evenwichten in quaternaire). 848.

Sterrekunde. Mededeeling van den Heer W. DE SITTER: „Over periodieke banen van den Hestia-typus." 35.

— Mededeeling van den Heer W. DE SITTER: „Over enkele punten uit de theorie der Jupitersatellieten". 110.

— Mededeeling van den Heer J. STEIN: „β Lyrae als dubbelster". 380.

— Mededeeling van den Heer W. DE SITTER: „Over de massa's en de baanelementen der satellieten van Jupiter". 579, 709.

— Mededeeling van den Heer J. C. KAPTEYN: „Over de gemiddelde stersdichtheid op verschillenden afstand van het zonnestelsel." 600.

STERSDICHTHEID (Over de gemiddelde) op verschillenden afstand van het zonnestelsel. 600.

STOCKHOLM (Dankzegging van de Kon. Akademie van Wetenschappen te) voor de betoonde belangstelling bij gelegenheid van de herdenking van den 200sten geboortedag van Car. Linnaeus. 179.

STOK (J. P. VAN DER). Verslag over eene uitnoodiging van den Belgischen gezant aan de Regeering om zich te doen vertegenwoordigen op een Congres voor poolonderzoek in Mei 1908 te Brussel te houden. 3.

— De analyse van frequentie-krommen van de luchttemperatuur. 248.

— Aanbieding van een portret in gips van wijlen den Heer C. H. D. BUYS BALLOT. 562.

— De analyse van frequentie-krommen volgens eene algemeene methode. 825.

STORINGSFUNCTIE (De) in de nabijheid van den kritischen toestand. 659.

SYMMETRIEAXEN (Ueber die krystallographisch-zulässigen Zähligkeiten der). 406.

TEGELEN (On Dulichium vespiforme sp. nov. from the brick-earth of). 898.

TEGELEN SUR MEUSE (The fossil flora of) near Venloo, in the province of Limburg. (Verslag hierover). 4.

TEICHNER (Herhaling van de proeven van DE HEEN en) omtrent den kritischen toestand. 44.

TEMPERATUREN (Over het meten van zeer lage). XVI. Calibratie van eenige platina-weerstandsthermometers. 165. XVII. Contrôle-bepalingen met den waterstof-thermometer en den weerstands-thermometer. 420. XVIII. Bepaling van het absolute nulpunt volgens den waterstof-thermometer van constant volume en herleiding van de aflezingen op den normalen waterstof-thermometer tot de absolute schaal.

427. XIX. Afleiding van den spanningscoëfficient van helium voor den internationalen heliumthermometer en herleiding van de aflezingen op den heliumthermometer tot de absolute schaal. 430, 501. XX. Invloed van de afwijkingen van de wet van Boyle-Charles op de temperatuur, gemeten met de schaal van den gasthermometer van constant volume volgens de waarnemingen met dit werktuig. 690, 817.

TEMPERATUREN (Over de verandering van den weerstand der metalen bij zeer lage) en den invloed, dien kleine bijmengselen hierop hebben. I. 169.

— (De absorptiespectra van de verbindingen der zeldzame aarden bij de), die met vloeibare waterstof te bereiken zijn, en hunne verandering door het magnetische veld. 678.

— (Over de draagkracht van glas en de toepassing van glazen buizen bij metingen onder hoogen druk bij gewone en bij lage). 890.

— (Opmerking over de uitzetting van platina bij lage). 243.

— (Verband tusschen kindersterfte en hooge). 274.

TEMPERATUUR (De invloed van) en magnetisatie op selectieve absorptiespectra. 635. II. 749. III. 878.

— (Invloed van de afwijkingen van de wet van Boyle-Charles op de), gemeten met de schaal van den gasthermometer van constant volume volgens de waarnemingen met dit werktuig. 690. 817.

TESCH (P.). Beschouwingen over het Staringsche zanddiluvium. 123.

THÉORÈME de GRASSMANN (Le) dans l'espace à n dimensions. 213.

THEORIE der binaire mengsels (Bijdrage tot de). IV. 12. V. 143. VI. 216.

— der Jupitersatellieten (Over enkele punten uit de). 110.

THERMOMETER (Herleiding van de aflezingen op den normalen helium-) tot de absolute schaal. 430.

THIEME (B. W. VAN ELDIK). Zie ELDIK THIEME (B. W.).

THOMSON (WILLIAM). Bericht van overlijden van (Lord Kelvin). 434.

TOESTANDSVERGELIJKING (Over de) van eene stof in de nabijheid van het kritisch punt vloeistof-gas. I. De storingsfunctie in de nabijheid van den kritischen toestand. 659. II. Spectrophotometrisch onderzoek van de opalescentie van eene stof in de nabijheid van den kritischen toestand. 667.

TRIGONOMETRISCHE REEKSEN (Over vermenigvuldiging van). 571.

TRIPHENYLMETHAAN en van het Triphenylcarbinol (Over de Tri-para-Halogeen-Substitutieproducten van het). 756.

TRIPLETTEN (Nieuwe waarnemingen over asymmetrisch door magnetisme gesplitste). 610.

— (Verandering van golflengte van de middelste lijn van) in een magnetisch veld. 1ste gedeelte. 618. 2de gedeelte. 855.

TRIVELLI (A. P. H.). Bijdrage tot de kennis van het solarisatie-verschijnsel en van verdere eigenschappen van het latente beeld. 773.

UITDOOVING (Over de scheeve) van rhombische kristallen. 362.

UITZETTING van platina (Opmerking over de) bij lage temperaturen. 243.

UPSALA (Dankzegging van de Universiteit te) voor de ontvangen gelukwenschen bij gelegenheid van de herdenking van den 200sten geboortedag van Car. Linnaeus. 68.

VEEN (A. L. W. E. VAN DER). Over het kristalstelsel van diamant. 142.

VELDSTERKTE (Magnetische splitsing der spectraallijnen en). 2de gedeelte. 354.

VERGADERING (Vaststelling der April-) op Vrijdag 24 April. 822.

— (Vaststelling der Mei-) op Vrijdag 29 Mei of Zaterdag 30 Mei. 899.

VETZUREN (De inwerking van geconcentreerd zwavelzuur op glycerine-esters van verzadigde éénbasische). 849.

ψ-VLAK van VAN DER WAALS (Bijdragen tot de kennis van het). XV. Geval dat de eene component een aantrekkingloos gas is met moleculen die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen. 2de Vervolg. 59. XVI. Over het zinken van de gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels voor het geval dat de moleculen van eene der componenten slechts eene zwakke aantrekking uitoefenen. 233.

VLOEISTOF-GAS (Over de toestandsvergelijking van eene stof in de nabijheid van het kritisch punt). I. De storingsfunctie in de nabijheid van den kritischen toestand. 659. II. Spectrophotometrisch onderzoek van de opalescentie van eene stof in de nabijheid van den kritischen toestand. 667.

VLOEISTOFPHASE (Over het zinken van de gasphase in de) bij binaire mengsels voor het geval dat de moleculen van eene der componenten slechts eene zwakke aantrekking uitoefenen. 233.

VOGEL (H. C.). Bericht van overlijden. 179.

VOIGT (W.). Ueber die krystallographisch-zulässigen Zähligkeiten der Symmetrieaxen. 406.

VORM-ANALOGIE (Over de vraag naar de mengbaarheid en de) bij aromatische Nitro- en Nitroso-verbindingen. 491.

VOSMAER (G. C. J.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. BOEKE: „Over den bouw van de gangliencellen in het centraal zenuwstelsel van Branchiostoma lanceolatum". 5.

— Aanbieding eener mededeeling van de Heeren J. BOEKE en G. J. DE GROOT: „Physiologische regeneratie van neurofibrillaire eindnetten." 319.

VRIES (JAN DE). Aanbieding eener mededeeling van den Heer Z. P. BOUMAN: „Bijdrage tot de kennis der oppervlakken met constante gemiddelde kromming". 537.

— Over ruimtekrommen van het geslacht twee. 871.

— Algebraïsche ruimtekrommen op regelvlakken van den n^{en}-graad met $(n-1)$-voudige rechte. 876.

WAALS (VAN DER) (Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van). XV. Geval dat de eene component een aantrekkingloos gas is met moleculen die uitgebreidheid hebben. Beperkte mengbaarheid van twee gassen. (2de Vervolg). 59. XVI. Over het zinken van de gasphase in de vloeistofphase bij binaire mengsels voor het geval dat de moleculen van eene der componenten slechts eene zwakke aantrekking uitoefenen. 233.

WAALS (J. D. VAN DER). Bijdrage tot de theorie der binaire mengsels. IV. 12. V. 143. VI. 216.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. D. VAN DER WAALS Jr.: „De waarde der zelfinductie volgens de electronen-theorie". 867.

WAALS Jr. (J. D. VAN DER). De waarde der zelfinductie volgens de electronentheorie. 867.

WATERSTAAT (Minister van). Zie MINISTER van Waterstaat.

WATERSTOF (Isothermen van) tusschen —104° C. en —217° C. 162. 411.

— (Isothermen van) tusschen 0° C. en 100° C. 418.

— (De absorptie-spectra van de verbindingen der zeldzame aarden bij de temperaturen, die met vloeibare) te bereiken zijn, en hunne verandering door het magnetische veld. 678.

WATERSTOFTHERMOMETER (Contrôle-bepalingen met den) en den weerstandsthermometer. 420.

— (Bepaling van het absolute nulpunt volgens den) van constant volume en herleiding van de aflezingen op den normalen waterstofthermometer tot de absolute schaal. 427.

WEBER (MAX). Verslag over eene uitnoodiging van den Belgischen Gezant aan de Regeering om zich te doen vertegenwoordigen op een Congres voor poolonderzoek in Mei 1908 te Brussel te houden. 3.

— Verslag over eene verhandeling van Mej. CLARA POLAK. 509.

WEERMAN (R. A). Inwerking van kalium-hypochloriet op kaneelzuuramide. (2de Mededeeling). 303.

WEERSTAND der metalen (Over de verandering van den) bij zeer lage temperaturen en den invloed, dien kleine bijmengselen hierop hebben. I. 169.

WEERSTANDSTHERMOMETER (Contrôlebepalingen met den waterstofthermometer). 420.

WEERSTANDSTHERMOMETERS (Calibratie van eenige platina-). 165.

WENT (F. A. F. C.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. VAN BEUSEKOM: „Over den invloed van wondprikkels op de vorming van adventieve knoppen in de bladeren van Gnetum Gnemon L". 93.

— Aanbieding eener verhandeling van den Heer S. H. KOORDERS: „Botanische Untersuchungen über einige in Java vorkommende Pilze, besonders über Blätter bewohnende, parasitisch auftretende Arten." Abschnitt II—V. 177.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer en Mevr. W. en J. DOCTERS VAN LEEUWEN-REIJNVAAN: „Over een tweemalige reductie van het aantal chromosomen bij het ontstaan der geslachtscellen en over de daarop volgende tweemalige bevruchting bij enkele Polytrichum soorten". 312.

— Over de ontwikkeling van zaadknop, embryozak en eicel bij de Podostemaceae. 858.

WET van Boyle-Charles (Invloed van de afwijkingen van de) op de temperatuur, gemeten met de schaal van den gasthermometer van constant volume volgens de waarnemingen met dit werktuig. 630, 817.

WICHMANN (C. E. A.). Over ertsgangen in de provincie Limburg. 69.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. SCHMUTZER: „Over de scheeve uitdooving van rhombische kristallen". 362.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. SCHMUTZER: „Over de termen Schalie, Lei en Schist". 463.

— Verslag over eene verhandeling van den Heer J. SCHMUTZER. 692.

— Over steenen bijtels van Nieuw Guinea. 824.

WILSON (EDM. B.). Bekrachtiging zijner benoeming tot buitenlandsch lid. 2.
— Dankzegging voor zijne benoeming. 69.
WIND (C. H.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer E. VAN EVERDINGEN: „Verband tusschen kindersterfte en hooge temperaturen". 274.
WINKLER (C.). Over den centralen loop van den nervus octavus en zijn invloed op de beweging bij het konijn. 68.
— Aanbieding eener mededeeling van den Heer G. VAN RYNBERK: „Over segmentale huidverzorging door het sympathische zenuwstelsel bij gewervelde dieren, op grond van proefondervindelijke onderzoekingen over de zenuwverzorging der kleurstofcellen bij platvisschen en der haarbewegende spieren bij katten". 290.
— Aanbieding eener mededeeling van den Heer S. J. DE LANGE: „Opstijgende degeneratie na gedeeltelijke doorsnijding van het ruggemerg". 350.
Wiskunde. Mededeeling van den Heer J. A. BARRAU: „De uitbreiding der configuratie van KUMMER op ruimten van (2p—1) afmetingen". 205.
— Mededeeling van den Heer LUCIEN GODEAUX: „Le théorème de Grassmann dans l'espace à n dimensions". 213.
— Mededeeling van den Heer W. KAPTEYN: „Over een oneindig produkt, voorgesteld door een bepaalde integraal". 325.
— Aanbieding eener verhandeling van Mrs. A. BOOLE STOTT en P. H. SCHOUTE: „On the sections of a block of eight cells by a space rotating about a plane". 431.
— Mededeeling van den Heer J. A. BARRAU: „Het analogon der Cf. van KUMMER in de ruimte van zeven afmetingen". 457.
— Mededeeling van den Heer P. H. SCHOUTE: „Over de doorsnee van het maatpolytoop M_n der ruimte R_n met een centrale ruimte R_{n-1} loodrecht op een diagonaal". 467.
— Mededeeling van Mrs. A. BOOLE STOTT en van den Heer P. H. SCHOUTE: „Over vijf paren uit een zelfde bron afgeleide vierdimensionale cellen." (1ste gedeelte.) 482.
— Mededeeling van den Heer P. H. SCHOUTE: „Over vierdimensionale netten en hun ruimtedoorsneden." 1ste gedeelte. 526. 2de gedeelte. 623.
— Mededeeling van den Heer Z. P. BOUMAN: „Bijdrage tot de kennis der oppervlakken met constante gemiddelde kromming". 537.
— Mededeeling van den Heer J. C. KLUYVER: „Over het cyclische minimaalvlak". 550.
— Mededeeling van den Heer J. CARDINAAL: „Eenige constructiën afgeleid uit de beweging van een vlak stelsel". 566.
— Mededeeling van den Heer W. KAPTEYN: „Over vermenigvuldiging van trigonometrische reeksen". 571.
— Mededeeling van den Heer P. H. SCHOUTE: „Over de doorsneden van het net der maatpolytopen M_n der ruimte R_n met een ruimte R_{n-1} loodrecht op een diagonaal". 699.
— Mededeeling van den Heer JAN DE VRIES: „Over ruimtekrommen van het geslacht twee". 871.
— Mededeeling van den Heer JAN DE VRIES: „Over algebraische ruimtekrommen op regelvlakken van den n^{en} graad met (n–1)-voudige rechte". 876.

WONDPRIKKELS (Over den invloed van) op de vorming van adventieve knoppen in de bladeren van Gnetum Gnemon L. 93.

WIJHE (J. W. VAN). Verslag over eene verhandeling van Mej. CLARA POLAK. 509.

Y voor Amsterdam van 1700—1860 (Omtrent de hoogte van den gemiddelden zeestand in het). 766.

ZAADKNOP (Over de ontwikkeling van), embryozak en eicel bij de Podostemaceae. 858.

ZANDDILUVIUM (Beschouwingen over het Staringsche). 123.

ZEEMAN (P.). De intensiteiten der componenten van door magnetisme gesplitste spectraallijnen. 286.

— Verslag over een missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken betreffende den aanleg eener electrische tram in Groningen nabij het Natuurkundig Laboratorium. 308.

— Magnetische splitsing der spectraallijnen en veldsterkte. 2de gedeelte. 354.

— Waarneming van de magnetische splitsing der spectraallijnen met de methode van FABRY en PEROT. 486.

— Nieuwe waarnemingen over asymmetrisch door magnetisme gesplitste tripletten. 610.

— Verandering van golflengte van de middelste lijn van tripletten in een magnetisch veld. 1ste gedeelte. 618. 2de gedeelte. 855.

ZEESTAND in het IJ (Omtrent de hoogte van den gemiddelden) voor Amsterdam van 1700—1860. 766.

ZELFINDUCTIE (De waarde der) volgens de electronen-theorie. 867.

ZENUWSTELSEL (Over den bouw van de gangliencellen in het centraal) van Branchiostoma lanceolatum. 1ste Mededeeling. 5.

— (Over segmentale huidverzorging door het sympathische) bij gewervelde dieren, op grond van proefondervindelijke onderzoekingen over de zenuwverzorging der kleurstofcellen bij platvisschen en der haarbewegende spieren bij katten. 290.

ZONNESTELSEL (Over de gemiddelde stersdichtheid op verschillenden afstand van het). 600.

ZWAARDEMAKER (H.). De adsorptie van muskongeur tegen vlakten van verschillend materiaal. 31. 139.

— Over geurverwantschappen. 183.

ZWAVELZUUR (De inwerking van) op glycerine-esters van verzadigde éénbasische vetzuren. 849.

BOEKDRUKKERIJ
DE ROEVER KRÖBER & BAKELS
AMSTERDAM.

3 2044 092 846 609